

Д. В. Гоцев^{1,2}, А. В. Ковалев^{1,2}, А. И. Шашкин¹, А. Ю. Яковлев¹

**ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ
В ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ, ИЗ СТАРЕЮЩЕГО
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА**

¹Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

²Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия
им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж, Россия

Аннотация. В работе в аналитическом виде определяется распределение полей напряжений в эксцентрической трубе, находящейся под действием внутреннего давления. Материал трубы моделировался средой, обладающей наследственно стареющими упругопластическими свойствами. Решение задачи проводилось в рамках метода возмущений. За малый параметр бралась величина эксцентриситета. В качестве невозмущенного состояния принималось осесимметричное упругопластическое напряженное состояние трубы, определенное с учетом возраста и истории нагружения материала. В результате моделирования выведено уравнение для определения формы и размера границы раздела упругой и пластической зон в трубе с эксцентриситетом, а также получены аналитические выражения для компонент напряжений в каждой из областей деформирования.

Ключевые слова: стареющий упругопластический материал, эксцентрическая труба, метод малого параметра, поле напряжений.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.005

УДК: 539.374

Известно, что физико-механические характеристики у таких материалов как бетон, различного рода полимеров, горных пород, льда и других меняются во времени. В связи с этим такие материалы могут быть классифицированы как стареющие (зависящие от возраста материала). При этом процесс их старения может быть обусловлен действием различного рода полей (температурного, радиационного, магнитного и т.д.) — искусственное старение или за счет протекания в них физико-химических превращений — естественное старение.

Отличительной особенностью большинства стареющих материалов является лишь частичная необратимость деформации ползучести. При этом часть необратимой деформации в основном зависит от скорости процесса старения, а также от возраста материала к моменту разгрузки.

Развитию теории пластичности стареющих материалов посвящена работа [1], а также исследования ряда других авторов. В работе [2] развита теория ползучести неоднородно-стареющих тел.

При описании напряженно-деформированного состояния конструкций, выполненных из стареющих материалов с учетом их неупругой работы необходимо учитывать зависимость величины предела текучести от возраста материала. Простейшая модель, учитывающая изменение со временем предела текучести материала, согласно [3], может быть определена следующими соотношениями:

$$e_{ij}^p(t) = \sqrt{I_2(t)} \frac{S_{ij}}{k(t)}, \quad \frac{S_{ij}}{k(t)} \frac{S_{ij}}{k(t)} = 2, \quad (1)$$

где $e_{ij}^p(t)$, S_{ij} — компоненты тензора скоростей пластических деформаций и деватора тензора напряжений соответственно; $I_2(t) = \frac{1}{2} e_{ij}^p(t) e_{ij}^p(t)$; $k(t)$ — предел текучести материала.

Отметим, что модель (1) может быть использована для описания механического поведения тела в случае, если предел текучести материала во всех точках тела имеет одинаковую величину, изменяющуюся во времени по одному и тому же закону для любого фиксированного возраста материала.

© Д. В. Гоцев, А. В. Ковалев, А. И. Шашкин, А. Ю. Яковлев, 2020

Гоцев Дмитрий Викторович

e-mail: rbgotsev@mail.ru, профессор, доктор физико-математических наук, Воронежский государственный университет; профессор, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия.

Ковалев Алексей Викторович

e-mail: kav-mail@mail.ru, профессор, доктор физико-математических наук, Воронежский государственный университет; ст. научный сотрудник, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия.

Шашкин Александр Иванович

e-mail: shashkin@amm.vsu.ru, профессор, доктор физико-математических наук, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Яковлев Александр Юрьевич

e-mail: yakovlev@amm.vsu.ru, доцент, кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 01.09.2020

Модель (1) может быть обобщена на случай вязко-пластического тела с неоднородно-стареющим пределом текучести в виде [3]

$$e_{ij}^p(t) = \sqrt{I_2(t)} \frac{S_{ij}}{k(t + \chi(r))}, \quad \frac{S_{ij}}{k(t + \chi(r))} \frac{S_{ij}}{k(t + \chi(r))} = 2, \quad (2)$$

где r — радиус-вектор точки тела; $\chi(r)$ — функция, характеризующая изменение возраста материала в элементах стареющего тела относительно элемента с $r = \{0, 0, 0\}$. В выражении (2) предел текучести различных элементов рассматриваемого тела изменяется по одному и тому же временному закону, но с тем или иным запаздыванием, зависящим от возраста материала данного элемента тела.

