Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. №4 (46). С. 16–24

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ГЕМИТРОПНЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕД

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы применения относительных тензоров при моделирвоании гемитропных микрополярных сред. Вводится определяющая форма микрополярного упругого потенциала. С помощью принципа виртуальной работы получаются определяющие уравнения для силовых и моментных характеристик микрополярного континуума в терминах относительных тензоров. Приводятся уравнения движения микрополярного континуума в терминах относительных тензоров. Выводится финальная форма динамических уравнений для перемещений и микровращений в случае полуизотропной (гемитропной) симметрии.

Ключевые слова: микроструктура, микрополярность, директор, относительный тензор, ориентирующий псевдоскаляр, микрополярный гемитропный континуум

DOI: 10.37972/chgpu.2020.89.81.031

УДК: 539.374

1. Вводные замечания. Математическое моделирование процессов деформирования метаматериалов актуальная задача, стоящая перед современными исследователями. Адекватность математических моделей современной континуальной механики обеспечивается совместным применением достижений современной геометрии

Мурашкин Евгений Валерьевич
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.
Радаев Юрий Николаевич
`e-mail:` y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 18-01-00844, № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.06.2020

(векторный анализ [1–4] и тензорное исчисление [5–8]) и теоретической физики (теории поля [9–11]). Применение достижений современной геометрии не только гарантирует адекватность математических моделей, но и позволяет получить наиболее простую запись систем дифференциальных уравнений и определяющих форм потенциалов (свободной энергии Гельмгольца, упругой энергии) с аргументами, являющими алгебраические инвариантами [12] физических полей.

Современные метаматериалы обладают экзотическими свойствами: отрицательный коэффициент Пуассона (ауксетические материалы [13]), отрицательное тепловое расширение, отрицательная электрическая проницаемость и магнитная проницаемость. Многие метаматериалы являются композитными материалами, но с некоторыми отличиями. Метаматериал демонстрирует характеристики отклика, которые либо не наблюдаются, либо усиливаются по сравнению с индивидуальными откликами составляющих его материалов. Композитные 3D–материалы используют для изготовления легких компонентов и деталей конструкций во многих отраслях современной промышленности [14, 15]. Композиты производят комбинированием материалов с предпочтительными физико-механическими свойствами и последующем синтезом нового материала из выбранных составляющих, обладающих заданными свойствами. Например, титановые сплавы модифицируются добавлением к ним других материалов для создания титановых композитов. Свойства полученного материала оказываются приемлемыми для большинства приложений, где необходима низкая плотность и хорошая коррозионная стойкость (например, в компонентах газотурбинных двигателей, высокопроизводительных автомобильных деталях, конструктивных элементах самолетов, морской технике, аэрокосмических компонентах, медицинских устройствах, биомедицинских приложениях (имплатанты и протезы), спортивном оборудовании). Композиты из титана часто используются для поверхностной модификации с целью улучшения определенных механических свойств. Эффективное производство этих композитных материалов — серьезная проблема, с которой сталкивается современная технологическая практика. Появление технологии аддитивного производства упростило производство композитных 3D–материалов. Лазерное напыление металлических сплавов открывает прекрасные возможности для производства изделий из титана и его композитов [15–17]. Лазерное напыление, кроме того, позволяет изготавливать геометрически сложные детали, которые невозможно эффективно изготовить с использованием классических подходов. Производимые таким способом 3D–изделия и 3D–материалы обладают сложными термомеханическими свойствами, в том числе, наличием микроструктуры. Поэтому, при математическом моделировании процессов деформирования и формообразования таких материалов необходимо отказываться от классических моделей механики сплошных сред. При построении таких моделей важно соблюдать термодинамическую и геометрическую непротиворечивость получаемых систем дифференциальных уравнений. В таких случаях полезными оказываются микрополярные модели континуума.

