

Ю. В. Астапов, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич

## ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КОНИЧЕСКОГО ИНДЕНТОРА С УПРУГИМ ЦИЛИНДРОМ

*Тульский государственный университет, г. Тула, Россия*

**Аннотация.** В данной работе исследуется поведение эластомера при взаимодействии с жестким штампом, вершина которого имеет форму конуса. В качестве определяющих соотношений используются модель материала Генки и ее обобщение для описания физически-нелинейного отклика. Проведено сравнение результатов численного решения с кривыми, полученными из рассмотрения поставленной задачи в рамках линейной модели с использованием теории Герца. В работах [10, 11] показана принципиальная возможность определения параметров модели гиперупругости на основе определяющих соотношений Генки-Мурнагана из экспериментов по индентированию сферическим штампом. Результаты, полученные в данной работе, могут быть использованы для построения методики определения параметров нелинейно-упругой модели из экспериментов по индентированию коническим штампом.

**Ключевые слова:** конечные деформации, тензор Генки, модель Генки-Мурнагана, индентирование, конический индентор, определяющие соотношения, метод конечных элементов

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.002

УДК: 539.3

**Введение.** В статье построена численная модель процесса индентирования слабо-сжимаемого нелинейно упругого цилиндрического тела из резиноподобного материала коническим индентором, рассматриваемым как абсолютно твердое тело. Задача относится к классу контактных задач с переменной зоной контакта. Известно [1–3],

---

© Астапов Ю. В., Соколова М. Ю., Христич Д. В., 2020

*Астапов Юрий Владимирович*

e-mail: ast3x3@gmail.com,

аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

*Соколова Марина Юрьевна*

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com,

доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

*Христич Дмитрий Викторович*

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru,

доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Исследование выполнено при поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МД-1803.2019.1)

Поступила 10.08.2020

что общая вариационная постановка контактной задачи, относящаяся к классу задач с ограничениями в виде неравенств, может быть представлена в форме квазивариационного неравенства. В работах А.С. Кравчука [4, 5] приведены необходимые выкладки, обосновывающие численное решение упругих и упругопластических задач в квазивариационной постановке с использованием модификации итерационного алгоритма Удзавы для поиска седловой точки соответствующего функционала. Существует множество подходов, реализующих численное решение краевой задачи конечного деформирования твердого тела с учетом механического взаимодействия. Обычно используется сеточная дискретизация расчетной области в рамках метода конечных элементов [2, 6–8]. Одной из основных проблем при использовании сеточных методов является определение пар взаимодействующих поверхностей контактирующих тел. В данной статье вариационная постановка задачи основывается на использовании условия равновесного протекания процесса, предложенного в работах Маркина А.А. [9]. Задача об изменении зоны контакта деформируемого материала с жестким индентором решается на уровне алгоритма, предложенного в работах [10, 11]. Для описания конечных деформаций цилиндрического тела используется модель Генки-Мурнагана, предложенная в работах [11, 12].

**Постановка задачи** подробно изложена в статье [10] и включает в себя:

1) определяющие соотношения модели Генки-Мурнагана, связывающие обобщенный «повернутый» тензор напряжений  $\Sigma_{\mathbf{R}} = \frac{dV}{dV_0} \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}^{-1}$  и тензор логарифмических деформаций Генки  $\mathbf{\Gamma}$ :

$$\Sigma_{\mathbf{R}} = \sigma_0 \mathbf{E} + \tau_e \tilde{\mathbf{\Gamma}} + \tau_q \mathbf{Q}, \quad (1)$$

где  $\sigma_0$ ,  $\tau_e$ ,  $\tau_q$  – функции инвариантов меры деформации:  $\theta$  – относительного изменения объема и  $e = \sqrt{\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma}}$  – интенсивности формоизменения, определенные следующим образом:  $\sigma_0 = K\theta + \frac{C_1}{6\sqrt{3}}\theta^2 + \frac{C_2}{6\sqrt{3}}e^2$ ,  $\tau_e = 2G + \frac{C_2}{3\sqrt{3}}\theta$ ,  $\tau_q = C_3$ . Тензор  $\tilde{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Gamma} - \frac{1}{3}\theta\mathbf{E}$  – дивидатор тензора логарифмических деформаций, а тензор  $\mathbf{Q}$  определяется как дивидатор тензора  $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^2$ ;