Определяющие соотношения теории идеальной вязко-пластичности для неоднородно-стареющих тел с “памятью” можно представить в форме [3]

$$e_{ij}^p(t) = \sqrt{I_2(t)} \left(\frac{S_{ij}}{k(t + \chi(r))} + \int_{\tau_0}^t S_{ij}(\tau) K(t + \chi(r), \tau + \chi(r)) d\tau \right),$$

$$\left(\frac{S_{ij}}{k(t + \chi(r))} + \int_{\tau_0}^t S_{ij}(\tau) K(t + \chi(r), \tau + \chi(r)) d\tau \right)^2 = 2, \quad (3)$$

где τ_0 — момент приложения напряжений к телу; $K(t, r)$ — ядро наследственного оператора, учитывающего эффект последствия в процессе деформирования.

Заметим, что поскольку процесс естественного или искусственного старения в теле протекает неодинаково во всех его элементах, то в (3) предел текучести материала будет являться функцией момента наблюдения и пространственных координат.

Исследованию модельных задач теории ползучести неоднородно-стареющих тел, допускающих нахождение точных или приближенных аналитических решений, посвящены работы [2, 6, 7] и др.

В исследованиях [4, 5] получены приближенные аналитические выражения, описывающие распределения полей напряжений в толстой плите в окрестности эллиптического [4] или кругового [5] отверстий при двухосном растяжении с учетом возраста и истории нагружения упруго-пластического материала.

Настоящая работа посвящена исследованию напряженного состояния эксцентрической трубы, находящейся под действием внутреннего равномерно распределенного давления интенсивностью $P_0(t)$, меняющегося со временем. Свойства материала трубы моделируются однородной наследственно стареющей средой, обладающей одновременно упругими и пластическими свойствами. Предполагается, что при рассматриваемой схеме нагружения в трубе возникает пластическая зона, которая полностью охватывает ее внутреннюю поверхность. Для реализации такого состояния необходимым является условие монотонного возрастания внутреннего давления $P_0(t)$ со временем. Задача решается в рамках плоско-деформированного состояния в цилиндрической системе координат (ρ, θ, z) , при этом ось Oz направлена вдоль центральной оси внутреннего отверстия трубы. В этом случае напряженное состояние будет характеризоваться двумя главными компонентами тензора напряжений: радиальной $\sigma_\rho(\rho, \theta, t)$, окружной $\sigma_\theta(\rho, \theta, t)$ и одной касательной $\tau_{\rho\theta}(\rho, \theta, t)$.

Уравнения равновесия в полярной системе координат имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \quad (4)$$

Пусть к рассматриваемому моменту времени $t = 0$ вблизи внутренней поверхности трубы (область пластического деформирования) выполняется условие наследственной пластичности [2], которое имеет вид

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\sigma_\rho(t) - \sigma_\theta(t)}{k(t)} + \int_0^t (\sigma_\rho(\tau) - \sigma_\theta(\tau)) K(t, \tau) d\tau \right)^2 + \left(\frac{\tau_{\rho\theta}}{k(t)} + \int_0^t K(t, \tau) \tau_{\rho\theta}(\tau) d\tau \right)^2 = 1. \quad (5)$$

Решение поставленной задачи будем проводить в рамках метода малого параметра, в качестве которого выбирается величина δ , характеризующая отклонение центров внутреннего и внешнего контуров трубы друг от друга. Суть данного метода состоит в том, что все неизвестные компоненты представляются в виде рядов по степеням этого малого параметра [8, 9]. Далее выделяются члены разложения при одинаковых степенях этого параметра, которые определяют систему уравнений, позволяющую развить метод последовательных приближений при условии того, что решение при $\delta = 0$ (нулевое приближение) известно.

В настоящей работе ограничимся только линейными по δ членами разложений

$$\sigma_\rho = \sigma_\rho^{(0)} + \delta \sigma_\rho^{(1)}, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^{(0)} + \delta \sigma_\theta^{(1)}, \quad \tau_{\rho\theta} = \tau_{\rho\theta}^{(0)} + \delta \tau_{\rho\theta}^{(1)}, \quad r_s(t) = r_s^{(0)}(t) + \delta r_s^{(1)}(t), \quad (6)$$

где $r_s(t)$ — радиус раздела зон упругого и пластического деформирования в трубе; верхний индекс указывает на номер приближения.

Уравнение внешнего контура трубы в плоскости, перпендикулярной оси Oz , до деформации согласно [8] примем в форме

$$\rho = \beta + \delta \cos \theta, \quad (7)$$

где β — радиус внешнего контура трубы в невозмущенном состоянии.