Микрополярное твердое тело, которое изотропно относительно вращений координат, но не относительно отражений, называется полуизотропным (гемитропным). Материалы могут проявлять полуизотропность в атомном масштабе (кварц, сахар, биологические молекулы), а также в более крупном масштабе (кости, пористые материалы, композиты, содержащие волокна или включения) [18–20]. Гемитропные среды из-за отсутствия геометрической симметрии между объектом и его зеркальным отображением известны в оптике как оптически активные материалы. Они характеризуются присущей им лево- или правоориентированностью на оптических частотах из-за естественной спиральной структуры и, следовательно, не могут совпадать с их зеркальным отражением. Геометрическим объектом реагирующим на отражение является относительный тензор (псевдотензор). Математический аппарат относительных тензоров достаточно хорошо развит, о чем свидетельствуют многочисленные монографии по тензорному исчислению [6–9, 12, 21–23]. Физические поля гемитропного микрополярного континуума в рамках математической модели представляются относительными тензорами. Тем не менее, формализм относительных тензоров очень редко применяется в исследованиях по микрополярным средам. Заметим, что основной целью настоящей статьи выступает вывод основных уравнений микрополярной теории упругости в терминах относительных тензоров (relative tensors) или псевдотензоров (pseudotensors), для более глубокого понимания физической и геометрической природы исследуемых физических объектов.

2. Гемитропное микрополярное тело. Применим формализм относительных тензоров [7,12] к модели линейного микрополярного тела. Для микрополярного континуума с одним директором упругий потенциал[1] $\mathscr{U}$ с соответствующими аргументами можно принять в форме [24, 25]

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}(\epsilon_{(ij)}, \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(ij)}, \overset{[+1]}{\varphi}{}^{i}, \kappa_i), \tag{1}$$

где $\epsilon_{(ij)}$ — тензор малых деформаций (абсолютный тензор), $\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(ij)}$ — симметричная часть тензора изгиба—кручения (относительный тензор веса $+1$), $\overset{[+1]}{\varphi}{}^{i}$ — вектор относительного микровращения (относительный вектор веса $+1$), κ_i — сопутствующий вектор изгиба—кручения (абсолютный вектор), сверху корневого символа относительного тензора в квадратных скобках отмечен его вес.

Первая вариация $\mathscr{U}$ вычисляется согласно

$$\delta\mathscr{U} = \sigma^{(ij)}\delta\epsilon_{(ij)} + \overset{[-1]}{\mu}{}_{(ij)}\delta\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(ij)} + 2\overset{[-1]}{\tau}{}_i\delta\overset{[+1]}{\varphi}{}^{i} + 2\mu^i\delta\kappa_i. \tag{2}$$

Здесь σ^{ik} — тензор силовых напряжений (абсолютный тензор второго ранга, $\overset{[-1]}{\mu}{}_{\cdot k}^{i\cdot}$ — тензор моментных напряжений (относительный тензор веса -1), $\overset{[-1]}{\tau}{}_i$ — ассоциированный вектор силовых напряжений (относительный вектор веса -1), μ^i — ассоциированный вектор моментных напряжений (абсолютный вектор).

Принцип виртуальной работы[2], при моделировании механического отклика микрополярных сред, примем в виде

$$\int \delta\mathscr{U}\,dV = \int \left[X^j\delta u_j + \overset{[-1]}{Y}{}_j\delta\overset{[+1]}{\varphi}{}^{j}\right]dV + \oint_{\partial}\left[t^j\delta u_j + \overset{[-1]}{m}{}_j\delta\overset{[+1]}{\varphi}{}^{j}\right]dS. \tag{3}$$

Здесь dV — инвариантный элемент объема, X^k — объемные силы, Y_k — объемные моменты (относительный тензор веса -1), t^j — вектор силовых напряжений (force

[1]Упругий потенциал $\mathscr{U}$ является псевдоскаляром веса 0.

