Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4 (46). С. 64–83

Ю. Н. Радаев

ГАРМОНИЧЕСКОЕ ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО АЗИМУТА В МИКРОПОЛЯРНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается система двух связанных векторных дифференциальных уравнений линейной теории микрополярной упругости, сформулированная в терминах перемещений и микровращений в случае гармонической зависимости перемещений и микровращений от времени. Вводятся потенциалы перемещений и микровращений. Выполнено расщепление связанных векторных дифференциальных уравнений микрополярной теории упругости для потенциалов на несвязанные винтовые уравнения, опираясь на пропорциональность (с разными масштабными факторами) вихревых составляющих перемещений и микровращений только одному вихревому винтовому полю. Найдено представление векторов перемещений и микровращений с помощью четырех винтовых векторов. Оно обеспечивает выполнимость связанных векторных дифференциальных уравнений линейной теории микрополярной упругости. Проблема нахождения вихревых составляющих перемещений и микровращений приведена к решению четырех несвязанных между собой векторных винтовых дифференциальных уравнений. Получено представление перемещений и микровращений с помощью двух несвязанных метагармонических векторов. Выполнено разделение пространственных переменных в уравнениях Гельмгольца в цилиндрической системе координат. Определены решения скалярного и векторного уравнений Гельмгольца в бесконечной цилиндрической области, содержащие ряд произвольных постоянных. В явном виде найдены представления векторов перемещений и микровращений в длинном линейном микрополярном цилиндре, содержащие восемь произвольных постоянных. Такого рода решения определяют формы гармонических волн перемещений и микровращений, распространяющихся вдоль оси длинного кругового цилиндра. Полученные представления для гармонических волн перемещений и микровращений имеют смысл только для волн, характеризующихся заданным азимутальным числом.

Ключевые слова: микрополярная теория упругости, вектор перемещения, вектор микровращения, векторный потенциал, вихревая часть, уравнение Гельмгольца, волна, цилиндр, волновое число, азимутальное число

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.003

УДК: 539.374

1. Предварительные сведения и вводные замечания. Микрополярная теория упругости в исторической перспективе восходит к классическому сочинению [1]. Модель микрополярного континуума несомненно обладает более высокой общностью, по сравнению с классической теорией упругости [2], что в конечном счете позволяет получать качественно новые теоретические результаты при решении краевых задач статики и динамики. Отличительной особенностью микрополярного тела является наличие помимо силовых также и моментных напряжений. Они характеризуются асимметричными тензорами второго ранга (при псевдотензорном описании — соответственно абсолютным и относительным тензором веса $+2$). То же самое относится и к тензору деформации. Генераторами моментных напряжений могут выступать многие реальные материалы с микроструктурными неоднородностями: поликристаллические материалы, композиты, суспензии, бетоны, горные породы, тканые материалы и биоматериалы.

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением упругого изотропного и центрально-симметричного тела при малых деформациях в изотермических условиях и для состояний, мало отличающихся от естественного состояния. Такое тело характеризуется 6-ю независимыми определяющими постоянными (общий случай анизотропии требует оперирования с 171-ой постоянной).

Уравнения микрополярной теории упругости достаточно хорошо известны [3–5] (см. также более ранние первоисточники [6–9]); их вывод, основанный на принципе виртуальных перемещений, имеется в статье [10]. Второй раздел работы будет посвящен уравнениям динамики микрополярного упругого тела, полученным различными авторами, в трех основных вариантах (двумя из них мы обязаны В. Новацкому и Г. Нейберу). Следует отметить, что уравнения, предложенные В. Новацким, получили наиболее широкое распространение в научной литературе, несмотря на то, что их абсолютная тензорная форма часто (как в случае с гемитропными средами) скрывает по существу их псевдотензоный характер.

С точки зрения кинематики микрополярный континуум характеризуется двумя векторными полями: полем перемещений и полем микровращений (микроповоротов). Вектор перемещений является абсолютным тензором, т.е. преобразуется по обычному тензорному закону. Вектор микровращений вводится в теорию микрополярной упругости как относительный тензор веса $+1$. Поэтому, например, его компоненты не меняют знак при полной инверсии трехмерного пространства или простой перенумерации осей координатной системы, преобразующей ее из левоориентированной в правоориентированную. Переход от относительного вектора микровращений к абсолютному без

Радаев Юрий Николаевич
e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00844 „Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности“).

Поступила 01.09.2020

труда осуществляется с помощью ориентирующего трехмерное пространство псевдоскаляра. Последнее обстоятельство позволяет сразу же вести все дальнейшее изложение в терминах абсолютных векторов, что характерно для подавляющего числа публикаций, посвященных микрополярной теории упругости.

Целью представляемой работы является исследование связанной системы векторных дифференциальных уравнений линейной микрополярной теории изотропного упругого тела в случае гармонической зависимости полей перемещений и микровращений от времени. Их изучение и преобразование с помощью динамических потенциалов (безвихревых и вихревых) приводит к различным системам векторных дифференциальных уравнений (как связанным, так и не связанным). С теоретической и прикладной точек зрения наиболее интересны только те, который обеспечивают переход от связанных уравнений к несвязанным. Родственные проблемы и постановки задач возникают также в прикладных задачах связанной термоупругости [11] и особенно в вопросах распространения гармонических волн в *гиперболических* термоупругих средах [12].

В представляемой работе, которая по-существу представляет собой обобщение методов и результатов [13], развивается альтернативная схема расщепления основной связанной системы векторных дифференциальных уравнений гармонической микрополярной теории упругости на несвязанные уравнения. Последние будут иметь форму *винтовых уравнений*. Полнота рассматриваемых в работе представлений гармонических полей перемещений и микровращений с помощью четырех винтовых векторных полей может быть установлена известными достаточно простыми методами, изложение которых может быть найдено в работе [13]. Приведенные в статье результаты подразумевают их дальнейшее использование в прикладных задачах, связанных с распространением гармонических (монохроматических) волн перемещений и микровращений вдоль длинных цилиндрических волноводов и в этом смысле выступают как дальнейшее развитие методов и результатов, содержащихся в книге [12]. В целом, данная статья может рассматриваться как наиболее полный источник сведений, касающихся гармонической задачи линейной микрополярной теории упругости.

2. Три основных варианта динамических уравнений линейной теории микрополярной упругости. Система связанных векторных дифференциальных уравнений линейной микрополярной теории упругости имеет вид [10]:

$$\begin{cases} G[(1+c_1)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (1-c_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} + 2c_1\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}] = \rho\partial_{\cdot\cdot}^2\mathbf{u}, \\ GL^2[(1+c_2)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi} + (1-c_2+2c_3)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}] - 2Gc_1(2\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) = \Im\,\partial_{\cdot\cdot}^2\boldsymbol{\phi}. \end{cases} \tag{1}$$

где ρ — плотность; $\Im$ — коэффициент микроинерции; $\mathbf{u}$ — вектор перемещения; $\boldsymbol{\phi}$ — вектор микровращения; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; L — характерная длина микрополярной теории упругости; c_1, c_2, c_3 — физически безразмерные определяющие постоянные; $\boldsymbol{\nabla}$ — трехмерный оператор Гамильтона; $\partial_{\cdot}$ — частное дифференцирование по времени при фиксированных пространственных переменных.