Решение проведем в относительных величинах, оставив им их прежние обозначения. При этом параметры и переменные, имеющие размерность напряжений, отнесем к значению предела текучести на сдвиг материала трубы $k(t)$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. $k_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} k(t)$; геометрические характеристики отнесем к радиусу $r_s^{(0)}(0)$ упругопластической границы в нулевом приближении в начальный момент времени; время t отнесем к некоторой константе t_0 , имеющей размерность времени.

За нулевое приближение выберем осесимметричное состояние трубы без эксцентриситета с внешним радиусом β и внутренним α . По внутренней поверхности трубы действует равномерно распределенное нормальное давление интенсивностью $P_0(t) = P_0(t)/k_\infty$.

В случае нулевого приближения имеет место осесимметричная задача и два уравнения равновесия (4) сведутся к одному:

$$\frac{\partial \sigma_\rho^{(0)}}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}}{\rho} = 0, \quad (8)$$

условие наследственной пластичности (5) переписывается в форме

$$\frac{\sigma_\rho^{(0)}(t) - \sigma_\theta^{(0)}(t)}{k(t)} \eta + \int_0^t \eta (\sigma_\rho(\tau) - \sigma_\theta(\tau)) K^0(\tau) d\tau = 2, \quad (9)$$

где

$$\eta = \sigma_\rho^{(0)}(t) - \sigma_\theta^{(0)}(t), \quad K^0(\tau) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{k(\tau)} \right).$$

Пусть в пластической зоне $\sigma_\rho^{(0)}(t) < \sigma_\theta^{(0)}(t)$, то есть $\eta = -1$. В этом случае, решая уравнения (8), (9) с учетом непрерывности обоих компонент тензора напряжений на упругопластической границе, согласно работам [4,5] распределение полей напряжений в упругой зоне деформирования описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(0)e}(\rho, t) &= \varphi(t)k(t) \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\rho^2} \right), \\ \sigma_\theta^{(0)e}(\rho, t) &= \varphi(t)k(t) \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\rho^2} \right), \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

в пластической области — формулами

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(0)p}(\rho, t) &= 2k(t)\varphi(t) \ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) - P_0(t), \\ \sigma_\theta^{(0)p}(\rho, t) &= 2k(t)\varphi(t) \left(\ln \left(\frac{\rho}{\alpha} \right) + 1 \right) - P_0(t), \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)p} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь и далее индекс “*p*” сверху величин указывает их принадлежность к пластической зоне, а индекс “*e*” — к упругой; $\varphi(t)$ — функция времени.

Трансцендентное уравнение для нахождения радиуса раздела зон упругого и пластического деформирования в нулевом приближении имеет вид

$$\left(e_s^{(0)}(t) \right)^2 + \beta^2 \left(2k(t)\varphi(t)(\ln(\alpha r_s^{(0)}(t)) - 1) + 1 + P_0(t) \right) = 0. \quad (12)$$

Аналитические зависимости (10)–(12), описывающие распределение поля напряжений в нулевом приближении, позволяют перейти к решению задачи в первом приближении.

Линеаризованные граничные условия на внешнем контуре трубы при $\rho = \beta$ для первого приближения имеют форму [8]

$$\sigma_\rho^{e(1)} = -2k(t)\varphi(t)\beta^{-3} \cos \theta, \quad \tau_{\rho\theta}^{e(1)} = -2k(t)\varphi(t)\beta^{-3} \sin \theta. \quad (13)$$

Линеаризованные условия сопряжения напряжений на упругопластической границе в трубе для первого приближения в общем виде описываются соотношениями

$$\left[\sigma_{ij}^{(1)} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial \rho} r_s^{(1)} \right] \Big|_{\rho=1} = 0, \quad (14)$$

где $\sigma_{ij}^{(0)}$, $\sigma_{ij}^{(1)}$ — компоненты тензора напряжений для нулевого и первого приближения; $r_s^{(1)}$ — величина, описывающая контур границы упругой и пластической областей деформирования в первом приближении. Здесь и далее квадратные скобки обозначают разность стоящих в них величин, посчитанных в упругой и пластической областях деформирования.

