Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4 (46). С. 36–46

А. А. Лаптева, В. Е. Рагозина, О. В. Дудко

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ И РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОДНОМЕРНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИНАМИКИ РАЗНОМОДУЛЬНЫХ УПРУГИХ СРЕД

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия

Аннотация. Рассматривается динамика одномерных деформаций разномодульной упругой среды под действием нестационарной граничной нагрузки в режиме «растяжение – сжатие». Исследуются особенности построения кусочно-линейной функции, аппроксимирующей нелинейное краевое условие. Указан критерий выбора узловых точек разбиения аппроксимирующей функции, позволяющий управлять режимами взаимодействия волновых фронтов всех типов в решении краевой задачи. Получена итерационная формула изменения скорости ударной волны в результате ее попутного столкновения с медленными фронтами предварительного растяжения, а также итерационные соотношения для построения поля перемещений на всех стадиях деформирования.

Ключевые слова: упругость, разномодульная среда, нестационарное деформирование, одномерное движение, взаимодействие волн, плоские волны, кусочно-линейная аппроксимация.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.39.76.033

УДК: 539.3:517.958

Введение

Моделирование нелинейной динамики твердых деформируемых тел на математическим уровне, как правило, связано с необходимостью обращения к теоретическим или численным приближенным методам из-за невозможности получить точные аналитические решения. Такие решения, которые удается построить лишь в некоторых исключительных случаях (например, в плоских автомодельных задачах), имеют не только большое самостоятельное значение, но и используются как предельный случай при анализе других задач. В настоящей статье представляем один из вариантов задач

© Лаптева А. А., Рагозина В. Е., Дудко О. В., 2020
Лаптева Анастасия Александровна
e-mail: lanastal@mail.ru, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.
Рагозина Виктория Евгеньевна
e-mail: ragozina@vlc.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.
Дудко Ольга Владимировна
e-mail: dudko@iacp.dvo.ru, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Поступила 02.09.2020

нелинейной динамики твердых сред, допускающих точные решения — задачи одномерного нестационарного деформирования разномодульного упругого полупространства на стадии малых деформаций. Модельные соотношения выбраны в форме физически нелинейной среды [1]. При одномерном деформировании модель [1] приводит к кусочно-линейной связи напряжений и деформаций, которой оказывается вполне достаточно как для линейного волнового характера уравнений движения, так и для появления ряда нелинейных эффектов (образование ударных волн, движение ударных волн с переменными скоростями, взаимодействие различных типов деформаций и т.д.). Дополнительным приемом, используемым в работе, является представление краевого условия на границе полупространства в виде кусочно-линейной функции. Краевое условие этого вида может иметь место само по себе, а также может аппроксимировать некоторое гладкое условие. В обоих случаях возникает достаточно удобный алгоритм [2] решения нестационарной краевой задачи, учитывающий движение по среде ударных волн, полусигнотонов и простых разрывов [3], а также позволяющий описывать результат взаимодействия этих волн между собой. Такие решения могут быть полезными при анализе динамики грунтов, сыпучих и пористых сред, которые традиционно относятся к раномодульноупругим материалам. В настоящей статье своей целью ставим исследование особенностей выбора кусочно-линейной функции краевого условия и включение соответствующих ограничений на аппроксимирующее разбиение в алгоритме [2] для создания возможности управления режимами взаимодействия волновых фронтов всех типов.

Общие модельные соотношения и скорости поверхностей разрывов первых производных поля перемещений

Движение разномодульной изотропной среды определяем общей системой уравнений в декартовых координатах x_i, предполагая малость деформаций, отсутствие массовых сил и адиабатичность процесса:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij,j} = \rho_0 \dot{v}_i, \quad \rho = \rho_0(1 - u_{i,i}), \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}, \\ 2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, \quad W(E_1, E_2) = \frac{\lambda}{2}E_1^2 + \mu E_2 - \nu E_1\sqrt{E_2} + \ldots, \\ E_1 = e_{ii}, \quad E_2 = e_{ij}e_{ji}, \quad v_i = \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.\end{gathered} \tag{1}$$

В формулах (1) u_i и v_i — компоненты вектора перемещений и скорости точек среды, ρ и ρ_0 — плотность среды в актуальном и свободном состоянии, e_{ij} и σ_{ij} — компоненты тензора малых деформаций и тензора напряжений Эйлера-Коши, W — упругий потенциал среды, в котором λ, μ, ν — упругие модули (λ, μ — параметры Ламе, ν — параметр разномодульности). Многоточием в формуле для $W(E_1, E_2)$ обозначены невыписанные слагаемые, соответствующие обобщению [4] модели [1] и следующие из разложения $W(E_1, E_2)$ в ряд по сферическим функциям.

Для деформаций общего типа с главными значениями e_i формулы (1) определяют зависимость упругого потенциала W от угла между единичным вектором с компонентами $e_i E_2^{-1/2}$ и осью всесторонней равномерной деформации $e_1 = e_2 = e_3$.