Приведенная выше система векторных дифференциальных уравнений с частными производными (1) представляется наиболее приемлемой с физической точки зрения. Однако в современной литературе она не получила широкого распространения, поскольку оптимальным считается другой набор определяющих постоянных. По этой причине введем новые определяющие постоянные α, β, γ, λ, μ, ε согласно

$$\begin{aligned} &G=\mu, \quad \frac{2\nu}{1-2\nu}=\frac{\lambda}{\mu}, \quad GL^2=\gamma, \\ &c_1=\frac{\alpha}{\mu}, \quad c_2=\frac{\varepsilon}{\gamma}, \qquad c_3=\frac{\beta}{2\gamma}. \end{aligned}$$

Заметим, что они систематически используются в монографиях [3, 4] и множестве других публикаций, посвященных линейной микрополярной теории упругости изотропного тела. В результате система связанных уравнений линейной микрополярной теории упругости (1) преобразуется к следующей форме:

$$\begin{cases} (\mu+\alpha)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}+(\mu-\alpha+\lambda)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}+2\alpha\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}=\rho\partial_{..}^2\mathbf{u}, \\ (\gamma+\varepsilon)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi}+(\gamma-\varepsilon+\beta)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}-2\alpha(2\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u})=\Im\,\partial_{..}^2\boldsymbol{\phi}; \end{cases} \tag{2}$$

или также

$$\begin{cases} (\lambda+2\mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}-(\mu+\alpha)\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u})+2\alpha\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}=\rho\partial_{..}^2\mathbf{u}, \\ (\beta+2\gamma)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}-(\gamma+\varepsilon)\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi})-2\alpha(2\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u})=\Im\,\partial_{..}^2\boldsymbol{\phi}. \end{cases} \tag{3}$$

Векторное дифференциальное уравнение (3) будет рассматриваться в областях трехмерного пространства, обладающих свойством *поверхностной односвязности*: любая замкнутая поверхность, целиком расположенная в области может быть стянута в точку, не выходя за границу области. Такое требование совершенно необходимо для того, чтобы любое безвихревое векторное поле имело бы потенциал, а любое векторное поле с нулевой расходимостью оказывалось бы вихревым, т.е. имело бы векторный потенциал.

Зависимость от времени предполагается гармонической, т.е. физические поля представляются как произведения комплексных амплитуд (за которыми мы сохраним те же обозначения, что и для самих полей) на комплексную гармоническую экспоненту $e^{i\omega t}$, где ω — циклическая частота.

Заканчивая этот раздел работы, приведем также дифференциальные уравнения микрополярной теории упругости, данные Нейбером [9] (H. Neuber, 1965). С этой целью введем (в обозначениях Нейбера) следующие абсолютные тензоры и векторы:
$g^{\lambda\mu}$ — метрический тензор,
$e^{\mu\lambda\eta}$ — абсолютный тензор перестановок,
V_λ — ковариантный вектор перемещений,
ω_λ — ковариантный вектор микровращений,
$t^{\lambda\mu}$ — тензор силовых напряжений,
$m^{\lambda\mu}$ — тензор моментных напряжений.

В обозначениях Нейбера имеем следующие дифференциальные уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} &\nabla_\lambda t^{\lambda\mu}=0, \\ &\nabla_\lambda m^{\lambda\mu}+e^{\mu\lambda\eta}t_{\lambda\eta}=0. \end{aligned}$$

Определяющие уравнения изотропного микрополярного упругого тела будут иметь следующую форму:

$$\begin{aligned} &t^{\lambda\mu}=G[(1+a)\nabla^\lambda V^\mu+(1-a)\nabla^\mu V^\lambda-2ae^{\mu\lambda\eta}\omega_\eta+2\nu(1-2\nu)^{-1}g^{\lambda\mu}\nabla_\eta V^\eta], \\ &m^{\lambda\mu}=4Gl^2[\nabla^\lambda\omega^\mu+b\nabla^\mu\omega^\lambda+cg^{\lambda\mu}\nabla_\eta\omega^\eta], \end{aligned}$$

где

G — модуль сдвига,

ν — коэффициент Пуассона,

l — характеристическая длина (масштабный параметр длины),

a, b, c — физически безразмерные определяющие постоянные.

Нетрудно видеть, что определяющие постоянные L, c_1, c_2, c_3 выражаются в терминах l, a, b, c согласно

$$L^2 = 2l^2(1+b), \quad c_1 = a, \quad c_2 = \frac{1-b}{1+b}, \quad c_3 = \frac{c}{1+b}.$$

Динамические уравнения микрополярной теории упругости, данные Нейбером, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&(1+a)\Delta V^\mu + [(1-2\nu)^{-1} - a]\nabla^\mu \nabla_\lambda V^\lambda + 2ae^{\mu\lambda\eta}\nabla_\lambda \omega_\eta = \rho G^{-1}\partial_{..}^2 V^\mu,\\
&(a - l^2\Delta)\omega^\mu - l^2(b+c)\nabla^\mu\nabla_\lambda\omega^\lambda - \frac{a}{2}e^{\mu\eta\sigma}\nabla_\eta V_\sigma = -(4G)^{-1}\mathfrak{I}\,\partial_{..}^2\omega^\mu,
\end{aligned}$$

где

$$\Delta = \nabla_\lambda \nabla^\lambda$$

есть оператор Лапласа, который представляет собой полностью свернутый оператор повторного ковариантного дифференцирования, т.е.

$$\Delta = g^{\lambda\mu}\nabla_\lambda\nabla_\mu.$$

Динамические уравнения микрополярного упругого тела никак не согласованы по степени приближения по масштабному параметру длины l: первое из них имеет нулевой порядок, а второе — второй.

3. Потенциалы перемещений и микровращенией. Связанные уравнения для потенциалов. Воспользуемся разложениями Гельмгольца для векторов перемещений и микровращений

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \boldsymbol{\nabla}\Phi + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\Psi},\\
\boldsymbol{\phi} &= \boldsymbol{\nabla}\Sigma + \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H},
\end{aligned} \tag{1}$$

которые представляют указанные векторные поля с помощью скалярных потенциалов Φ, Σ и векторных потенциалов $\boldsymbol{\Psi}$, $\mathbf{H}$.

К ним можно присоединять (а можно и не присоединять) различные калибровочные условия. В частности, стандартными принято считать условия, фиксирующие нулевую расходимость векторных потенциалов

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Psi} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{H} = 0. \tag{2}$$

Подстановка разложений (1) в систему дифференциальных уравнений (3) позволяет получить уравнения для скалярных и векторных потенциалов.