2) кинематические соотношения, определяющие тензор логарифмических деформаций  $\mathbf{\Gamma}$  через аффинор деформаций  $\mathbf{\Phi}$  и его симметричную составляющую  $\mathbf{U}$  в полярном разложении  $\mathbf{\Phi} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}$ :

$$\mathbf{\Gamma} = \ln \mathbf{U}; \quad (2)$$

3) условия равновесного протекания процесса деформирования в вариационной форме [9]

$$\int_V \left( \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{S}\dot{\theta} - \mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{S} \right) \cdot \delta(\mathbf{v}\nabla) dV = \int_{\Sigma} \left( \dot{\mathbf{P}}^{(n)} + \mathbf{P}^{(n)} \left( \dot{\theta} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \right) \right) \cdot \delta\mathbf{v} d\Sigma, \quad (3)$$

где  $\mathbf{S}$  – тензор истинных напряжений Коши,  $\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla)$  – тензор деформации скорости,  $\mathbf{P}^{(n)}$  и  $\dot{\mathbf{P}}^{(n)}$  – поверхностная нагрузка и скорость ее изменения соответственно;

4) начальные условия определяют в начальный момент времени перемещения и напряжения:

$$\mathbf{S}|_{t=0} = 0, \mathbf{u}|_{t=0} = 0; \quad (4)$$

5) граничные условия, задающие на части поверхности тела нагрузку, а на части поверхности – перемещения:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Sigma_P, \quad \forall t > t_0, \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Sigma_u, \quad \forall t > t_0. \quad (6)$$

Уравнения (1) - (3) с условиями (4) - (6) составляют систему уравнений, которая решается численными методами конечных элементов и пошагового нагружения.

**Учет переменной зоны контакта.** В общем случае зона контакта деформируемого тела с жесткой преградой  $\Sigma_c$  переменна и подлежит определению. Форма абсолютно жесткой матрицы может быть задана кусочно-гладкой поверхностью в параметрическом виде  $\psi(r, z) : r = r(\xi), z = z(\xi)$ , где  $\xi \in [\xi_0, \xi_1]$  – монотонный параметр, причем  $\psi(r, z) < 0$ , если точка  $(r, z)$  находится внутри поверхности матрицы,  $\psi(r, z) > 0$ , если точка  $(r, z)$  находится с внешней стороны поверхности матрицы и  $\psi(r, z) = 0$  на поверхности.

На поверхности взаимодействия  $\Sigma_c$  могут быть заданы следующие условия:

- условие полного прилипания:

$$\mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{r} \in \Sigma_c, \quad (7)$$

- условие свободного скольжения:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad \forall \mathbf{r} \in \Sigma_c, \quad (8)$$

где  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$  – вектор контактного давления,  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  – соответственно внешняя нормаль и касательная к кривой  $\psi$ .

Для всех точек упругого тела, занимающего объем  $V$ , должно выполняться условие взаимного непроникновения с жесткой матрицей:

$$\psi(r_M, z_M) > 0, \quad \forall M \in V \quad (9)$$

На границе контакта  $\Sigma_c$  упругого тела и жесткой матрицы принимается условие неотрицательности нормальных реакций:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \geq 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \Sigma_c. \quad (10)$$

Для отслеживания изменения зоны  $\Sigma_c$  и корректного задания граничных условий на ней используется процедура, дополняющая процедуру пошагового нагружения. На внешней стороне штампа вводится полоса достаточно малой по сравнению с характерным размером элемента ширины  $\varepsilon$ , как показано на рисунке 1. На начало шага нагружения для всех контактных узлов, то есть узлов, попавших в зону  $\varepsilon$ , задается условие полного прилипания (7). Далее производится решение краевой задачи.