Для рассматриваемой далее в статье задачи одномерного движения среды $u_1 = u(x,t)$, $u_2 = u_3 = 0$, $x = x_1$ из формул (1) для связи напряжений и деформаций

следует кусочно-линейное соотношение:

$$\begin{gathered}\sigma(e) = \{\lambda + 2\mu - 2\nu \cdot \operatorname{sign}(e)\}\, e, \quad \sigma(0) = 0,\\ \operatorname{sign}(e) = \frac{e}{|e|}, \quad e \neq 0 \quad e = e_{11}, \quad \sigma = \sigma_{11}.\end{gathered} \tag{2}$$

Дополнение формулы $\sigma(e)$ в (2) значением в нуле $\sigma(0)$ позволяет аналогично [4] определить непрерывное поле напряжений, хотя модельные соотношения (1) имеют особенность в нуле.

Следствием (1), (2) будут уравнение движения и его решение в форме Даламбера:

$$\begin{gathered}u_{,xx} = \frac{\ddot{u}}{c^2}, \quad c = \begin{cases} a = \sqrt{(\lambda + 2\mu + 2\nu)/\rho}, & u_{,x} < 0,\\ b = \sqrt{(\lambda + 2\mu - 2\nu)/\rho}, & u_{,x} > 0,\end{cases}\\ u(x,t) = f(\zeta) + g(\eta), \quad \zeta(x,t) = x - ct, \quad \eta(x,t) = x + ct,\\ a > b \quad \text{при} \quad \nu > 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Характеристические скорости a и b соответствуют «быстрому» процессу сжатия ($u_{,x} < 0$) и «медленному» процессу растяжения ($u_{,x} > 0$). Конкретный вид функций $f(\zeta)$ и $g(\eta)$ определяется, как обычно, исходной системой краевых и начальных условий задачи, а также условиями на подвижных поверхностях $x = \Sigma(t)$, разделяющих область решения на подобласти. Для нестационарных краевых задач на поверхностях $x = \Sigma(t)$ возможны разрывы первого рода поля скоростей и деформаций. Скорость $\Sigma'(t)$ и разрывы функций $\sigma(e)$ и v связаны между собой условиями совместности [5]:

$$[\sigma] = -\rho_0 \Sigma'(t)[v], \quad [v] = -\Sigma'(t)[u_{,x}]. \tag{4}$$

В (4) $[\sigma] = \sigma^+ - \sigma^-$ — разрыв (скачок) σ на поверхности $x = \Sigma(t)$, где σ^+ и σ^- — значения σ перед $x = \Sigma(t)$ и сразу за ней; скачки v и $u_{,x}$ определены аналогично. Из (2) и (4) следует формула для связи скорости $\Sigma'(t)$ возможной поверхности разрывов с состоянием среды в ее окрестности:

$$\Sigma'(t) = \left\{\rho_0^{-1}\left(\lambda + 2\mu - 2\nu \operatorname{sign}(u_{,x}^-) - 2\nu \cdot [\operatorname{sign}(u_{,x})]\frac{u_{,x}^+}{[u_{,x}]}\right)\right\}^{1/2}. \tag{5}$$

Классификацию возможных разрывов обобщенного решения уравнения движения (3) введем аналогично принятой в [2, 3]. *Полусигнотоном* $x = \gamma(t)$ будем называть плоскую одномерную волну, если $u_{,x}^+ u_{,x}^- = 0$ при $u_{,x}^+ \neq u_{,x}^-$, *простым разрывом* $x = \xi(t)$ — если $u_{,x}^+ \neq 0$ и $u_{,x}^+ u_{,x}^- > 0$. Простой разрыв и полусигнотон, которые распространяются по среде (1) со скоростью a, будем называть быстрыми фронтами $\xi^{\pm a}(t)$, $\gamma^{\pm a}(t)$, со скоростью b — медленными $\xi^{\pm b}(t)$, $\gamma^{\pm b}(t)$. Знаками «+» и «−» у верхних индексов a и b обозначены противоположные направления движения фронтов. В дальнейшем, знак «+» будем опускать. Если в обобщенном решении уравнения движения существует скачок первых производных перемещений и $u_{,x}^+ u_{,x}^- < 0$, то такой сильный разрыв назовем *ударной волной* $x = \Sigma(t)$ со скоростью $\Sigma'(t) = G(t)$. Используя (4) и (5) для модели (1), можно показать, что $b < G(t) < a$ [3, 5]. Следовательно, ударная волна скачком меняет тип деформации с растяжения ($u_{,x}^+ > 0$, $c^+ = b$) на сжатие ($u_{,x}^- < 0$, $c^- = a$). Обратный случай — переход от сжатия к растяжению — невозможен, поскольку такой разрыв не является эволюционным [6]. Простой разрыв $x = \xi(t)$ не изменяет тип деформированного состояния среды. Ударная волна и простой разрыв распространяются только по ненулевому предварительному полю

деформаций $u_{,x}^{+} \neq 0$. Полусигнотон $x = \gamma(t)$ меняет предварительно недеформированную область $u_{,x}^{+} = 0$ на растяжение или сжатие и наоборот. Следует отметить, что быстрый и медленный полусигнотоны могут двигаться парой с образованием жесткого слоя $\gamma^b(t) \leqslant x \leqslant \gamma^a(t)$ между собой [3, 7].