[2]Принцип виртуальной работы является следствием более фундаментального принципа виртуальных перемещений [24].

traction vector), $\overset{[-1]}{m}_j$ — вектор моментных напряжений (couple traction vector), связанные с тензором силовых напряжений σ^{ik} и тензором моментных напряжений $\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ согласно соотношениям Коши

$$t^k = n_i\sigma^{ik}, \tag{4}$$

$$\overset{[-1]}{m}_k = n_i \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}. \tag{5}$$

Следствием вариационного принципа (3) являются уравнения движения микрополярной среды:

$$\nabla_i\sigma^{ik} = -X^k + \rho\partial_{\cdot} v^k, \tag{6}$$

$$\nabla_i \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k} - 2\overset{[-1]}{\tau}_k = -\overset{[-1]}{Y}_k + \overset{[-2]}{\Im}\,\partial_{\cdot\cdot}\overset{[+1]}{\phi}{}^k, \tag{7}$$

где ∇_i — ковариантная производная (набла Гамильтона), ρ — массовая плотность, v^k — компоненты вектора скорости, $\overset{[-2]}{\Im}$ — коэффициент микроинерции, $\overset{[+1]}{\phi}{}^k$ вектор микровращений.

В случае континуума, проявляющего полуизотропные свойства, т.е. инвариантность относительно вращений и не инвариантность относительно отражений и инверсии, потенциал $\mathscr{U}$ можно представить в форме

$$\begin{aligned}\mathscr{U} = {} & G\nu(1-2\nu)^{-1}g^{is}g^{lm}\epsilon_{(is)}\epsilon_{(lm)} + G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}c_3 g_{is}g_{lm}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \\ & + Gg^{is}g^{lm}\epsilon_{(il)}\epsilon_{(sm)} + G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}g_{is}g_{lm}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(il)}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(sm)} + 2G\overset{[-2]}{c}_1 g_{is}\delta\overset{[+1]}{\varphi}{}^i\delta\overset{[+1]}{\varphi}{}^s + \\ & + G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\overset{[+2]}{c}_2 g^{is}\kappa_i\kappa_s + G\overset{[-1]}{L}c_4 g^{is}g_{lm}\epsilon_{(is)}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \\ & + G\overset{[-1]}{L}c_5\epsilon_{(is)}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)} + G\overset{[-1]}{L}c_6\kappa_i\delta\overset{[+1]}{\varphi}{}^i,\end{aligned} \tag{8}$$

где G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; $\overset{[-1]}{L}$ — характерная длина микрополярной теории; $\overset{[-2]}{c}_1$, $\overset{[+2]}{c}_2$, c_3, c_4, c_5, c_6 — не имеющие физической размерности псевдоскаляры.

Тогда определяющие уравнения гемитропной микрополярной среды получаются в форме:

$$\begin{aligned}& \sigma^{(is)} = 2G\left(\nu(1-2\nu)^{-1}g^{is}g^{lm} + g^{il}g^{sm}\right)\epsilon_{(lm)} + G\overset{[-1]}{L}(c_4 g^{is}g_{lm}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + c_5\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)}), \\ & \overset{[-1]}{\mu}_{(is)} = 2G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}(c_3 g_{is}g_{lm} + g_{il}g_{sm})\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + G\overset{[-1]}{L}(c_4 g_{is}g^{lm}\epsilon_{(lm)} + c_5\epsilon_{(is)}), \\ & \overset{[-1]}{\tau}_i = 2G\overset{[-2]}{c}_1 g_{is}\overset{[+1]}{\varphi}{}^s + \frac{1}{2}G\overset{[-1]}{L}c_6\kappa_i, \\ & \mu^i = G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\overset{[+2]}{c}_2 g^{is}\kappa_s + \frac{1}{2}G\overset{[-1]}{L}c_6\overset{[+1]}{\varphi}{}^i.\end{aligned} \tag{9}$$

Учитывая свойство степеней фундаментального ориентирующего скаляра[3] e

$$\nabla_i e^m = 0 \quad (m = \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

и дополнительно вводя обозначения

$$c'_4 = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c'_5 = \frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c'_6 = -c_6, \quad f^i = \frac{X^i}{\rho}, \quad \overset{[-1]}{l}_i = \frac{\overset{[-1]}{Y}_i}{\rho}, \tag{10}$$