Дифференциальные уравнения для скалярных потенциалов Φ, Σ не связанны между собой и поэтому рассматриваются как два независимых уравнения

$$\begin{aligned}
&\Delta\Phi - \frac{1}{c_\parallel^2}(\partial.)^2\Phi = 0,\\
&\Delta\Sigma - \frac{1}{{}_\mu c_\parallel^2}(\partial.)^2\Sigma - \frac{\Omega^2}{{}_\mu c_\parallel^2}\Sigma = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь постоянные $c_{\parallel}^2$, ${}_{\mu}c_{\parallel}^2$ и Ω^2 выражаются в терминах определяющих постоянных согласно

$$c_{\parallel}^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \qquad {}_{\mu}c_{\parallel}^2 = \frac{\beta + 2\gamma}{\Im}, \qquad \Omega^2 = \frac{4\alpha}{\Im}.$$

Для векторных потенциалов $\mathbf{\Psi}$, $\mathbf{H}$ получаются два связанных между собой векторных дифференциальных уравнения

$$\begin{cases} \mathscr{A}_{\perp}\mathbf{\Psi} + 2d_{\perp}^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ \mathscr{B}_{\perp}\mathbf{H} + \dfrac{\Omega^2}{2\,{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^2} \nabla \times \mathbf{\Psi} = \mathbf{0}, \end{cases} \tag{4}$$

где были введены постоянные

$$d_{\perp}^2 = \frac{{}^{\backprime}c_{\perp}^2}{{}^{\backprime\backprime}c_{\perp}^2}, \quad {}^{\backprime}c_{\perp}^2 = \frac{\alpha}{\rho}, \quad {}^{\backprime\backprime}c_{\perp}^2 = \frac{\mu + \alpha}{\rho}, \quad {}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^2 = \frac{\gamma + \epsilon}{\Im}; \tag{5}$$

и, кроме того, — два дифференциальных оператора второго порядка

$$\mathscr{A}_{\perp} = \Delta - \frac{1}{{}^{\backprime\backprime}c_{\perp}^2}(\partial_{\cdot})^2, \qquad \mathscr{B}_{\perp} = \Delta - \frac{1}{{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^2}(\partial_{\cdot})^2 - \frac{\Omega^2}{{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^2}. \tag{6}$$

Система (4) сохраняет свой вид независимо от использования того или иного условия калибровки. В частности, можно вообще отказаться от калибровочных условий (2).

Исследование связанных уравнений для векторных потенциалов перемещений и микровращений вызывает значительные трудности и поэтому мы сосредоточимся именно на этих уравнениях. Начнем с того, что дифференциальные операторы $\mathscr{A}_{\perp}$ и $\mathscr{B}_{\perp}$ в условиях гармонической зависимости от времени сводятся к

$$\mathscr{A}_{\perp} = \Delta + \frac{\omega^2}{{}^{\backprime\backprime}c_{\perp}^2}, \qquad \mathscr{B}_{\perp} = \Delta + \frac{\omega^2}{{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^2} - \frac{\Omega^2}{{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^2}. \tag{7}$$

В рамках настоящего исследования удобно ввести следующие две постоянные

$$\alpha_{\perp}^2 = \frac{\omega^2}{{}^{\backprime\backprime}c_{\perp}^2}, \quad \beta_{\perp}^2 = \mathrm{Abs}\frac{\omega^2 - \Omega^2}{{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^2}$$

и привести операторы $\mathscr{A}_{\perp}$ и $\mathscr{B}_{\perp}$ к следующему виду:

$$\mathscr{A}_{\perp} = \Delta + \alpha_{\perp}^2, \qquad \mathscr{B}_{\perp} = \Delta \pm \beta_{\perp}^2, \tag{8}$$

где выбор того или иного знака в выражении для $\mathscr{B}_{\perp}$ зависит от величины циклической частоты

$$\omega^2 - \Omega^2 \gtrless 0.$$

В итоге в гармоническом случае связанная система уравнений для потенциалов приобретает вид

$$\begin{cases} (\Delta + \alpha_{\perp}^2)\mathbf{\Psi} + 2d_{\perp}^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ (\Delta \pm \beta_{\perp}^2)\mathbf{H} + \dfrac{\Omega^2}{2\,{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_{\perp}^2} \nabla \times \mathbf{\Psi} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{9}$$

Ограничимся исследованием высокочастотных гармонических волн, когда циклическая частота ω оказывается выше порогового значения, определяемого постоянной Ω. Тогда последняя система уравнений приводится к

$$\begin{cases} (\Delta + \alpha_\perp^2)\boldsymbol{\Psi} + 2d_\perp^2 \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ (\Delta + \beta_\perp^2)\mathbf{H} + \dfrac{\Omega^2}{2\, {}_{\mu}^{\backslash\backslash}c_\perp^2} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0}; \end{cases} \tag{10}$$

с целью сокращения записи введем обозначение

$$g_\perp^2 = \frac{\Omega^2}{{}_{\mu}^{\backslash\backslash}c_\perp^2} d_\perp^2,$$

после чего окончательно приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} (\Delta + \alpha_\perp^2)\boldsymbol{\Psi} + 2d_\perp^2 \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ (\Delta + \beta_\perp^2)\mathbf{H} + \dfrac{g_\perp^2}{2d_\perp^2} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{11}$$

Внимательный анализ проведенных рассуждений показывает, что связанная система уравнений для потенциалов (11) получается также и в несколько иной форме (и снова без учета калибровки потенциалов):

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi}) + \alpha_\perp^2 \boldsymbol{\Psi} + 2d_\perp^2 \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \\ -\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H}) + \beta_\perp^2 \mathbf{H} + \dfrac{g_\perp^2}{2d_\perp^2} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{12}$$

Для скалярных потенциалов Φ, Σ в случае гармонической зависимости полей перемещений и микровращений от времени на основании (3) приходим к уравнениям

$$\begin{gathered} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\Phi + \alpha_\parallel^2 \Phi = 0, \\ (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\Sigma + \beta_\parallel^2 \Sigma = 0, \end{gathered} \tag{13}$$

где

$$\alpha_\parallel^2 = \frac{\omega^2}{c_\parallel^2}, \quad \beta_\parallel^2 = \mathrm{Abs}\frac{\omega^2 - \Omega^2}{{}_{\mu}^{\backslash\backslash}c_\parallel^2}.$$

4. Представление вихревых составляющих перемещений и микровращений с помощью четырех винтовых векторных полей. Представление вихревых составляющих перемещений и микровращений с помощью винтовых векторных полей решает главную задачу настоящего исследования: переход от связанной системы дифференциальных уравнений (12) к несвязанным уравнениям, что в конечном итоге должно позволить найти аналитические подходы к решению прикладных задач механики микрополярных континуумов.

Достижение этой цели начинается с рассмотрения вихревых составляющих перемещений и микровращений как одного и того же вихревого векторного поля $\boldsymbol{\Upsilon}$, но с различными масштабными факторами:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi} = a\boldsymbol{\Upsilon}, \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = b\boldsymbol{\Upsilon}; \end{cases} \tag{1}$$

при этом буде выполнено *естественное* калибровочное условие

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Upsilon} = 0.$$

Подстановка (1) в систему векторных дифференциальных уравнений (12) позволяет получить следующую систему уравнений относительно поля $\boldsymbol{\Upsilon}$:

$$\begin{cases} -a\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon}) + \alpha_\perp^2 a\boldsymbol{\Upsilon} + 2d_\perp^2 b\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0}, \\ -b\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon}) + \beta_\perp^2 b\boldsymbol{\Upsilon} + \dfrac{g_\perp^2}{2d_\perp^2} a\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