На основе перечисленных свойств плоских одномерных волн проведем анализ возможных волновых картин в одномерной нестационарной краевой задаче о растяжении-сжатии разномодульного упругого полупространства.

Взаимодействие ударной волны с простыми разрывами и полусигнотонами в одномерной задаче деформации разномодульной упругой среды

Рассматриваем полупространство $x \geqslant 0$, занятое средой (1) с границей $x = 0$, недеформированное до момента $t_0 = 0$. В момент $t_0 = 0$ на границе $x = 0$ начинает действовать нагрузка, результатом которой являются следующие граничные перемещения:

$$\begin{gathered} u(0,t) = F(t), \quad F(0) = F(t_3) = 0, \quad F(t)\big|_{0\leqslant t\leqslant t_3} \leqslant 0, \\ F(t)\big|_{t>t_3} > 0, \quad F'(t)\big|_{0\leqslant t\leqslant t_2} < 0, \quad F'(t)\big|_{t\geqslant t_2} > 0. \end{gathered} \tag{6}$$

В (6) $F(t)$ — известная кусочно-гладкая функция (серая линия на рис. 1). Такое краевое условие вызывает начальное динамическое растяжение среды с последующим сжатием [8].

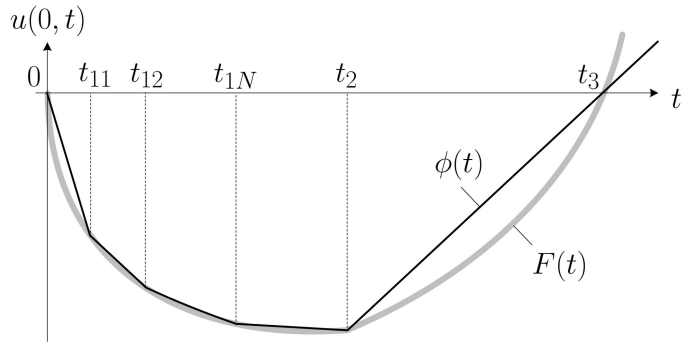

Рис. 1. Перемещение граничных точек полупространства

Заменим функцию $F(t)$ ее непрерывной кусочно-линейной аппроксимацией $\phi(t)$ (черная ломаная линия на рис. 1):

$$\begin{gathered} \phi(t)\big|_{t\in[t_{1(i-1)};t_{1i}]} = y_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, N+2, \\ t_{10} = 0, \quad t_{1(N+1)} = t_2, \quad t_{1(N+2)} = t_3, \\ y_i(t) = k_i t + p_i, \quad k_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{t_{1i} - t_{1(i-1)}}, \quad p_i = \phi_{i-1} - k_i t_{1(i-1)}, \quad \phi_i = F(t_{1i}). \end{gathered} \tag{7}$$

Для участка $F(t)$ между $t_{10} = 0$ и $t_{1(N+1)} = t_2$, как следует из (7), выбираем дополнительно N внутренних узловых точек (значение N задаем, исходя из требуемой точности аппроксимации). При решении задачи число узловых точек N остается неизменным. Для участка $t \geqslant t_2$ используем линейную аппроксимацию $F(t)$ на основе ее значений в узлах t_2 и t_3, что не является принципиальным ограничением. При таком выборе в области сжатия не возникает дополнительных быстрых простых волн

от границы $x = 0$, что позволяет несколько сократить изложение. Ранее [2] авторами рассматривался наиболее простой вариант краевого условия в виде трехзвенной ломаной (количество дополнительных внутренних узлов $N = 1$).

В результате замены условия (6) соотношениями (7) появляется возможность построить решение для поля перемещений $u(x,t)$ в кусочно-линейной форме для всей области среды, куда распространился процесс деформирования, с учетом необходимого деления на подобласти. В [2] было показано, что в результате воздействия (7) при $0 \leqslant t < t_2$ от границы $x = 0$ последовательно отделяются полусигнотон γ_1^b (перед ним находится область 0, где среда покоится) и система простых разрывов ξ_i^b, $t = t_{1i}$, $i = 1, 2 \ldots, N$ (рис. 2). Область между γ_1^b и ξ_1^b обозначена I_1 (рис. 2), между ξ_1^b и ξ_N^b находятся области I_i, за ξ_N^b — область I_{N+1}. Во всех этих областях происходит растяжение, постоянная деформация растяжения $u_{,x} = \mathrm{const}$ меняется скачком на полусигнотоне γ_1^b и простых разрывах ξ_i^b. Таким образом, для перемещений $u_{(i)}^{\mathrm{I}}$ в областях I_i $(i = 1, 2, \ldots, N+1)$ с учетом (7) нетрудно получить решение на начальном этапе $t < t_2$:

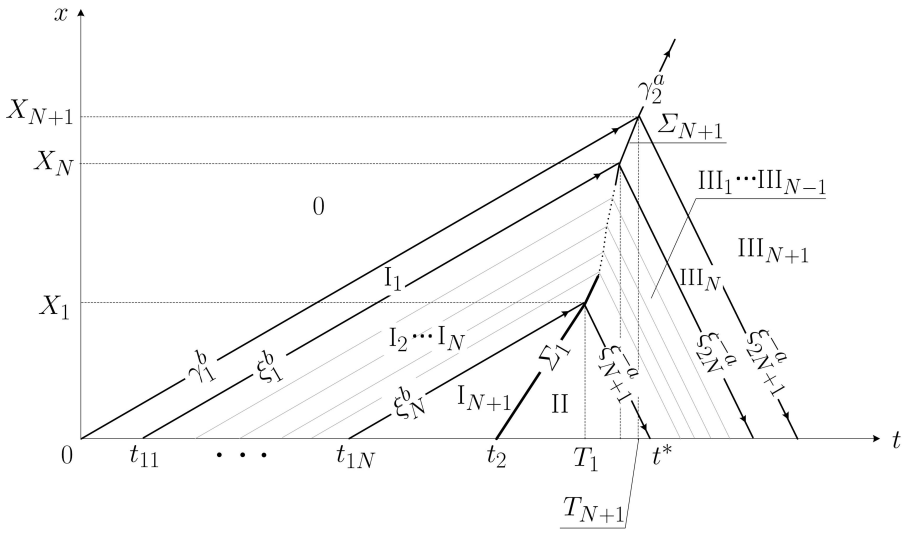

Рис. 2. Диаграмма ударных волн, простых разрывов и полусигнотонов

$$
\begin{gathered}
u_{(i)}^{\mathrm{I}}(x,t)|_{l_{i+1} \leqslant x \leqslant l_i} = A_i + B_i(t - t_{1(i-1)}) + C_i x, \\
A_i = p_i, \quad B_i = k_i, \quad C_i = -k_i/b, \\
l_1(t) = \gamma_1^b(t), \quad l_{i+1}(t) = \xi_i^b(t), \quad l_{N+2}(t) = 0, \\
\gamma_1^b(t) = bt, \quad \xi_i^b(t) = b(t - t_{1i}), \quad t_{10} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N+1.
\end{gathered} \tag{8}
$$

В момент $t = t_2$ на границе $x = 0$ происходит скачкообразный переход от растягивающих к сжимающим усилиям и мгновенное образование ударной волны Σ_1 [8]. За Σ_1 (область II на рис. 2) среда переходит в сжатое состояние. Ранее [2] было показано, что кусочно-линейный закон (7) приводит к постоянной скорости $\Sigma_1' = G_1$:

$$
\begin{gathered}
G_1 = \left\{ a^2 - (a^2 - b^2) \frac{k_{N+1}/b}{k_{N+1}/b - R/a} \right\}^{1/2}, \quad b < G_1 < a, \\
R = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) k_{N+1} + \frac{1}{2} \sqrt{ \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 k_{N+1}^2 - 4k_{N+2}(2k_{N+1} - k_{N+2}) }
\end{gathered} \tag{9}
$$

На основе (3), (7) и (9) для перемещений в области II получим

$$
\begin{gathered}
u^{\mathrm{II}}(x,t)|_{0 \leqslant x \leqslant \Sigma_1(t)} = A_{N+2} + B_{N+2}(t - t_2) + C_{N+2}x, \\
A_{N+2} = k_{N+2}t_2 + p_{N+2}, \quad B_{N+2} = k_{N+2}(1 - G_1/b) + G_1 R/a, \\
C_{N+2} = -R/a, \quad \Sigma_1(t) = G_1(t - t_2).
\end{gathered} \tag{10}
$$

Решение перед Σ_1 продолжает определяться согласно (7), за Σ_1 — согласно (10) до момента времени $t = T_1 = (bt_{1N} - G_1 t_2)/(b - G_1)$, когда ударная волна Σ_1 догонит «ближайший» к ней простой разрыв ξ_N^b. При этом исчезает область I_{N+1} и решение $u^{\mathrm{I}}_{(N+1)}$. Столкновение Σ_1 и ξ_N^b происходит при $x = X_1 = G_1(T_1 - t_2)$. Его результатом будет образование двух новых волновых фронтов, расходящихся от $x = X_1$ при $t \geqslant T_1$ в обе стороны: бытрый простой разрыв ξ_{N+1}^{-a} идет к границе $x = 0$, ударная волна Σ_2 со скоростью $G_2 \neq G_1$ — в сторону бегущего впереди нее пакета медленных простых разрывов. Между Σ_2 и ξ_{N+1}^{-a} появляется новая область сжатия III_1 (рис. 2), состояние внутри которой, как и ранее в области II, определяется взаимодействием между собой предварительного растяжения и последующего сжатия. Этот эффект отличает разномодульную среду [1] от линейной упругой среды, где каждый из участков условия (7) последовательно передавал бы в полупространство собственные значения деформации, не связанные друг с другом. Если сжатие на границе продолжается по линейному закону, то ударная волна Σ_2 догонит в момент времени $t = T_2$ следующий медленный простой разрыв ξ_{N-1}^b. Вновь появляются два новых волновых фронта — ударная волна Σ_3 и быстрый простой разрыв ξ_{N+2}^{-a}, расходящихся от $x = X_2$ в противоположные стороны. Так продолжается до тех пор, пока ударная волна Σ_{N+1} не догонит медленный полусигнотон γ_1^b. В этом случае в момент времени $t = T_{N+1}$ от $x = X_{N+1}$ расходятся в разные стороны быстрый полусигнотон γ_2^a и быстрый простой разрыв ξ_{2N+1}^{-a} (рис. 2). Таким образом, ударная волна с постоянно эволюционирующим фронтом Σ_i (за счет изменения ее скорости G_i) «уничтожает» одну за другой области растяжения I_i и выходит в недеформированную часть полупространства. В результате такого попутного столкновения Σ_i с ξ_{N-i+1}^b и Σ_{N+1} с γ_1^b соответствующие области растяжения I_i перестают существовать, а области сжатия III_i $(i = 1, 2, \ldots, N+1)$ появляются. Для скоростей G_i из (5) с учетом (3), (7) получим формулу, более простую для применения, чем (9):