получим уравнения движения для гемитропного микрополряного континуума в терминах перемещений и микровращений

$$\begin{gathered} G[(1 + e^2\overset{[-2]}{c_1})\nabla^s\nabla_s u^i + (1 - e^2\overset{[-2]}{c_1} + 2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k \pm 2e\overset{[-2]}{c_1}\epsilon^{ikl}\nabla_k \overset{[+1]}{\phi}_l + \\ + \overset{[-1]}{L} c'_4 \nabla^i \nabla_k \overset{[+1]}{\phi}{}^k + \overset{[-1]}{L} c'_5 \nabla^k \nabla_k \overset{[+1]}{\phi}{}^i] = -\rho(f^i - \partial_{..} u^i), \\ G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}[(1 + \frac{1}{e^2}\overset{[+2]}{c_2})\nabla^s\nabla_s \overset{[+1]}{\phi}_i + (1 - \frac{1}{e^2}\overset{[+2]}{c_2} + 2c_3)\nabla_i\nabla_k \overset{[+1]}{\phi}{}^k + \overset{[-1]}{L}{}^{-1} c'_4 \nabla_i \nabla^k u_k + \\ + \overset{[-1]}{L}{}^{-1} c'_5 \nabla^k \nabla_k u_i + \overset{[-1]}{L}{}^{-1} c'_6 \epsilon_{isl} \nabla^s \overset{[+1]}{\phi}{}^l] - 2eG\overset{[-2]}{c_1}(2\overset{[+1]}{\phi}_i - \\ - \epsilon^{pqn} g_{ip} g_{kq} g_{ln} g^{ks} \nabla_s u^l) = -\rho(\overset{[-1]}{l}_i - \overset{[-2]}{\mathfrak{I}}\, \partial_{..} \overset{[+1]}{\phi}_i). \end{gathered} \tag{11}$$

3. Заключительные замечания. Применение формализма относительных тензоров и алгебраических инвариантов в записях физических законов и дифференциальных уравнений позволяет более аккуратно изучать исследуемые физические поля. Отметим также, что достаточно простой способ преобразования относительных тензоров в абсолютные позволяет легко переходить от записи дифференциальных уравнений микрополярных теорий в терминах относительных тензоров к уравнениям в терминах истинных тензоров.

Для систем координат, удовлетворяющих ограничению

$$|e| = 1, \tag{12}$$

т.е.

$$e = \operatorname{sgn} e, \tag{13}$$

[3]Ориентирующий трехмерное пространство псевдоскаляр веса +1 определяется соотношением

$$e = \overset{[+1]}{e} = \underset{1}{\boldsymbol{\imath}} \cdot (\underset{2}{\boldsymbol{\imath}} \times \underset{3}{\boldsymbol{\imath}}),$$

$\underset{k}{\boldsymbol{\imath}}$ $(k = 1, 2, 3)$ — локальные базисные векторы.

дифференциальные уравнения (11), в случае левоориентированной декартовой системе координат, преобразуются к виду

$$
\begin{gathered}
G[(1+\overset{[-2]}{c}_1)\partial_s\partial_s u_i+(1-\overset{[-2]}{c}_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\partial_i\partial_k u_k-2\overset{[-2]}{c}_1\epsilon_{ikl}\partial_k\overset{[+1]}{\phi}_l+\\
+\overset{[-1]}{L}c_4'\partial_i\partial_k\overset{[+1]}{\phi}_k+\overset{[-1]}{L}c_5'\partial_k\partial_k\overset{[+1]}{\phi}_i]=-\rho(f_i-\partial_{\cdot\cdot}u_i),\\
G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}[(1+\overset{[+2]}{c}_2)\partial_s\partial_s\overset{[+1]}{\phi}_i+(1-\overset{[+2]}{c}_2+2c_3)\partial_i\partial_k\overset{[+1]}{\phi}_k+\overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_4'\partial_i\partial_k u_k+\\
+\overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_5'\partial_k\partial_k u_i+\overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_6'\epsilon_{isl}\partial_s\overset{[+1]}{\phi}_l]-2G\overset{[-2]}{c}_1(2\overset{[+1]}{\phi}_i-\\
-\epsilon_{ikl}\partial_k u_l)=-\rho(\overset{[-1]}{l}_i-\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}\,\partial_{\cdot\cdot}\overset{[+1]}{\phi}_i).
\end{gathered}
\tag{14}
$$