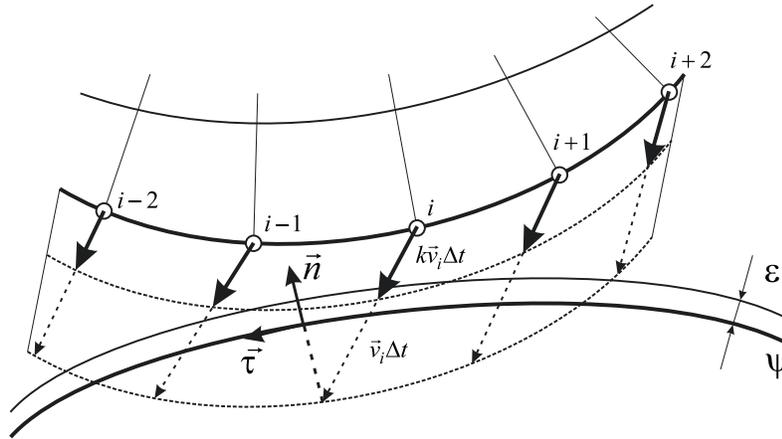


Рис. 1. Схема учета изменяющейся зоны контакта

После этого условия (9) и (10) проверяются для всех граничных узлов сетки. Если хотя бы для одного узла одно из условий не выполняется, шаг интегрирования уменьшается, и интегрирование производится повторно. Цикл продолжается до тех пор, пока для всех узлов не будут удовлетворены условия (9) и (10). После этого производится проверка всех узлов границы, и узлы, попавшие в полосу  $\varepsilon$ , считаются контактными. Для них задаются кинематические ограничения (7) или (8). Для каждого элемента, узлы которого считаются контактными, вычисляются текущие величины реакции штампа  $\sigma$ . Если в каком-либо элементе на границе условие (10) не выполняется, то на его контактном ребре задается касательная нагрузка  $\sigma_{\tau} = -\mu |\sigma_n| \frac{(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau}}{|\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}|}$ , а контактирующие узлы полагаются свободно-скользящими. Блок-схема описанной процедуры приведена на рисунке 2.

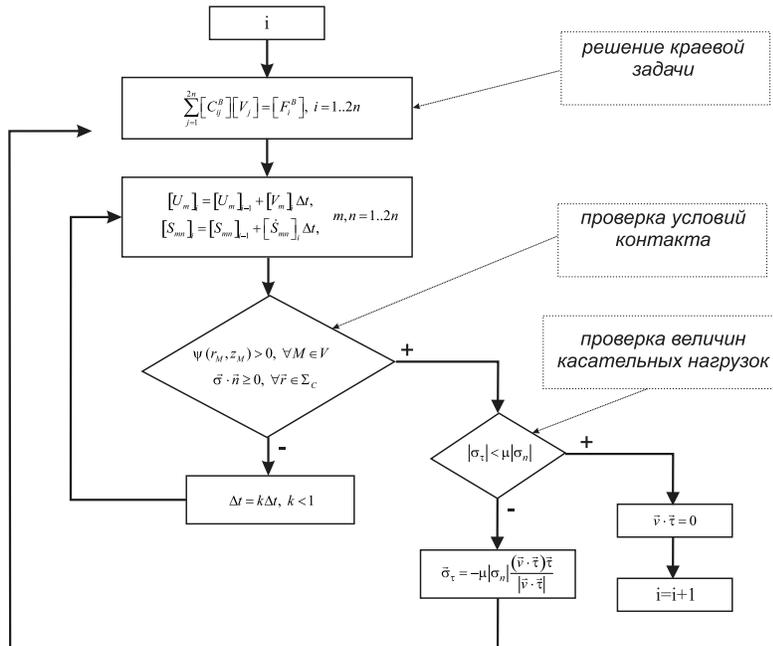


Рис. 2. Блок-схема процедуры дробления шага интегрирования и учета граничных условий

Процедура, описанная блок-схемой, необходима для определения значения параметра дробления  $k$  шага нагружения  $\Delta t$ , при котором условия (9) и (10) выполняются для всех контактных узлов сетки. Работа алгоритма была отработана и проверена на задачах, имеющих аналитическое решение [10, 13, 14].

**Результаты решения задачи об индентировании упругого цилиндра коническим индентором.** Индентированием называют процесс осесимметричного взаимодействия деформируемого тела с жесткой матрицей, имеющей вершину специальной формы. Схема нагружения, описывающая индентирование конической матрицей, показана на рисунке 3. Произведены расчеты для различных углов раствора индентора  $\beta$ . Граничные и начальные условия для этой схемы нагружения также приведены на рисунке 3.