$$
\begin{gathered}
G_i = a - \frac{k_{N+2-i}(a^2 - b^2)}{k_{N+2-i}(a + b) - b(k_{N+2} + R)} = \mathrm{const}, \\
b < G_i < a, \quad i = 2, 3, \ldots, N+1.
\end{gathered} \tag{11}
$$

Из (11) следует, что значения скоростей G_i можно вычислить сразу, как только определены краевые условия (7). Перемещения в возникших областях III_i имеют вид:

$$
\begin{gathered}
u^{\mathrm{III}}_{(1)}(x,t)|_{\xi^{-a}_{N+1}(t)\leqslant x\leqslant\Sigma_2(t)} = A_{N+3} + B_{N+3}(t-T_1) + C_{N+3}x,\\
u^{\mathrm{III}}_{(i+1)}(x,t)|_{\xi^{-a}_{N+1+i}(t)\leqslant x\leqslant\Sigma_{i+2}(t)} = A_{N+3+i} + B_{N+3+i}(t-T_{i+1}) + C_{N+3+i}x,\\
u^{\mathrm{III}}_{(2N+3)}(x,t)|_{\xi^{-a}_{2N+1}(t)\leqslant x\leqslant\gamma^{a}_{2}(t)} = A_{2N+3} + B_{2N+3}(t-T_{N+1}) + C_{2N+3}x,\\
A_{N+3} = k_N t_{1N} - p_N + C_{N+3}X_1,\\
B_{N+3} = \frac{b(k_{N+3}+R)G_2 + ak_N(b-G_2)}{b(a+G_2)},\\
C_{N+3} = \frac{k_N(b-G_2) - b(k_{N+2}+R)}{b(a+G_2)},\\
A_{N+3+i} = A_{N+2+i} + B_{N+3+i}(T_{i+1}-T_i) + X_i(C_{N+2+i} - C_{N+3+i}),\\
B_{N+3+i} = B_{N+2+i} - a(C_{N+2+i} - C_{N+3+i}),\\
C_{N+3+i} = \frac{aC_{N+2+i} - B_{N+2+i} + (b-G_{i+2})k_{N-i}/b}{a+G_{i+2}},\\
A_{2N+3} = A_{2N+2} + B_{2N+2}(T_{N+1} - T_N + X_{N+1}/(2a)) + X_{N+1}C_{2N+2}/2,\\
B_{2N+3} = (B_{2N+2} - aC_{2N+2})/2,\\
C_{2N+3} = (aC_{2N+2} - B_{2N+2})/(2a),\\
T_{i+1} = \frac{X_i + bt_{1(N-i)} - G_{i+1}T_i}{b-G_{i+1}}, \quad X_{i+1} = X_i + G_{i+1}(T_{i+1}-T_i),\\
T_{N+1} = \frac{X_N - G_{N+1}T_N}{b-G_{N+1}}, \quad X_{N+1} = X_N + G_{N+1}(T_{N+1}-T_N),\\
\xi^{-a}_{N+1}(t) = X_1 - a(t-T_1), \quad \Sigma_2(t) = X_1 + G_2(t-T_1),\\
\xi^{-a}_{N+1+i}(t) = X_{i+1} - a(t-T_{i+1}), \quad \Sigma_{i+2}(t) = X_{i+1} + G_{i+2}(t-T_{i+1}),\\
\xi^{-a}_{2N+1}(t) = X_{N+1} - a(t-T_{N+1}), \quad i = 1\ldots N-1.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Решение в области за Σ_1 продолжает вычисляться согласно (10). Таким образом, перемещения в каждой новой области можно получить только с учетом решений в появившихся ранее областях.