Встречающаяся в литературе по микрополярным континуумам характерная длина L считается абсолютным скаляром. В представленном исследовании она оказывается псевдоскаляром веса -1, т.е. чувствительна к преобразованиям полуизотропной группы, в то время как модуль длины $|L|$ остается инвариантным относительно таких преобразований.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Gibbs J. W. Vector analysis: A text-book for the use of students of mathematics and physics, founded upon the lectures of J. Willard Gibbs. Yale University Press, 1901. 460 p.

[2] Weatherburn C. E. Elementary vector analysis. London: Bell and Sons, 1921. xxvi + 184 p.

[3] Weatherburn C. E. Advanced Vector Analysis. London: Bell and Sons, 1924. 222 p.

[4] Кочин И. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Москва: Изд-во Акад. Наук, 1951. 427 с.

[5] Ricci and Levi-Civita's Tensor Analysis Paper: Translation, Comments, and Additional Material / G. Ricci-Curbastro, R. Hermann, M. M. G. Ricci et al. Brookline: Math Science Press, 1975. Vol. 2. 260 p.

[6] Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. 456 с.

[7] Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механикесплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.

[8] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto university press, 1949. Vol. 5. 334 p.

[9] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.

[10] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. Физматлит, 2009. 156 с.

[11] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Изд-во Саратовского ун-та, 2010. 328 с.

[12] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с.

[13] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Classification of cubic auxetics // physica status solidi (b). 2013. Vol. 250, no. 10. P. 2038–2043.

[14] Material characterization and corrosion behavior of hybrid coating TiAlSiCu/Ti6Al-4V composite / L. C. Naidoo, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // Materialwissenschaft und Werkstofftechnik. 2020. Vol. 51, no. 6. P. 766–773.

[15] Study of Additive Manufactured Ti–Al–Si–Cu/Ti–6Al–4V Composite Coating by Direct Laser Metal Deposition (DLMD) Technique / L. C. Naidoo, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // Advances in Manufacturing Engineering / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore: Springer Singapore, 2020. P. 503–513.

[16] Laser Metal Deposition of Titanium Composites: A Review / E. T. Akinlabi, G. A. Soliu, R. M. Mahamood et al. // Advances in Manufacturing Engineering / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore: Springer Singapore, 2020. P. 555–564.

[17] Additive Manufacturing / 3D Printing Technology: A Review / R. Mahamood, S. Akinlabi, M. Shatalov et al. // Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati. Fascicle XII, Welding Equipment and Technology. 2019. Dec. Vol. 30. P. 51–58. URL: https://www.gup.ugal.ro/ugaljournals/index.php/awet/article/view/2639.

[18] Lakes R. Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials // International Journal of Mechanical Sciences. 2001. Vol. 43, no. 7. P. 1579–1589.

[19] Mackay T. G., Lakhtakia A. Negatively refracting chiral metamaterials: a review // SPIE Reviews. 2010. Vol. 1, no. 1. P. 1–29.

[20] Tomar S. K., Khurana A. Wave propagation in thermo-chiral elastic medium // Applied Mathematical Modelling. 2013. Vol. 37, no. 22. P. 9409 – 9418.

[21] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: https://www.jstor.org/stable/1989146.

[22] Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: Изд-во иностранной литературы, 1948. 139 с.

[23] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Springer Science & Business Media, 2007.

[24] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. С. 504–517. URL: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635.

[25] Radayev Y. N., Kovalev V. A. On plane thermoelastic waves in hemitropic micropolar continua // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2019. Vol. 23. P. 464–474. URL: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1689.

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

ON THE THEORY OF LINEAR MICROPOLAR HEMITROPIC MEDIA

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper deals with the application of relative tensors to modeling hemitropic micropolar media. The latter is of crucial importance for biomechanics, mechanics of growing solids and mechanics of metamaterials. The constitutive form of the micropolar elastic potential is discussed. The basic equations of micropolar continuum are derived due to the principle of virtual displacements. Differential equations of the micropolar continuum are given in terms of relative tensors. The final form of dynamic equations for displacements and microrotations in the case of semi-isotropic (hemitropic) micropolar continuum is derived and discussed.