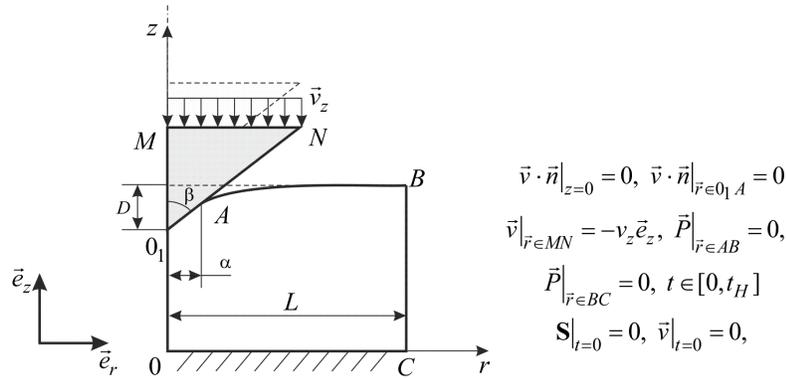


Рис. 3. Расчетная схема задачи о взаимодействии конической матрицы с основанием цилиндра

В статье [15] приведено решение этой задачи для случая малых деформаций. Зависимость главного вектора усилия  $P$  от осадки  $D$  имеет вид:

$$P(D) = \frac{8D^2 E}{3\pi c t g \beta}. \quad (11)$$

Зависимость радиуса области контакта  $\alpha$  от главного вектора приложенной нагрузки  $P$  имеет вид:

$$\alpha(P) = \sqrt{\frac{2P(1-\nu^2)}{\pi E c t g \beta}}. \quad (12)$$

Распределение величины контактных напряжений  $\sigma_n$  в зоне контакта  $[0, \alpha]$  имеет следующий вид:

$$\sigma_n(r) = \sigma_0 \ln \left( \frac{\alpha}{r} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 - 1} \right), \quad \sigma_0 = \frac{ED}{\pi \alpha (1-\nu^2)}, \quad r \in [0, \alpha]. \quad (13)$$

В данной статье расчеты проводились для материала, механические характеристики которого в рамках модели Генки-Мурнагана определяются следующими значениями констант:  $E = 2$  МПа,  $\nu = 0,499$ ,  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ ,  $C_3 = -50$  МПа. Основные результаты расчетов приведены на рисунках 4-6. На рисунке 4 приведены распределения нормального контактного давления  $\sigma_n$ , вычисленного по формуле (13), для различных значений действующего главного вектора нагрузки  $P$  при взаимодействии с индентором с углом  $\beta = 80^\circ$ .

Кривые распределения давлений показывают, что при малых деформациях численная модель дает удовлетворительное совпадение с аналитическим решением, что, в первую очередь, подтверждает работоспособность предложенного алгоритма учета граничных условий. С ростом приложенного усилия деформации увеличиваются, и между аналитическим и численным решениями возникают отклонения, связанные с тем, что в численной модели учитывается геометрическая и физическая нелинейность в поведении деформируемого цилиндра. Учет нелинейности деформирования вносит поправки в вычисления нормального давления на матрицу, не превышающие 10%.