Важно отметить, что до сих пор говорилось только о взаимодействии ударной волны $\Sigma_i(t)$ с медленными разрывами ξ^b_i перед ней и не упоминалось, что в общем случае отраженные при каждом таком взаимодействии быстрые разрывы ξ^{-a}_{N+i} с момента времени $t^* = X_1/a - T_1$ достигают границы $x = 0$ и отражаются от нее уже как ξ^a_{2N+1+i}. Таким образом, позади ударной волны создается область сжатия, где происходит взаимодействие приходящих (ξ^{-a}_{N+i}) и отраженных (ξ^a_{2N+1+i}) от границы $x = 0$ быстрых простых разрывов, в том числе, ξ^a_{2N+1+i} могут догнать ударную волну сзади. С целью уменьшить объем изложения ограничимся временами $t \leqslant T_{N+1} < t^*$, не рассматривая эффекты взаимодействия быстрых простых разрывов между собой и с ударной волной. Записывая неравенство $t^* > T_{N+1}$ с учетом $X_1 = G_1(T_1 - t_2)$, $T_1 = (bt_{1N} - G_1t_2)/(b-G_1)$, получим

$$
\frac{b(1+G_1/a)t_{1N} - G_1(1+b/a)t_2}{b-G_1} > T_{N+1}. \tag{13}
$$

Левая часть неравенства (13) нелинейным образом зависит от t_{1N}, поскольку G_1 тоже функция от t_{1N}. Значение $t = t_{1N}$ задается при замене гладкой функции $F(t)$ ее непрерывной кусочно-линейной аппроксимацией $\phi(t)$. Положение точки t_{1N} (рис. 2) существенно влияет на ход дальнейшего решения, поэтому нам необходимо получить некоторые критерии по ее выбору. Так, полагая $t_{1N} = t_{12}$, $t_{11} = t_{12}/2$ (т.е. ограничивая количество внутренних узлов аппроксимации $N = 2$), можем записать неравенство (13) в виде

$$\frac{b(1 + G_1/a)t_{12} - G_1(1 + b/a)t_2}{b - G_1} > T_3, \tag{14}$$

где с учетом (9) и (11)

$$T_3 = \frac{X_2 + bt_0 - aT_2}{b - a}, \quad T_2 = \frac{X_1 + bt_{11} - G_2T_1}{b - G_2}, \quad T_1 = \frac{bt_{12} - G_1t_2}{b - G_1},$$

$$X_1 = G_1(T_1 - t_2), \quad X_2 = X_1 + G_2(T_2 - T_1),$$

$$G_1 = \left(a^2 - \frac{(a^2 - b^2)k_3/b}{k_3/b - R/a}\right)^{1/2}, \quad G_2 = a - \frac{(a^2 - b^2)k_2}{k_2(a + b) - b(k_4 + R)},$$

$$R = (a/b + b/a)k_3 + \sqrt{(a/b + b/a)^2k_3^2 - 4k_4(2k_3 - k_4)}.$$

Неравенство (14) позволяет на интервале $(0; t_2)$ найти для значения $t_{1N} = t_{12}$ ограничение сверху $\tilde{t}$, такое что при $0 < t_{1N} < \tilde{t}$ отраженные от границы разномодульного полупространства простые разрывы не успевают догнать ударную волну прежде, чем произойдет ее попутное столкновение с передним фронтом растяжения γ_1^b и выход в недеформированную область 0 (рис. 2). Значение $\tilde{t}$ находим из неявного уравнения, полученного приравниванием левой и правой части неравенства (14) с заменой t_{12} на $\tilde{t}$. Заметим, что значение $\tilde{t}$ не зависит от заданного количества узловых точек разбиения N и определяется исключительно угловыми коэффициентами $k_N(t_{1(N-1)}, t_{1N})$, $k_{N+1}(t_{1N}, t_{1(N+1)})$ отрезков y_N и y_{N+1} аппроксимирующей функции $\phi(t)$ (в формуле (14) это $k_2(t_{11}, t_{12})$, $k_3(t_{12}, t_2)$). Таким образом, выбирая $t_{1N} < \tilde{t}$, получаем решение задачи без взаимодействия ударной волны с отраженными от границы $x = 0$ простыми разрывами, а при $t_{1N} \geqslant \tilde{t}$ — с учетом таких взаимодействий.

Множество постоянных значений скоростей G_i $(i = 1, 2, \ldots, N+1)$, построенное из (9), (11) для случая $t_{1N} < \tilde{t}$, схематически показано на рис. 3. Отметим, что дискретные значения G_i не лежат на одной прямой даже при постоянном шаге разбиения отрезка $[t_1; t_{1N}]$. Кроме того, при выборе точки $t_{1N} < \tilde{t}$ скорость ударной волны монотонно убывает $(b < G_{N+1} < G_N < \ldots < G_1 < a)$, т.е. взаимодействие ударной волны с медленными простыми разрывами ξ_i^b приводит к ее торможению. И наоборот, если принять $t_{1N} \geqslant \tilde{t}$, то набегающие сзади на ударную волну отраженные от границы $x = 0$ быстрые фронты сжатия ξ_{2N+1+i}^a с некоторого момента времени разгоняют ее.

На рис. 4 изображена последовательность мгновенных кусочно-линейных диаграмм перемещений u и деформаций $u_{,x}$, соответствующих полученным решениям (8)–(12). Диаграммы построены для различных моментов времени: (а) $t_{11} < \tau < t_{12}$, (б) $t_{1N} < \tau < t_2$, (в) $t_2 < \tau < T_1$, (г) $T_1 < \tau < T_2$, (д) $T_N < \tau < T_{N+1}$, (е) $t_{11} > T_{N+1}$; горизонтальная ось нормирована: (а), (б) $z = x/(b\tau)$, (в) $z = x/(G_1\tau)$, (г)–(е) $z = x/(a\tau)$.