В левой части первого из уравнений приведенной выше системы добавим и отнимем одно и то же слагаемое (c — некоторая постоянная)

$$c\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon};$$

то же самое выполним и со вторым уравнением и слагаемым (d — некоторая постоянная)

$$d\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon}.$$

После ряда преобразований убеждаемся в том, что, если положить

$$\frac{a}{c} = \frac{c + 2d_\perp^2 b}{a\alpha_\perp^2}, \quad \frac{b}{d} = \frac{d + (2d_\perp^2)^{-1} g_\perp^2 a}{b\beta_\perp^2},$$

то связанные уравнения для потенциалов будут удовлетворяться, когда

$$\begin{cases} -c\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} + a\alpha_\perp^2 \boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0}, \\ -d\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} + b\beta_\perp^2 \boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Получить одно независимое уравнение для определения векторного поля $\boldsymbol{\Upsilon}$ удается, если принять, что

$$\frac{c}{d} = \frac{\alpha_\perp^2}{\beta_\perp^2} \frac{a}{b};$$

тогда оказывается достаточной выполнимость следующего *винтового* уравнения

$$-\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} + p\alpha_\perp^2 \boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0}, \tag{2}$$

где p представляет собой отношение

$$p = \frac{a}{c}.$$

Обратимся далее к нахождению постоянных. Всего их четыре: a, b, c, d. Из них можно образовать три независимых отношения:

$$p = \frac{a}{c}, \quad q = \frac{b}{c}, \quad s = \frac{d}{c}.$$

Для указанных отношений из предыдущих рассуждений получаются ровно три независимых уравнения

$$\begin{cases} p^2\alpha_\perp^2 = 1 + 2qd_\perp^2, \\ q^2\beta_\perp^2 = s^2 + ps\dfrac{g_\perp^2}{2d_\perp^2}, \\ ps\dfrac{\alpha_\perp^2}{\beta_\perp^2} = q. \end{cases}$$

Из данной выше системы уравнений можно определить постоянную q, получив сначала квадратное уравнение

$$2d_\perp^2\alpha_\perp^2 q^2 + (\alpha_\perp^2 - \beta_\perp^2 - g_\perp^2)q - \frac{g_\perp^2}{2d_\perp^2} = 0,$$

из которого находятся два различных вещественных значения для q:

$$4d_\perp^2\alpha_\perp^2 q = \beta_\perp^2 + g_\perp^2 - \alpha_\perp^2 \pm \sqrt{(\beta_\perp^2 + g_\perp^2 - \alpha_\perp^2)^2 + 4g_\perp^2\alpha_\perp^2}.$$

Для постоянной p^2 также получаются два различных вещественных значения согласно

$$2\alpha_\perp^4 p^2 = \beta_\perp^2 + g_\perp^2 + \alpha_\perp^2 \pm \sqrt{(\beta_\perp^2 + g_\perp^2 + \alpha_\perp^2)^2 - 4\alpha_\perp^2\beta_\perp^2}.$$

Начиная с этого момента, введем два значения p_1, p_2, которые соответствуют положительному и отрицательному знакам в приведенной только что формуле, и введем также два *положительных* значения K_1, K_2 с помощью соотношений

$$\alpha_\perp^4 p_{1,2}^2 = K_{2,1}^2, \quad \alpha_\perp^2 p_1 = \mp K_2, \quad \alpha_\perp^2 p_2 = \mp K_1.$$

Ясно, что постоянные (волновые числа) K_1, K_2 могут быть вычислены на основании

$$\begin{aligned} \sqrt{2}K_2 &= \sqrt{\beta_\perp^2 + g_\perp^2 + \alpha_\perp^2 + \sqrt{(\beta_\perp^2 + g_\perp^2 + \alpha_\perp^2)^2 - 4\alpha_\perp^2\beta_\perp^2}}, \\ \sqrt{2}K_1 &= \sqrt{\beta_\perp^2 + g_\perp^2 + \alpha_\perp^2 - \sqrt{(\beta_\perp^2 + g_\perp^2 + \alpha_\perp^2)^2 - 4\alpha_\perp^2\beta_\perp^2}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Заметим, что волновые числа K_1, K_2 в силу своего определения упорядочены согласно

$$K_2 > K_1 > 0.$$

Таким образом, всего для параметра p имеется *четыре* различных вещественных значения

$$\mp K_1, \quad \mp K_2;$$

в результате векторное поле $\boldsymbol{\Upsilon}$ должно удовлетворять одному из *четырех* винтовых уравнений

$$-\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} \mp K_{2,1}\boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0}, \tag{4}$$

где знаки $\mp$ и индексы 1, 2 между собой никак не согласованы.

Векторное поле $\boldsymbol{\Upsilon}$ в трехмерном пространстве называется винтовым (screw field), если оно удовлетворяет следующему соотношению:

$$\boldsymbol{\Upsilon} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon}) = \mathbf{0},$$

т.е. вихрь векторного поля оказывается коллинеарным направлению самого поля

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon} = A\boldsymbol{\Upsilon},$$

где множитель A характеризуется термином анормальность (abnormality) поля.

В том случае, когда множитель A есть постоянная величина можно утверждать, что (см., например, [14]):

1) все кратные (повторные) вихри векторного поля $\boldsymbol{\Upsilon}$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon}, \quad \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon}), \quad \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Upsilon})), \ldots$$

также будут винтовыми полями, причем с той же самой анормальностью A;

2) поле $\boldsymbol{\Upsilon}$ будет удовлетворять векторному уравнению Гельмгольца

$$\Delta\boldsymbol{\Upsilon} + A^2\boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0};$$

3) винтовое поле $\boldsymbol{\Upsilon}$ с постоянной анормальностью A всегда представимо в форме

$$\boldsymbol{\Upsilon} = A(\boldsymbol{\nabla} h) \times \mathbf{d} + A^2 h\mathbf{d} + (\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla} h,$$

где $\mathbf{d}$ — постоянный единичный директор в трехмерном пространстве, h — некоторое скалярное поле, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца

$$\Delta h + A^2 h = 0.$$

Таким образом, имеется ровно четыре независимых поля[4]

$$\underset{2}{\boldsymbol{\Upsilon}}_-, \quad \underset{2}{\boldsymbol{\Upsilon}}_+, \quad \underset{1}{\boldsymbol{\Upsilon}}_-, \quad \underset{1}{\boldsymbol{\Upsilon}}_+,$$

которые должны быть интегралами несвязанных векторных уравнений (4) и линейные комбинации которых будут определять вихревые части векторов перемещений и микровращений в соответствии с (1). При этом следует учитывать, что однозначно определяется лишь отношение b/a и, поскольку

$$\frac{b}{a} = \frac{q}{p},$$

то отношение b/a имеет четыре различных значения, которые без труда находятся из данных выше формул.