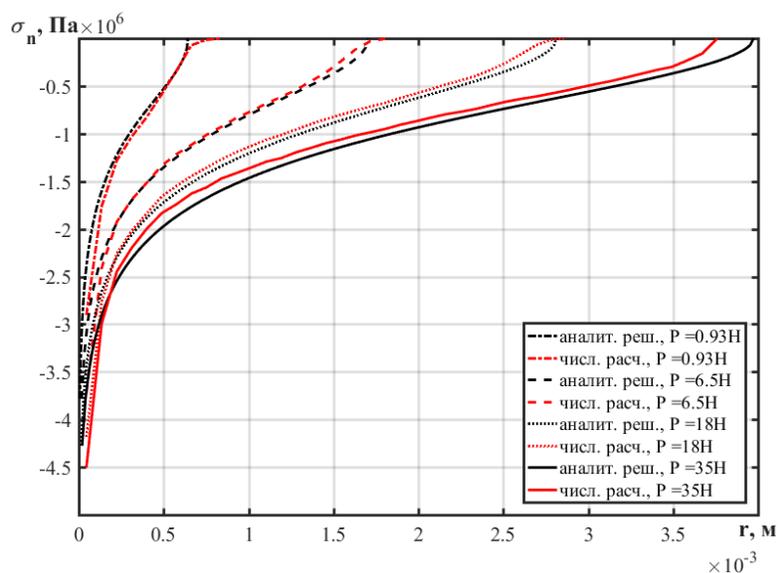


Рис. 4. Распределение давления  $\sigma_n$  на границе  $\Sigma_c$  для различных стадий индентирования конической матрицей для  $\beta = 80^\circ$

На рисунке 5 приведены кривые индентирования, представляющие собой зависимость главного усилия  $P$  от осадки  $D$ , для значений угла раствора конического индентора  $\beta = 70^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ , полученные как численно, так и аналитически. С увеличением угла раствора конического индентора усилие возрастает и увеличивается влияние нелинейности модели на результаты расчета.

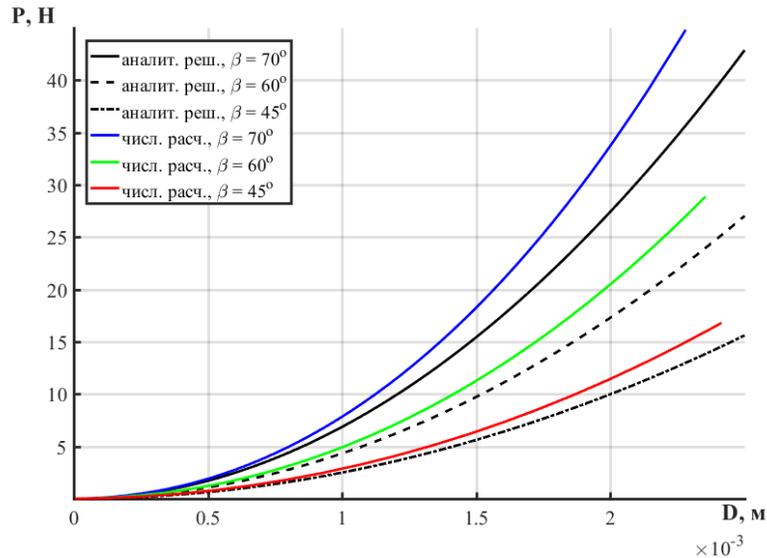


Рис. 5. Зависимость главного вектора усилия  $P$  от величины осадки конической матрицы  $D$

Конечно-элементная модель позволяет получить не только интегральные характеристики процесса индентирования (рисунки 4 и 5), но и проанализировать распределение напряжений в деформируемом теле. На рисунке 6 приведены поля компонент тензора истинных напряжений Коши в цилиндре радиусом 0,03 м при индентировании его конической матрицей с углом раствора  $60^\circ$ . Графики, приведенные на рисунке 6, показывают, что наибольшие напряжения действуют в очаге напряжений под индентором. В части цилиндра, находящейся под свободной поверхностью, напряжения практически отсутствуют.

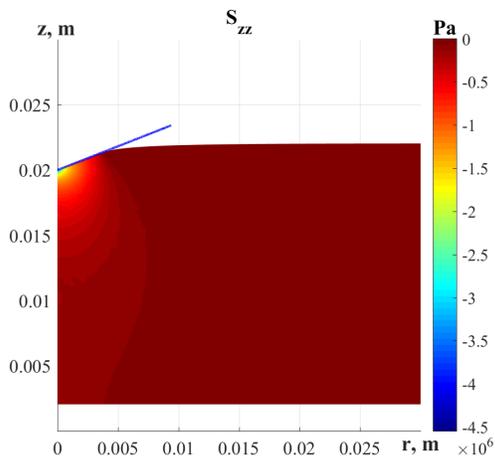


Рис. 6а. Распределение осевых  $S_{zz}$  напряжений в цилиндре при  $P=35\text{Н}$