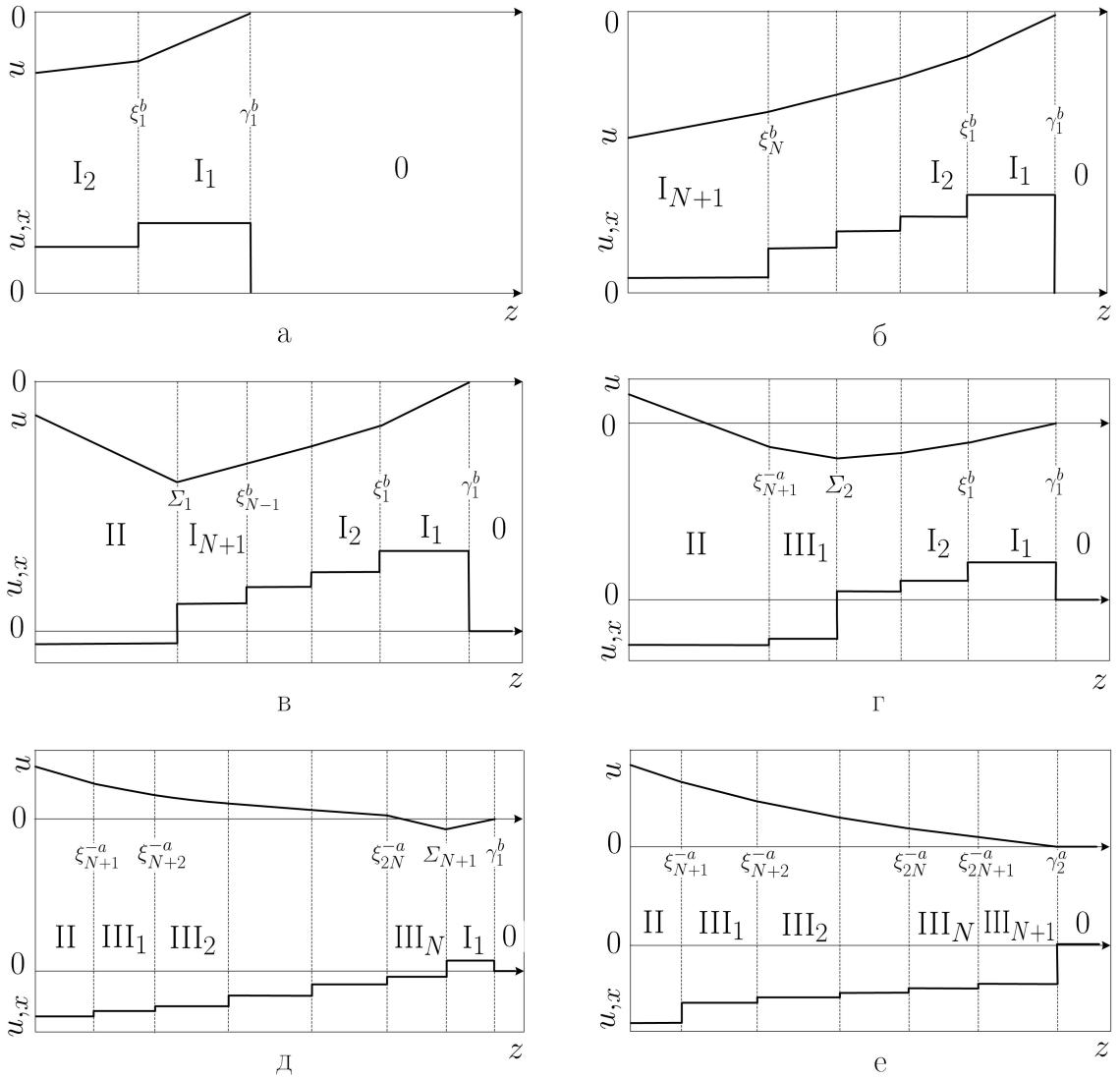

Рис. 3. Диаграммы перемещений и деформаций

Заключение

Из представленных в работе расчетов следует, что физическая нелинейность модели [1] не только сохраняется при кусочно-линейной постановке краевых условий, но и проявляется весьма существенно, если параметр разномодульности ν сопоставим со значениями параметров Ламе. Таким образом, показано, что кусочно-линейная аппроксимация краевых условий позволяет решать достаточно большое количество задач одномерной динамики разномодульных сред, где малый характер деформаций определяет простоту аналитического решения в каждой из областей. Более того, указанные ограничения и особенности выбора узловых точек аппроксимирующей функции позволяют «включать» или «выключать» эффекты взаимодействия ударной волны с фронтами определенного типа и направления, тем самым изменяя (и, надеемся,