Обозначая четыре указанных значения отношения b/a через

$$\frac{b}{a} = \mp g_{2,\,1},$$

в итоге приходим к формуле для вихревых частей перемещений и микровращений

$$\boldsymbol{\nabla} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Psi} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -g_2 \end{pmatrix} \underset{2}{\boldsymbol{\Upsilon}}_- + \begin{pmatrix} 1 \\ g_2 \end{pmatrix} \underset{2}{\boldsymbol{\Upsilon}}_+ + \begin{pmatrix} 1 \\ -g_1 \end{pmatrix} \underset{1}{\boldsymbol{\Upsilon}}_- + \begin{pmatrix} 1 \\ g_1 \end{pmatrix} \underset{1}{\boldsymbol{\Upsilon}}_+. \tag{5}$$

В этой формуле мы полагаем

$$g_{2,\,1} = \frac{\beta_\perp^2 + g_\perp^2 - \alpha_\perp^2 \pm \sqrt{(\beta_\perp^2 + g_\perp^2 - \alpha_\perp^2)^2 + 4\alpha_\perp^2 g_\perp^2}}{4d_\perp^2 K_{2,\,1}}. \tag{6}$$

Заметим, что здесь знаки $\pm$ согласованы с индексами 2, 1, т.е. последняя формула на самом деле определяет два вещественных значения параметра g.

5. Представление с помощью метагармоических потенциалов. Следуя [13], винтовые уравнения (4) будем решать, вводя два новых вихревых векторных потенциала $\underset{1}{\boldsymbol{\Pi}}$ и $\underset{2}{\boldsymbol{\Pi}}$ в соответствии с

$$\begin{aligned} \underset{1}{\boldsymbol{\Upsilon}}_\mp &= \boldsymbol{\nabla} \times \underset{1}{\boldsymbol{\Pi}} \mp K_1 \underset{1}{\boldsymbol{\Pi}}, \\ \underset{2}{\boldsymbol{\Upsilon}}_\mp &= \boldsymbol{\nabla} \times \underset{2}{\boldsymbol{\Pi}} \mp K_2 \underset{2}{\boldsymbol{\Pi}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Эти два потенциала предполагаются вихревыми, т.е.

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \underset{1}{\boldsymbol{\Pi}} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \underset{2}{\boldsymbol{\Pi}} = 0.$$

[4]Приводимые ниже обозначения для четырех различных вариантов векторного поля $\boldsymbol{\Upsilon}$ согласованы с четырьмя уравнениями (4), выписанными в сокращенной форме.

Для того, чтобы векторные поля $\underset{2}{\boldsymbol{\Upsilon}}_{-}$, $\underset{2}{\boldsymbol{\Upsilon}}_{+}$, $\underset{1}{\boldsymbol{\Upsilon}}_{-}$, $\underset{1}{\boldsymbol{\Upsilon}}_{+}$ удовлетворяли винтовым уравнениям (4) потенциалы $\underset{1}{\boldsymbol{\Pi}}$ и $\underset{2}{\boldsymbol{\Pi}}$, в свою очередь, должны удовлетворять уравнениям Гельмгольца[5]

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\underset{1}{\boldsymbol{\Pi}}+K_1^2\underset{1}{\boldsymbol{\Pi}}&=\mathbf{0},\\(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\underset{2}{\boldsymbol{\Pi}}+K_2^2\underset{2}{\boldsymbol{\Pi}}&=\mathbf{0}.\end{aligned}\tag{2}$$

Подставляя в формулу (5) представления (1) для векторных полей $\underset{2}{\boldsymbol{\Upsilon}}_{-}$, $\underset{2}{\boldsymbol{\Upsilon}}_{+}$, $\underset{1}{\boldsymbol{\Upsilon}}_{-}$, $\underset{1}{\boldsymbol{\Upsilon}}_{+}$, пренебрегая затем несущественным множителем 2, после ряда преобразований получаем

$$\boldsymbol{\nabla}\times\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Psi}\\\mathbf{H}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\nabla}\times\underset{1}{\boldsymbol{\Pi}}+\boldsymbol{\nabla}\times\underset{2}{\boldsymbol{\Pi}}\\g_1K_1\underset{1}{\boldsymbol{\Pi}}+g_2K_2\underset{2}{\boldsymbol{\Pi}}\end{pmatrix}$$

или также

$$\boldsymbol{\nabla}\times\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Psi}\\\mathbf{H}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\nabla}\times&\boldsymbol{\nabla}\times\\g_1K_1&g_2K_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underset{1}{\boldsymbol{\Pi}}\\\underset{2}{\boldsymbol{\Pi}}\end{pmatrix}.\tag{3}$$

Заметим, что

$$g_{2,\,1}K_{2,\,1}=\frac{\beta_\perp^2+g_\perp^2-\alpha_\perp^2\pm\sqrt{(\beta_\perp^2+g_\perp^2-\alpha_\perp^2)^2+4\alpha_\perp^2g_\perp^2}}{4d_\perp^2}$$

и справедливы неравенства

$$g_2>0>g_1.$$

Принимая во внимание разложения (1) и (3), приходим к следующему представлению перемещений и микровращений в терминах двух метагармонических потенциалов:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\\boldsymbol{\phi}\end{pmatrix}=\boldsymbol{\nabla}\begin{pmatrix}\Phi\\\Sigma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{\nabla}\times\underset{1}{\boldsymbol{\Pi}}+\boldsymbol{\nabla}\times\underset{2}{\boldsymbol{\Pi}}\\g_1K_1\underset{1}{\boldsymbol{\Pi}}+g_2K_2\underset{2}{\boldsymbol{\Pi}}\end{pmatrix}.\tag{4}$$

Здесь скалярные и векторные потенциалы должны удовлетворять метагармоническим уравнениям (см. (13) и (2)) с волновыми числами $\alpha_\parallel$, $\beta_\parallel$, K_1, K_2:

$$\begin{aligned}((\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})+\alpha_\parallel^2)\Phi&=0,\\((\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})+\beta_\parallel^2)\Sigma&=0;\\((\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})+K_1^2)\underset{1}{\boldsymbol{\Pi}}&=\mathbf{0},\\((\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})+K_2^2)\underset{2}{\boldsymbol{\Pi}}&=\mathbf{0}.\end{aligned}\tag{5}$$

На основании представлений (4) могут быть получены также выражения для тензоров деформаций, силовых и моментных напряжений в терминах метагармонических потенциалов. Однако сначала нам потребуются вспомогательные представления и некоторые базовые формулы микрополярной теории упругости.

[5]В современной научной литературе уравнения Гельмгольца часто называют метагармоническими уравнениями (metaharmonic equations), а их регулярные решения — метагармоническими функциями (в данном случае — метагармоническими векторными полями).

6. Деформации, силовые и моментные напряжения в изотропном микрополярном упругом теле. Микрополярная теория упругости в плане своих основных положений не может быть удовлетворительно развита без привлечения представления об относительных тензорах, характеризующихся рангом и весом. Однако следует помнить о том, что при этом в микрополяной теории упругости не возникает никаких существенных препятствий для перехода к абсолютным тензорным представлениям за счет умножения или деления (возможно, на целые степени) исходных относительных тензоров на ориентирующий относительный скаляр.

Мы начнем с фундаментальной метрической формы

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k,$$

который определяет длину линейного элемента, задаваемого дифференциалами dx^k криволинейных координат x^k. Здесь g_{ik} — компоненты метрического тензора.

Детерминант метрического тензора

$$g = \det(g_{ik}),$$

как нетрудно видеть, всегда положителен (поскольку положительно определена фундаментальная метрическая форма) и представляет собой относительный скаляр веса +2.