Граничные условия для первого и последующих приближений на внутреннем контуре отверстия в трубе [2, 8, 9] представляются следующими выражениями:

$$\sigma_{\rho}^{(n)p} \Big|_{\rho=\alpha} = 0, \quad \tau_{\rho\theta}^{(n)p} \Big|_{\rho=\alpha} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

В зоне упругого деформирования трубы из стареющего материала согласно [2, 8, 9] и с учетом условий (13) компоненты напряжений в первом приближении будут описываться формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(1)e} &= -\frac{2k(t)\varphi(t)}{\beta^4} \left(\rho + \frac{1}{\beta^4 - 1} \left(\rho - \frac{\beta^4}{\rho^3} \right) \right) \cos \theta, \\ \sigma_{\theta}^{(1)e} &= -\frac{2k(t)\varphi(t)}{\beta^4} \left(3\rho + \frac{1}{\beta^4 - 1} \left(3\rho + \frac{\beta^4}{\rho^3} \right) \right) \cos \theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)e} &= -\frac{2k(t)\varphi(t)}{\beta^4} \left(\rho + \frac{1}{\beta^4 - 1} \left(\rho - \frac{\beta^4}{\rho^3} \right) \right) \sin \theta. \end{aligned} \quad (16)$$

В пластической области трубы с учетом нулевых граничных условий (15) и однородности разрешающего дифференциального уравнения получаем нулевые компоненты напряжений в первом приближении.

Вид упругопластической границы в первом приближении $r_s^{(1)}$ определяется линеаризованным условием вида [2, 8]

$$r_s^{(1)} = - \left[\sigma_{\theta}^{(1)} \right] \left[\frac{\partial \sigma_{\theta}^{(0)}}{\partial \rho} \right]^{-1} \Big|_{\rho=1}$$

или, с учетом (11) и (16), соотношением

$$r_s^{(1)} = -\frac{2}{\beta^4 - 1} \cos \theta. \quad (17)$$

Таким образом, полученные соотношения (6), (10)–(12), (10) описывают напряженное состояние в эксцентрической трубе из стареющего упругопластического материала для нулевого и первого приближений. При этом граница раздела зон упругого и пластического деформирования определяется соотношениями (6), (12), (17).

Если в формулах (10)–(12), (16), (17) принять, что нагрузка не изменяется со временем и положить $k(t) = k(0)$, то полученные решения совпадут с результатами для упругопластической задачи [8].

В качестве исходных данных для проведения численного эксперимента по полученным соотношениям примем

$$k(t) = \frac{1 - \gamma e^{-0,1t}}{1 - \gamma}, \quad \varphi(t) = \frac{(1 - \gamma e^{-0,1t})^2}{(1 - \gamma)^2},$$

$$P_0(t) = 2, \quad \alpha = 0,5, \quad \beta = \frac{5}{3}, \quad \delta = 0,1, \quad \gamma = 0,2.$$

На рис. 1 представлены внешний (кривая Л1) и внутренний (кривая Л2) контуры трубы, а также форма и размер границы раздела зон упругого и пластического деформирования материала в различные моменты времени: кривая Л3 — в нулевой момент времени, кривая Л4 — при $t = 10$, кривая Л5 — при $t \rightarrow \infty$.