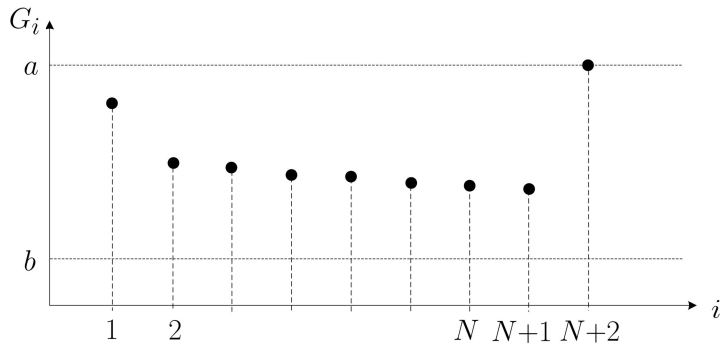

Рис. 4. Распределение скоростей ударных волн в зависимости от номера фронта

упрощая) ход решения конкретной краевой задачи. Одновременно можно предполагать, что такой подход может быть приемлем и для других физически нелинейных сред и процессов деформирования.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ляховский В. А., Мясников В. П. О поведении упругой среды с микронарушениями // Известия АН СССР. Физика Земли. 1984. № 10. С. 71–75.

[2] Дудко О. В., Лаптева А. А., Рагозина В. Е. Нестационарные одномерные динамические задачи разномодульной упругости с кусочно-линейной аппроксимацией краевых условий // Вестник ПНИПУ. 2019. № 4. С. 5–15.

[3] Маслов В. П., Мосолов П. П. Общая теория уравнений движения разномодульной упругой среды // Прикладная математика и механика. 1985. № 49(3). С. 419–437.

[4] Мясников В. П., Олейников А. И. Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред. Владивосток: Дальнаука, 2007. 172 с.

[5] Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М: Мир, 1972. 183 с.

[6] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. М: Московский лицей, 1998. 412 с.

[7] Gavrilov S. N., Herman G. C. Wave propagation in a semi-infinite heteromodular elastic bar subjected to a harmonic loading // Journal of Sound and Vibration. 2012. № 331(20). С. 4464–4480.

[8] Дудко О. В., Лаптева А. А., Семенов К. Т. О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // Дальневосточный математический журнал. 2005. № 6(1-2). С. 94–105.

Anastasia A. Lapteva, Victoria E. Ragozina, Olga V. Dudko

PIECEWISE LINEAR APPROXIMATION OF BOUNDARY CONDITIONS AND SOLUTIONS IN PROBLEMS OF 1D NONSTATIONARY DYNAMICS OF HETEROMODULAR ELASTIC MEDIA

Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the RAS, Vladivostok, Russia

Abstract. The one-dimensional deformation dynamics in an elastic heteromodular medium under nonstationary boundary loading in the «tension and compression» mode is considered. The features of constructing a piecewise linear approximation of a nonlinear boundary condition are investigated. A selection criterion for the nodal partition points of the approximating function is indicated; it allows us to control the modes of collision between wave fronts of all types when the boundary value problem is solved. An iterative formula for the change in the shock wave velocity as a result of its collision with slow fronts of preliminary tension is obtained; the iterative relations for constructing the displacement field at all stages of deformation are written.

Keywords: elasticity, heteromodular medium, nonstationary deformation, one-dimensional motion, collision of waves, plane waves, piecewise linear approximation.

REFERENCES

[1] Myasnikov V. P., Lyakhovsky V. A. On the behavior of elastic cracked solid // Izvestiya of the Academy of Sciences of the USSR. Physics of the Solid Earth. 1984. № 10. С. 71–75. (in Russian).

[2] Dudko O. V., Lapteva A. A., Ragozina V. E. Nonstationary 1D Dynamics Problems for Heteromodular Elasticity with Piecewise-Linear Approximation of Boundary Conditions // PNRPU Mechanics Bulletin. 2019. № 4. С. 5–15. (in Russian).

[3] Maslov V. P., Mosolov P. P. General theory of equations of motion of the elastic multimodulus medium // Journal of applied mathematics and mechanics. 1985. № 49(3). С. 419–437. (in Russian).

[4] Myasnikov V. P., Oleinikov A. I. Fundamentals of Mechanics of Heteromodular Media. Vladivostok: Dal'nauka, 2007. 172 p. (in Russian).

[5] Blend D. Nonlinear dynamic theory of elasticity. Moscow: Mir, 1972. 183 p. (in Russian).

[6] Kulikovskii A. G., Sveshnikova E. I. Nonlinear Waves in Elastic Media. Boca Raton, FL: CRC Press, 1998. 412 p.

[7] Gavrilov S. N., Herman G. C. Wave propagation in a semi-infinite heteromodular elastic bar subjected to a harmonic loading // Journal of Sound and Vibration. 2012. № 331(20). С. 4464–4480.

[8] Dudko O. V., Lapteva A. A., Semenov K. T. About distribution of plane one-dimensional waves and their interaction with wall in the media, different resistance to tension and compressionлн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // Far Eastern Mathematical Journal. 2005. № 6(1-2). С. 94–105. (in Russian).

Lapteva Anastasia Alexandrovna, PhD in Physical & Mathematical Sciences, Junior Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the RAS, Vladivostok, Russia.

Ragozina Victoria Evgenievna, PhD in Physical & Mathematical Sciences, Senior Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the RAS, Vladivostok, Russia.

Dudko Olga Vladimirovna, PhD in Physical & Mathematical Sciences, Leading Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the RAS, Vladivostok, Russia.