Определим далее имеющие фундаментальное значение в микрополярных теориях символы перестановок ϵ^{ijk}, ϵ_{ijk} соотношениями

$$\epsilon^{ijk} = \epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если } i,j,k = 123, 231, 312; \\ -1, & \text{если } i,j,k = 132, 213, 321; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{1}$$

Символы перестановок — относительные тензоры весов +1 и −1 соответственно. Они антисимметричны по всем трем индексам. Подчеркнем, что символы перестановок одновременно образуют контравариантный и контравариантный относительные тензоры, различающиеся весами.

Далее рассмотрим локальные базисные триэдры, связанные с выбранной координатной системой в трехмерном пространстве: $\underset{s}{\boldsymbol{\imath}}$ $(s = 1,2,3)$ — локальный ковариантный базис; $\overset{s}{\boldsymbol{\imath}}$ $(s = 1,2,3)$ — локальный контравариантный (взаимный) базис.

Базисные векторы и взаимные базисные векторы удовлетворяют следующему соотношению:

$$\underset{s}{\boldsymbol{\imath}} \cdot \overset{k}{\boldsymbol{\imath}} = \overset{k}{\underset{s}{\delta}} \quad (k = 1,2,3;\ s = 1,2,3).$$

Наряду с символами перестановок определим фундаментальный ориентирующий относительный скаляр веса +1 согласно

$$e = \underset{1}{\boldsymbol{\imath}} \cdot (\underset{2}{\boldsymbol{\imath}} \times \underset{3}{\boldsymbol{\imath}}). \tag{2}$$

Подчеркнем, что $e > 0$ для правоориентированной координатной системы, $e < 0$ для левоориентированной координатной системы.

Заметим, что справедливо равенство

$$e^2 = g,$$

т.е.

$$|e| = \sqrt{g}.$$

Введем также следующий относительный скаляр отрицательного веса -1 как смешанное произведение контравариантных векторов локального базиса:

$$e^{-1} = \overset{1}{\boldsymbol{\imath}} \cdot (\overset{2}{\boldsymbol{\imath}} \times \overset{3}{\boldsymbol{\imath}}). \tag{3}$$

Наконец, рассмотрим истинные (абсолютные) e-тензоры (так называемые тензоры перестановок) e^{ijk}, e_{ijk}, определив их согласно

$$\begin{aligned} e_{ijk} &= e\epsilon_{ijk}, \\ e^{ijk} &= e^{-1}\epsilon^{ijk}, \end{aligned} \tag{4}$$

т.е.

$$e_{skl} = \begin{cases} +\sqrt{g}\epsilon_{skl}, & \text{если } e > 0; \\ -\sqrt{g}\epsilon_{skl}, & \text{если } e < 0; \end{cases}$$

$$e^{skl} = \begin{cases} +\dfrac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{skl}, & \text{если } e > 0; \\ -\dfrac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{skl}, & \text{если } e < 0. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\underset{s}{\boldsymbol{\imath}} \times \underset{k}{\boldsymbol{\imath}} = e_{skl}\overset{l}{\boldsymbol{\imath}}, \tag{5}$$

$$\overset{s}{\boldsymbol{\imath}} \times \overset{k}{\boldsymbol{\imath}} = e^{skl}\underset{l}{\boldsymbol{\imath}}. \tag{6}$$

Тензоры перестановок, следовательно, представляются также формулами

$$e_{skl} = \underset{s}{\boldsymbol{\imath}} \cdot (\underset{k}{\boldsymbol{\imath}} \times \underset{l}{\boldsymbol{\imath}}), \tag{7}$$

$$e^{skl} = \overset{s}{\boldsymbol{\imath}} \cdot (\overset{k}{\boldsymbol{\imath}} \times \overset{l}{\boldsymbol{\imath}}). \tag{8}$$

Учитывая изложенное выше, для антисимметричного e-тензора третьего ранга

$$\boldsymbol{e} = e^{skl}\underset{s}{\boldsymbol{\imath}} \otimes \underset{k}{\boldsymbol{\imath}} \otimes \underset{l}{\boldsymbol{\imath}}$$

нетрудно получить формулу

$$-\mathbf{I} \times \mathbf{I} = \boldsymbol{e}, \tag{9}$$

где $\mathbf{I}$ — единичный тензор.

Далее рассмотрим асимметричный тензор деформации линейной микрополярной теории упругости

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u} - \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\phi}, \tag{10}$$

или

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u} - \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{e},$$

а также

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u} + \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{I} \times \mathbf{I})$$

и

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{u} + (\mathbf{I} \times \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\phi}.$$

Тензор изгиба—кручения представляет собой градиент поля микроповоротов, т.е. он представляет собой тензор второго ранга

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\phi} \tag{11}$$

Следующие фундаментальные соотношения позволяют определить тензоры силовых и моментных напряжений

$$\mathbf{t} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\mu}, \tag{12}$$

где $\mathbf{t}$, $\mathbf{m}$ — векторы сил и моментов, действующих на плоский элемент, нормальный единичному директору $\mathbf{n}$.

В случае изотропной среды определяющие уравнения линейного микрополярного упругого тела будут иметь вид

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mu+\alpha)\boldsymbol{\epsilon} + (\mu-\alpha)\boldsymbol{\epsilon}^{\mathrm{T}} + \lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{\epsilon})\,\mathbf{I}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\mu} = (\gamma+\varepsilon)\boldsymbol{\kappa} + (\gamma-\varepsilon)\boldsymbol{\kappa}^{\mathrm{T}} + \beta(\operatorname{tr}\boldsymbol{\kappa})\,\mathbf{I}. \tag{14}$$

С их помощью без труда получаются формулы для векторов силовых и моментных напряжений $\mathbf{t}$ и $\mathbf{m}$

$$\begin{cases} \mathbf{t} = 2\mu(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} + (\mu-\alpha)\mathbf{n}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) + \lambda\mathbf{n}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) + 2\alpha\mathbf{n}\times\boldsymbol{\phi}, \\ \mathbf{m} = \beta\mathbf{n}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}) + 2\gamma(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\phi} + (\gamma-\varepsilon)\mathbf{n}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}). \end{cases} \tag{15}$$

Они используются в прикладных задачах микрополярной теории упругости при постановке граничных условий.

Метагармонические потенциалы вводятся в данные выше формулы на основании

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = -\alpha_{\|}^{2}\Phi, \\ &\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi} = -\beta_{\|}^{2}\Sigma; \\ &\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u} = -(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\underset{1}{\boldsymbol{\Pi}} - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\underset{2}{\boldsymbol{\Pi}} = K_1^2\underset{1}{\boldsymbol{\Pi}} + K_2^2\underset{2}{\boldsymbol{\Pi}}, \\ &\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi} = g_1K_1\boldsymbol{\nabla}\times\underset{1}{\boldsymbol{\Pi}} + g_2K_2\boldsymbol{\nabla}\times\underset{2}{\boldsymbol{\Pi}}. \end{aligned}$$

7. Некоторые формулы теории поля в цилиндрической системе координат. Рассмотрим в трехмерном пространстве цилиндрическую систему координат r, φ, z. Метрический элемент в указанной системе координат вычисляется согласно

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\varphi^2 + dz^2.$$

Введем следующие обозначения для *единичных* локальных базисных векторов:

$$\boldsymbol{\imath}_r, \quad \boldsymbol{\imath}_\varphi, \quad \boldsymbol{\imath}_z.$$