Keywords: microstructure, micropolarity, director, relative tensor, orienting pseudoscalar, micropolar hemitropic continuum

REFERENCES

[1] Gibbs J. W. Vector analysis: A text-book for the use of students of mathematics and physics, founded upon the lectures of J. Willard Gibbs. Yale University Press, 1901. 460 p.
[2] Weatherburn C. E. Advanced Vector Analysis. London: Bell and Sons, 1924. 222 p.
[3] Weatherburn C. E. Elementary vector analysis. London: Bell and Sons, 1921. xxvi + 184 p.
[4] E. K. N. Vector calculus and fundamentals of tensor calculus. Moscow: Izd-vo Akad. Nauk, 1951. 427 p.
[5] Ricci and Levi-Civita's Tensor Analysis Paper: Translation, Comments, and Additional Material / G. Ricci-Curbastro, R. Hermann, M. M. G. Ricci et al. Brookline: Math Science Press, 1975. Vol. 2. 260 p.
[6] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p.
[7] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theoryand Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p.
[8] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto university press, 1949. Vol. 5. 334 p.
[9] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
[10] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Elements of the Field Theory: Variational Symmetries and Geometric Invariants. FIZMATLIT, 2009. 156 p.
[11] Kovalev V. A., Radayev Y. N. Wave Problems of the Field Theory and Thermomechanics. Saratov University Press, 2010. 328 p.
[12] Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen: Noordhoff, 1964. 429 p.
[13] Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Classification of cubic auxetics // physica status solidi (b). 2013. Vol. 250, no. 10. P. 2038–2043.
[14] Material characterization and corrosion behavior of hybrid coating TiAlSiCu/Ti6Al-4V composite / L. C. Naidoo, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // Materialwissenschaft und Werkstofftechnik. 2020. Vol. 51, no. 6. P. 766–773.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Yuri N. Radayev, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

[15] Study of Additive Manufactured Ti–Al–Si–Cu/Ti–6Al–4V Composite Coating by Direct Laser Metal Deposition (DLMD) Technique / L. C. Naidoo, O. S. Fatoba, S. A. Akinlabi et al. // Advances in Manufacturing Engineering / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore: Springer Singapore, 2020. P. 503–513.

[16] Laser Metal Deposition of Titanium Composites: A Review / E. T. Akinlabi, G. A. Soliu, R. M. Mahamood et al. // Advances in Manufacturing Engineering / Ed. by S. S. Emamian, M. Awang, F. Yusof. Singapore: Springer Singapore, 2020. P. 555–564.

[17] Additive Manufacturing / 3D Printing Technology: A Review / R. Mahamood, S. Akinlabi, M. Shatalov et al. // Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati. Fascicle XII, Welding Equipment and Technology. 2019. Dec. Vol. 30. P. 51–58. URL: https://www.gup.ugal.ro/ugaljournals/index.php/awet/article/view/2639.

[18] Mackay T. G., Lakhtakia A. Negatively refracting chiral metamaterials: a review // SPIE Reviews. 2010. Vol. 1, no. 1. P. 1–29.

[19] Lakes R. Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials // International Journal of Mechanical Sciences. 2001. Vol. 43, no. 7. P. 1579–1589.

[20] Tomar S. K., Khurana A. Wave propagation in thermo-chiral elastic medium // Applied Mathematical Modelling. 2013. Vol. 37, no. 22. P. 9409 – 9418.

[21] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: https://www.jstor.org/stable/1989146.

[22] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p.

[23] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Springer Science & Business Media, 2007. xii+290 p.

[24] Radayev Y. N., Kovalev V. A. On plane thermoelastic waves in hemitropic micropolar continua // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2019. Vol. 23. P. 464–474. URL: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1689.

[25] Radayev Y. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2018. Vol. 22. P. 504–517. URL: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research projects nos. 18-01-00844, 19-51-60001, 20-01-00666.