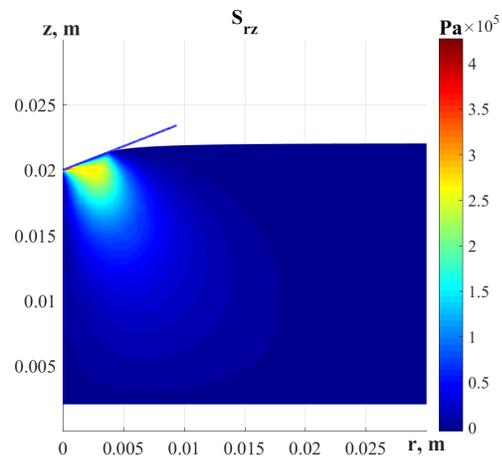


Рис. 6б. Распределение сдвиговых  $S_{rz}$  напряжений в цилиндре при  $P=35\text{Н}$

**Выводы.** Результаты моделирования процесса индентирования упругого цилиндра коническим индентором демонстрируют применимость построенной процедуры учета

смешанных граничных условий контактного типа к решению задач о взаимодействии нелинейно-упругих тел с абсолютно-жесткими матрицами. Модель дает удовлетворительное соответствие результатов аналитическому решению, полученному в [15] для малых деформаций, при относительно небольших значениях усилий. Отклонения, связанные с учетом нелинейности материала и конечности деформаций, в рассмотренной задаче не превышают 10-15%.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бурого Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов // Известия РАН. Механика твердого тела. 2005. № 1. С. 45–87.
- [2] Wriggers P. Finite Element Algorithms for Contact Problems // Archives of Computational Methods in Engineering. 1995. Vol. 2, no. 4. P. 1–49.
- [3] G. Xiaoming Z. R., Yingle S. On the mathematical modeling for elastoplastic contact problem and its solution by quadratic programming // International Journal of Solids and Structures. 2001. Vol. 2. P. 8133–8150.
- [4] Кравчук А.С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // Прикладная математика и механика. 1980. Т. 44, № 1. С. 122–129.
- [5] Кравчук А.С. О решении трехмерных контактных задач с трением // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72, № 3. С. 485–496.
- [6] Z.-Q. Feng F. P., Labed N. Solution of large deformation contact problems with friction between Blatz-Ko hyperelastic bodies // International Journal of Engineering Science. 2003. Vol. 41, no. 1. P. 2213–2225.
- [7] F.J. Cavaleri A. Cardona V. F., Risso J. A finite element formulation for nonlinear 3d contact problems // Mecanica Computacional. Solid Mechanics. 2007. Vol. V. XXVI, no. 16. P. 1357–1372.
- [8] Morev P. A variational statement of quasistatic “rigid-deformable” contact problems at large strain involving generalized forces and friction // Acta Mechanica. 2011. Vol. 222. P. 115–130.
- [9] Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 320 с.
- [10] Астапов Ю.В., Христинич Д.В. Численное и экспериментальное моделирование процесса индентирования резиновых образцов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. Т. 36, № 2. С. 65–73.
- [11] A.A. Markin D.V. Kchristich S., Astapov Y. The physically nonlinear model of an elastic material and its identification // International Journal of Applied Mechanics. 2019. Vol. 11, no. 7. p. 1950064 (13 p.).
- [12] Маркин А.А., Соколова М.Ю. Вариант соотношений нелинейной упругости // Известия РАН. Механика твердого тела. 2019. № 6. С. 68–75.
- [13] Астапов Ю.В., Маркин А.А. Конечные деформации упругих тел при взаимодействии с жесткой шероховатой плоскостью // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. Т. 29, № 3. С. 64–75.
- [14] Астапов Ю.В. Внедрение сферического индентора в основание упругого и гипопругого круговых цилиндров при конечных деформациях // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. Т. 32, № 2. С. 107–116.
- [15] Giannakopoulos A., Panagiotopoulos D. Conical indentation of incompressible rubber-like materials // International Journal of Solids and Structures. 2009. Vol. 46. P. 1436–1447.