Не следует путать указанные единичные векторы с ковариантными локальными базисными векторами, за которыми мы зарезервируем следующие символы:

$$\underset{r}{\boldsymbol{\imath}}, \quad \underset{\varphi}{\boldsymbol{\imath}}, \quad \underset{z}{\boldsymbol{\imath}}.$$

Они образуют правоориентированную систему $e > 0$. Нетрудно видеть, что

$$\boldsymbol{\imath}_r\times\boldsymbol{\imath}_\varphi = \boldsymbol{\imath}_z, \quad \boldsymbol{\imath}_r\times\boldsymbol{\imath}_z = -\boldsymbol{\imath}_\varphi, \quad \boldsymbol{\imath}_\varphi\times\boldsymbol{\imath}_z = \boldsymbol{\imath}_r, \quad \boldsymbol{\imath}_z\times\boldsymbol{\imath}_r = \boldsymbol{\imath}_\varphi, \quad \boldsymbol{\imath}_z\times\boldsymbol{\imath}_\varphi = -\boldsymbol{\imath}_r.$$

Частные производные от локальных базисных векторов есть

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\boldsymbol{\imath}_r}{\partial r} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial\boldsymbol{\imath}_r}{\partial\varphi} = \boldsymbol{\imath}_\varphi, \quad \frac{\partial\boldsymbol{\imath}_r}{\partial z} = \mathbf{0}; \\ &\frac{\partial\boldsymbol{\imath}_\varphi}{\partial r} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial\boldsymbol{\imath}_\varphi}{\partial\varphi} = -\boldsymbol{\imath}_r, \quad \frac{\partial\boldsymbol{\imath}_\varphi}{\partial z} = \mathbf{0}; \\ &\frac{\partial\boldsymbol{\imath}_z}{\partial r} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial\boldsymbol{\imath}_z}{\partial\varphi} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial\boldsymbol{\imath}_z}{\partial z} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Пространственный оператор Гамильтона будет иметь вид

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\imath}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{\imath}_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \boldsymbol{\imath}_z \frac{\partial}{\partial z}, \tag{1}$$

следовательно, можно получить следующие основные формулы (F — скалярное поле, $\mathbf{\Gamma}$ — векторное поле, $\mathbf{\Gamma} = \Gamma_r \boldsymbol{\imath}_r + \Gamma_\varphi \boldsymbol{\imath}_\varphi + \Gamma_z \boldsymbol{\imath}_z$):

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla} F = \boldsymbol{\imath}_r \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{\imath}_\varphi}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} + \boldsymbol{\imath}_z \frac{\partial F}{\partial z},\\
&\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{\Gamma} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r\Gamma_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z},\\
&\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{\Gamma} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Gamma_\varphi}{\partial z} \right) \boldsymbol{\imath}_r + \left(\frac{\partial \Gamma_r}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma_z}{\partial r} \right) \boldsymbol{\imath}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r\Gamma_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma_r}{\partial \varphi} \right) \boldsymbol{\imath}_z,\\
&(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}) F = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{2}$$

8. Разделение пространственных переменных в уравнениях Гельмгольца в цилиндрической системе координат. В этом разделе приводятся решения скалярного и векторного уравнений Гельмгольца в бесконечном цилиндре, которые получаются методом разделения переменных в цилиндрической системе координат.

Сначала рассмотрим уравнение Гельмгольца относительно скалярного поля F. Обозначим через k_* волновое число, квадрат которого фигурирует в качестве параметра в этом уравнении.

Уравнение Гельмгольца относительно скалярного поля F

$$(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} + k_*^2) F = 0$$

обладает решениями, соответствующими формам распространяющейся в цилиндре вдоль вертикальной оси гармонической волны, характеризующейся волновым числом k и азимутальным числом n.

Стандартная процедура разделения переменных позволяет заключить, что поле

$$F = C I_n(p_* r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \tag{1}$$

где C — произвольная постоянная, n — азимутальное число поля, $I_k(\cdot)$ — функция Бесселя порядка k мнимого аргумента, постоянная p_* определена согласно

$$p_*^2 = k^2 - k_*^2.$$

Уравнение Гельмгольца с параметром k_{**} относительно векторного поля $\mathbf{\Gamma}$ имеет вид

$$(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} + k_{**}^2) \mathbf{\Gamma} = \mathbf{0}.$$

Можно показать, что метод разделения переменных в цилиндрических координатах в этом случае также оказывается эффективным. В итоге, раскладывая поле на составляющие по локальным базисным директорам

$$\mathbf{\Gamma} = \Gamma_r \boldsymbol{\imath}_r + \Gamma_\varphi \boldsymbol{\imath}_\varphi + \Gamma_z \boldsymbol{\imath}_z,$$

удается получить волновые решения в бесконечном цилиндре с волновым числом k и азимутальным числом n следующего вида:

$$\begin{aligned}
\Gamma_r &= (C_1 I_{n-1}(q_* r) + C_2 I_{n+1}(q_* r)) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\
\Gamma_\varphi &= (C_1 I_{n-1}(q_* r) - C_2 I_{n+1}(q_* r)) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\
\Gamma_z &= C_3 I_n(q_* r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz},
\end{aligned} \tag{2}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные,

$$q_*^2 = k^2 - k_{**}^2.$$

Векторное поле $\mathbf{\Gamma}$ при этом имеет нулевую расходимость, только если

$$q_*(C_1 + C_2) \pm ikC_3 = 0.$$

9. Метагармонические потенциалы перемещений и микровращений в длинном круговом цилиндре. Будем исходить из основного представления векторов перемещений и микровращений в линейной микрополярной среде (4), где скалярные и векторные потенциалы удовлетворяют метагармоническим уравнениям (5).

Воспользуемся формулой (1) для представления скалярных потенциалов векторов перемещений и микровращений в волне данного азимута n. Полагая в (1) $k_* = \alpha_\|$, находим

$$\Phi = C_1 I_n(p_1 r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \tag{1}$$

где

$$p_1^2 = k^2 - \alpha_\|^2;$$

полагая затем $k_* = \beta_\|$, получаем

$$\Sigma = C_2 I_n(p_2 r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \tag{2}$$

где

$$p_2^2 = k^2 - \beta_\|^2.$$

Воспользуемся формулой (2) для представления векторных потенциалов векторов перемещений и микровращений в волне данного азимута n. Предварительно введем сокращенные обозначения для метагармонических векторных потенциалов

$$\mathbf{L} = \underset{1}{\mathbf{\Pi}}, \quad \mathbf{M} = \underset{2}{\mathbf{\Pi}},$$

и их разложения по единичным векторам локального базиса

$$\mathbf{L} = L_r \boldsymbol{\imath}_r + L_\varphi \boldsymbol{\imath}_\varphi + L_z \boldsymbol{\imath}_z, \quad \mathbf{M} = M_r \boldsymbol{\imath}_r + M_\varphi \boldsymbol{\imath}_\varphi + M_z \boldsymbol{\imath}_z.$$

Компоненты векторных потенциалов на основании (2) определим согласно

$$
\begin{aligned}
L_r &= (C_3 I_{n-1}(q_1 r) + C_4 I_{n+1}(q_1 r)) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz},\\
L_\varphi &= (C_3 I_{n-1}(q_1 r) - C_4 I_{n+1}(q_1 r)) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz},\\
L_z &= C_5 I_n(q_1 r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz},
\end{aligned} \tag{3}
$$