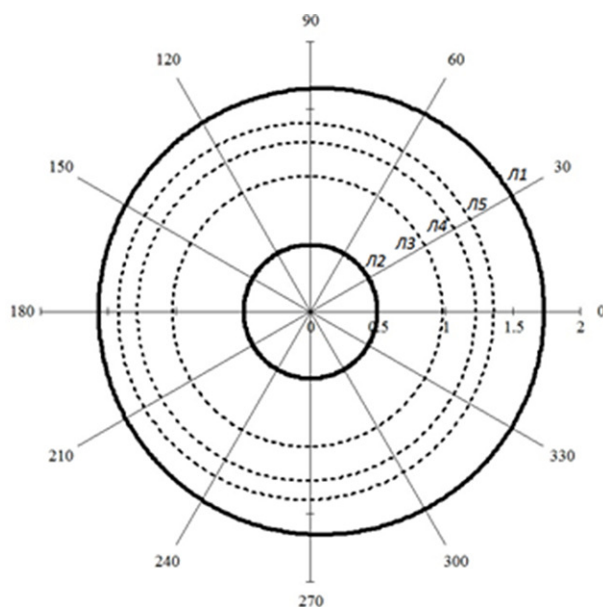


Рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Арутюнян Р. А., Каменцева Э. П. Упрочнение стареющих сплавов // Изв. АН СССР, МТТ. 1976. № 4.
- [2] Арутюнян Н. Х., Ивлев Д. Д. К теории вязкопластичности неоднородно-стареющих тел // Изв. АН АрмССР. Механика. 1996. Т. 35, № 5. С. 22–26.
- [3] Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. Т. 2. 448 с.
- [4] Милявская Ф. Б. О двусосном растяжении толстой пластины с эллиптическим отверстием из стареющего материала // Краевые задачи и их приложения. Чебоксары: Чуваш. ун-т, 1987. С. 169–174.
- [5] Милявская Ф. Б. Двусосное растяжение пластины с круговым отверстием из стареющего упругопластического материала // Краевые задачи и их приложения. Чебоксары: Чуваш. ун-т, 1986. С. 82–90.
- [6] Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Институт механики НАН, 1999. 320 с.
- [7] Manzhirou A. V. Fundamentals of mechanical design and analysis for am fabricated parts // Procedia Manufacturing. 2017. Vol. 7. P. 59–65. doi:10.1016/j.promfg.2016.12.017.
- [8] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.
- [9] Спорыхин А. Н., Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д. Неодномерные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2004. 219 с.

D. V. Gotsev^{1,2}, A. V. Kovalev^{1,2}, A. I. Shashkin¹, A. U. Yakovlev¹

ON THE DETERMINATION OF THE VOLTAGE FIELD IN THE ECCENTRIC TUBE, FROM AN AGING ELASTICPLASTIC MATERIAL

¹ Voronezh State University, Voronezh, Russia

² Training and scientific center of the air force "AirForce academy named after professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin", Voronezh, Russia

Abstract. In this work, the distribution of stress fields in an eccentric pipe under the action of internal pressure is determined in an analytical form. The pipe material was modeled by a medium with hereditarily aging elastoplastic properties. The problem was solved within the framework of the perturbation method. The eccentricity value was taken as a small parameter. The unperturbed state was taken to be the axisymmetric elastoplastic stress state of the pipe, determined taking into account the age and loading history of the material. As a result of modeling, an equation was derived to determine the shape and size of the interface between the elastic and plastic zones in a pipe with eccentricity, and analytical expressions were obtained for the stress components in each of the deformation regions.

Keywords: aging elastoplastic material, eccentric tube, small parameter method, stress field.

REFERENCES

- [1] Harutyunyan P. A., Kamentseva E. P. Hardening of aging alloys // *Izv. USSR Academy of Sciences, MTT*. 1976. no. 4. (in Russian).
- [2] Harutyunyan H. H., Ivlev D. D. To the theory of viscoplasticity, not -od -but -gender -no one hundred -special bodies // *Izv. Academy of Sciences of the Armenian SSR. Mechanics*. 1996. Vol. 35, no. 5. P. 22–26. (in Russian).
- [3] Ivlev D. D. *Mechanics of Plastic Media*. Moscow: FISMATLIT, 2002. Vol. 2. 448 p. (in Russian).
- [4] Milyavskaya B. About biaxial stretching of a thick plate with an elliptical hole made of aging material // *Boundary value problems and their applications*. Cheboksary: Chuvash. un-t, 1987. P. 169–174. (in Russian).
- [5] Milyavskaya B. Biaxial tension of a plate with a circular hole from an aging elastoplastic material // *Boundary value problems and their applications*. Cheboksary: Chuvash. un-t, 1986. P. 82–90. (in Russian).
- [6] Harutyunyan H. H., Manzhairov A. V. *Contact problems of creep theory*. Yerevan: Institute of Mechanics NAS, 1999. 320 p. (in Russian).
- [7] Manzhairov A. V. Fundamentals of mechanical design and analysis for am fabricated parts // *Procedia Manufacturing*. 2017. Vol. 7. P. 59–65. doi: 10.1016 / j.promfg.2016.12.017.
- [8] Ivlev D. D., Ershov L. V. *Perturbation method in the theory of an elastoplastic body*. Moscow: Science, 1978. 208 p. (in Russian).
- [9] Sporykhin A. N., Kovalev A. V., Shcheglova Y. D. *Non-one-dimensional elastic-viscoplastic problems with unknown boundary*. Voronezh: Publishing house of Voronezh State University, 2004. 219 p. (in Russian).

Gotsev Dmitry Viktorovich, Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Voronezh State University; Professor, Training and scientific center of the air force "AirForce academy named after professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin", Voronezh, Russia.

Kovalev Alexey Viktorovich, Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Voronezh State University; Professor, Training and scientific center of the air force "AirForce academy named after professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin", Voronezh, Russia.

Shashkin Alexander Ivanovich, Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Yakovlev Alexander Yurievich, Associate Professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Voronezh State University, Voronezh, Russia.