*Iu. V. Astapov, M. Iu. Sokolova, D. V. Khristich*

## THE PROBLEM OF THE INTERACTION OF A CONICAL INDENTER WITH AN ELASTIC CYLINDER

*Tula State University, Tula, Russia*

**Abstract.** In this paper, we investigate the behavior of an elastomer when interacting with a rigid punch, the top of which is cone-shaped. Hencky's material model and its generalization to describe the physically nonlinear response are used as the constitutive relations. The results of the numerical solution are compared with the curves obtained from considering the problem in the framework of a linear model using the Hertz theory. The works [10, 11] show the fundamental possibility of determining the parameters of the hyperelasticity model based on the Hencky-Murnaghan constitutive relations from experiments on indentation with a spherical stamp. The results obtained in this work can be used to construct a method for determining the parameters of a nonlinear elastic model from experiments on indentation with a conical stamp.

**Keywords:** finite deformations, Hencky tensor, Hencky-Murnaghan model, indentation, conical indenter, constitutive relations, finite element method.

### REFERENCES

- [1] Bourago N.G., Kukudzhanov V.N. A review of contact algorithms // Russian Academy of Sciences tidings. Mechanics of Solids. 2005. № 1. C. 45–87. (in Russian).
- [2] Wriggers P. Finite Element Algorithms for Contact Problems // Archives of Computational Methods in Engineering. 1995. Vol. 2, no. 4. P. 1–49.
- [3] G. Xiaoming Z. R., Yingle S. On the mathematical modeling for elastoplastic contact problem and its solution by quadratic programming // International Journal of Solids and Structures. 2001. Vol. 2. P. 8133–8150.
- [4] Kravchuk A.S. On the theory of contact problems taking account of friction on the contact surface // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1980. T. 44, № 1. C. 122–129. (in Russian).
- [5] Kravchuk A.S. The solution of three-dimensional friction contact problems // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2008. T. 72, № 3. C. 485–496. (in Russian).
- [6] Z.-Q. Feng F. P., Labeid N. Solution of large deformation contact problems with friction between Blatz-Ko hyperelastic bodies // International Journal of Engineering Science. 2003. Vol. 41, no. I.19. P. 2213–2225.
- [7] F.J. Cavalieri A. Cardona V. F., Risso J. A finite element formulation for nonlinear 3d contact problems // Mecanica Computacional. Solid Mechanics. 2007. Vol. V. XXVI, no. 16. P. 1357–1372.
- [8] Morev P. A variational statement of quasistatic rigid-deformable contact problems at large strain involving generalized forces and friction // Acta Mechanica. 2011. Vol. 222. P. 115–130.
- [9] Markin A. A., Sokolova M. Iu. Thermomechanics of elastoplastic deformation. Moscow: FizMatLit, 2013. 320 c.

---

*Astapov Iurii Vladimirovich*

e-mail: ast3x3@gmail.com, postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia.

*Sokolova Marina Iurevna*

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.

*Khristich Dmitrii Viktorovich*

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.

- 
- [10] Astapov Yu. V., Khristich D. V. Numerical and experimental modeling of indentation process of resin specimens // Vestnik ChGPU Yakovleva. *Mechanika predelnogo sostoyaniya*. 2018. T. 36, № 2. С. 65–73. (in Russian).
- [11] A.A. Markin D.V. Khristich S., Astapov Y. The physically nonlinear model of an elastic material and its identification // *International Journal of Applied Mechanics*. 2019. Vol. 11, no. 7. p. 1950064 (13 p.).
- [12] Markin A. A., Sokolova M. Yu. Variant of the relations of nonlinear elasticity // *Mechanics of Solids*. 2019. № 6. С. 68–75. (in Russian).
- [13] Astapov Yu.V., Markin A.A. Finite deformations of the elastic bodies under the interaction with the rigid rough plane // Vestnik ChGPU Yakovleva. *Mechanika predelnogo sostoyaniya*. 2016. T. 29, № 3. С. 64–75. (in Russian).
- [14] Astapov Yu.V. The rigid spherical indentation into the bottom of elastic and hypoelastic circular cylinders under finite deformations // Vestnik ChGPU Yakovleva. *Mechanika predelnogo sostoyaniya*. 2017. T. 32, № 2. С. 107–116. (in Russian).
- [15] Giannakopoulos A., Panagiotopoulos D. Conical indentation of incompressible rubber-like materials // *International Journal of Solids and Structures*. 2009. Vol. 46. P. 1436–1447.