где

$$q_1^2 = k^2 - K_1^2,$$

и

$$
\begin{aligned}
M_r &= (C_6 I_{n-1}(q_2 r) + C_7 I_{n+1}(q_2 r)) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz},\\
M_\varphi &= (C_6 I_{n-1}(q_2 r) - C_7 I_{n+1}(q_2 r)) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz},\\
M_z &= C_8 I_n(q_2 r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz},
\end{aligned} \tag{4}
$$

где

$$q_2^2 = k^2 - K_2^2.$$

Потенциалы **L** и **M** обладают нулевой расходимостью, только если

$$q_1(C_3 + C_4) \pm ikC_5 = 0,$$

$$q_2(C_6 + C_7) \pm ikC_8 = 0.$$

Таким образом, в явном виде получены основные представления векторов перемещений и микровращений в длинном линейном микрополярном цилиндре (4), где скалярные и векторные потенциалы задаются в формах (1), (2) и (3), (4).Такого рода решения содержат восемь произвольных постоянных и определяют формы гармонических волн перемещений и микровращений, распространяющихся вдоль оси длинного кругового цилиндра. Волны имеют заданный азимут n и характеризуются волновым числом k.

10. Заключительные замечания.

1. Рассматривается система связанных динамических векторных дифференциальных уравнений линейной теории микрополярной упругости в терминах перемещений и микровращений в случае гармонической зависимости физических полей от времени. Приводятся три основных варианта уравнений.
2. Выполнено расщепление связанных векторных дифференциальных уравнений микрополярной теории упругости для векторных потенциалов на несвязанные винтовые уравнения.
3. Получено представление векторов перемещений и микровращений с помощью двух несвязанных метагармонических векторных потенциалов.
4. Определены решения скалярного и векторного уравнений Гельмгольца в бесконечной цилиндрической области, содержащие ряд произвольных постоянных.

5. В явной форме указаны представления векторов перемещений и микровращений в длинном линейном микрополярном цилиндре, содержащие восемь произвольных постоянных. Тем самым определяют формы гармонических волн перемещений и микровращений, распространяющихся вдоль оси длинного кругового цилиндра.
6. Полученные результаты находят применение в прикладных задачах волновой механики, связанных с распространением гармонических волн перемещений и микровращений вдоль длинных цилиндрических волноводов.
7. Рассматриваемые гармонические волны перемещений и микровращений в цилиндре имеют смысл только для волновых форм, характеризующихся заданным азимутальным числом (азимутом).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Herman et Fils, Paris, 1909. vi+226 pp.
[2] Саусвелл Р.В. Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 676 с.
[3] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.
[4] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
[5] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics.) Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. xv+345 pp.
[6] Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums// Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft. Band 10. 1958. S. 195–213.
[7] Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums// Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft. Band 16. 1964. S. 1–22.
[8] Palmov V.A. Fundamental Equations of the Theory of Asymmetric Elasticity// Prikl. Math. Mech. Vol. 28, No. 3. 1964. Pp. 401–408.
[9] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper// Acta Mechanica. Vol. 2. 1966. pp. 48–69. DOI: 10.1007/BF01176729
[10] Радаев Ю.Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2018. Т. 22. №3. С. 504–517. doi: 10.14498/vsgtu1635.
[11] Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. In: North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Eds. H.A. Lauwerier, W.T. Koiter. Vol. 16. Amsterdam, London: North-Holland; New York: American Elsevier, 1973. xiv+425 pp.
[12] Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.
[13] Радаев Ю.Н. Представление перемещений в пространственной гармонической теории упругости с помощью двух винтовых векторов// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. №1. 2021. (в печати)
[14] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories/ In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. Pp. 226–902.

Y. N. Radayev

HARMONIC WAVES OF A GIVEN AZIMUTHAL NUMBER IN A MICROPOLAR CYLINDRICAL WAVEGUIDE

Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The coupled system of vector differential equations of the linear theory of micropolar elasticity presented in terms of displacements and micro-rotations in the case of a harmonic dependence of physical fields on time is considered in the three different variants of which the two are due to W. Nowacki and H. Neuber. A new scheme of splitting the coupled vector differential equation of the linear theory of micropolar elasticity into uncoupled ones is proposed. The scheme is based on proportionality of the vortex parts of the displacements and micro-rotations to the single vector, which satisfies the screw equation. The problem of determination of the vortex parts of the displacements and micro-rotations fields is reduced to solution of four uncoupled screw differential equations. A new representation of displacement and micro-rotation vectors is obtained by using two uncoupled metaharmonic vectors. The separation of spatial variables in the Helmholtz metaharmonic equations in a cylindrical coordinate net is described. Solutions of the scalar and vector Helmholtz equations in an infinite cylindrical domain containing a series of arbitrary constants are obtained. Representation of displacement and micro-rotation vectors in a long micropolar cylinder containing eight arbitrary constants are explicitly found. The corresponding solutions are proved to determine the modes of harmonic waves of displacements and micro-rotations propagating along the axis of a long circular cylinder. The obtained modes of the harmonic displacements and micro-rotations waves are valid only for those characterized by a given azimuthal number.

Keywords: micropolar elasticity, displacement vector, micro-rotation vector, vector potential, vortex part, Helmholtz equation, wave, cylinder, wavenumber, azimuthal number

REFERENCES

[1] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Herman et Fils, Paris, 1909. vi + 226 pp.
[2] Southwell R.V. An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists. Moscow: State. publishing house of foreign literature, 1948.676 p.
[3] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii + 383 pp.
[4] Novatsky V. Theory of elasticity. Moscow: Mir, 1975.872 p.
[5] Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics.) Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. xv + 345 pp.
[6] Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft. Band 10.1958.S. 195-213.
[7] Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums // Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft. Band 16.1964, pp. 1–22.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00844).

Radayev Yuri Nickolaevich
`e-mail:` radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.

[8] Palmov V.A. Fundamental Equations of the Theory of Asymmetric Elasticity // Prikl. Math. Mech. Vol. 28, No. 3.1964. Pp. 401-408.

[9] Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper // Acta Mechanica. Vol. 2. 1966. pp. 48-69. Doi: 10.1007 / BF01176729

[10] Radaev Yu.N. The rule of factors in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics // Vestn. Himself. state tech. un-that. Ser. Phys.-mat. Science, 2018. T. 22. No. 3. S. 504-517. doi: 10.14498 / vsgtu1635.

[11] Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. In: North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Eds. H.A. Lauwerier, W.T. Koiter. Vol. 16. Amsterdam, London: North-Holland; New York: American Elsevier, 1973. xiv + 425 pp.

[12] Kovalev V.A., Radaev Yu.N. Wave problems of field theory and thermomechanics. Saratov: Publishing house of Saratov university, 2010.328 p.

[13] Radaev Yu.N. Representation of displacements in the spatial harmonic theory of elasticity using two screw vectors // Izvestiya RAN. Mekhanika Tverdogo Tela No 1. 2021. (in press)

[14] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories / In: Encyclopedia of Physics. Vol. III / 1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. Pp. 226-902.