Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4 (46). С. 101–106

Н. А. Локтева, Д. О. Сердюк, П. Д. Скопинцев

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА АНИЗОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ КИРХГОФА-ЛЯВА

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

Аннотация. Строится нестационарная функция прогиба для тонкой бесконечной цилиндрической оболочки постоянной толщины при воздействии на ее боковую поверхность вынужденной нестационарной движущейся нагрузки, распределенной по прямоугольной области. Материал рассматриваемой цилиндрической оболочки принят упругим и анизотропным, обладающим симметрией относительно ее срединной плоскости. Теория тонких упругих оболочек строится на гипотезах Кирхгофа-Лява. Для математического описания мгновенно приложенной нагрузки используются дельта-функции Дирака.

Ключевые слова: анизотропная цилиндрическая оболочка, нестационарная динамика, функция влияния, функция прогиба, обобщенные функции, интегральные преобразования, квадратурные формулы, нормальное перемещение, оболочка Кирхгофа-Лява.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.006

УДК: 539.31

Введение. Задачи по исследованию нестационарной динамики изотропных упругих пластин Кирхгофа-Лява наиболее полно изучены на данный момент [1]. В работах [2,3] рассмотрен широкий круг проблем динамики ортотропных цилиндрических оболочек, их осесимметричное и неосесимметричное деформирование при продольном

Локтева Наталья Александровна
e-mail: nlok@rambler.ru, к.т.н., доцент, доцент кафедры сопротивление материалов, динамика и прочность машин, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия.
Сердюк Дмитрий Олегович
e-mail: d.serduk55@gmail.com, к.т.н., доцент кафедры сопротивление материалов, динамика и прочность машин, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия.
Скопинцев Павел Дмитриевич
e-mail: chgpashka@gmail.com, аспирант кафедры сопротивление материалов, динамика и прочность машин, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-08-00968 А).

Поступила 01.07.2020

ударе. В работе [4] отражены проблемы деформирования подкрепленных цилиндрических оболочек при действии динамических сжимающих осевых нагрузок и внешнего давления. В работе [5] по изучению динамики оболочек автор рассматривал тонкостенные однородные цилиндрические оболочки из композиционных материалов при импульсном воздействии.

В данной работе исследуется процесс воздействия движущейся нестационарной нагрузки на упругую анизотропную неограниченную цилиндрическую оболочку.

1. Постановка задачи. Объектом исследования является бесконечная тонкая цилиндрическая оболочка (см. рис. 1). Оболочка имеет радиус R и постоянную толщину h. Материал оболочки принимается упругим и анизотропным. Упругая среда в рассматриваемом случае анизотропии имеет одну плоскость симметрии - срединная плоскость оболочки.

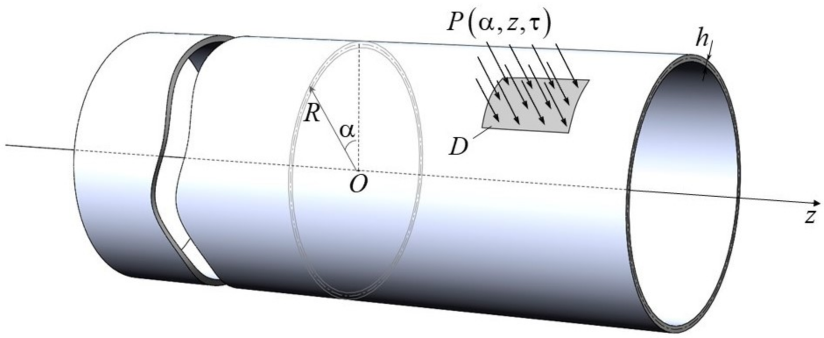

Рис. 1. Цилиндрическая оболочка под воздействием нестационарной нагрузки

Рассматриваемый материал, применительно к тонкой оболочке типа Кирхгофа-Лява, характеризуется шестью независимыми упругими постоянными:

$$c_{11} = C^{1111},\ c_{12} = C^{1122},\ c_{16} = C^{1112}, c_{22} = \ C^{2222},\ c_{26} = C^{1222},\ c_{66} = C^{1212}.$$

В начальный момент времени оболочка находится в состоянии покоя. Далее на нее воздействует нестационарная нагрузка $P(\alpha, z, \tau)$, распределенная по области D, принадлежащей боковой поверхности оболочки. Движение оболочки рассматривается в цилиндрической системе координат $OR\alpha z$.

Постановка задачи включает в себя безразмерные уравнения движения упругой оболочки Кирхгофа-Лява, соответствующие геометрические и физические соотношения с учетом симметрии свойств материала исследуемой оболочки [1, 6, 7]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \tau^2} = K_{11}(u_\alpha) + K_{12}(u_z) + K_{13}(w) + q_\alpha, \\
\frac{\partial^2 u_z}{\partial \tau^2} = K_{21}(u_\alpha) + K_{22}(u_z) + K_{23}(w) + q_z, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = K_{31}(u_\alpha) + K_{32}(u_z) + K_{33}(w) + p.
\end{gathered} \tag{1}$$

$$K_{11}(u_\alpha) = \frac{1}{k^2} u_{\alpha,\alpha\alpha} + \frac{2\mathrm{C}_2}{k} u_{\alpha,\alpha z} + \left(\frac{\mathrm{C}_5}{12k^2} + \mathrm{C}_5\right) u_{\alpha,zz},$$

$$K_{12}(u_z)=\frac{\mathrm{C}_2}{k^2}u_{z,\alpha\alpha}+\left(\frac{\mathrm{C}_1}{k}+\frac{\mathrm{C}_5}{k}-\frac{\mathrm{C}_5}{12k^3}\right)u_{z,\alpha z}+\mathrm{C}_4u_{z,zz}, \tag{2}$$

$$K_{13}(w)=\frac{1}{k^2}w_{,\alpha}-\frac{\mathrm{C}_5}{6k^2}w_{,\alpha zz}-\frac{\mathrm{C}_2}{12k^3}w_{,\alpha\alpha z}+\left(\frac{\mathrm{C}_2}{k}-\frac{\mathrm{C}_2}{12k^3}\right)w_{,z}-\frac{\mathrm{C}_4}{12k}w_{,zzz}.$$

$$K_{21}(u_\alpha)=K_{12}(u_\alpha),$$
$$K_{22}(u_z)=\left(\frac{\mathrm{C}_5}{k^2}+\frac{\mathrm{C}_5}{12k^4}\right)u_{z,\alpha\alpha}+\frac{2\mathrm{C}_4}{k}u_{z,\alpha z}+\mathrm{C}_3u_{z,zz}, \tag{3}$$
$$K_{23}(w)=\frac{\mathrm{C}_2}{12k^4}w_{,\alpha\alpha\alpha}+\left(\frac{\mathrm{C}_2}{k^2}+\frac{\mathrm{C}_2}{12k^4}\right)w_{,\alpha}+\frac{\mathrm{C}_5}{6k^3}w_{,\alpha\alpha z}+\frac{\mathrm{C}_4}{12k^2}w_{,\alpha zz}+\mathrm{C}_1w_{,z}.$$

$$K_{31}(u_\alpha)=-K_{13}(u_\alpha),\ K_{32}(u_z)=-K_{23}(u_z),$$
$$K_{33}(w)=-\frac{1}{12k^4}w_{,\alpha\alpha\alpha\alpha}-\frac{1}{6k^4}w_{,\alpha\alpha}-\frac{\mathrm{C}_1}{6k^2}w_{,\alpha\alpha zz}-\frac{\mathrm{C}_4}{3k}w_{,\alpha zzz}-\frac{\mathrm{C}_2}{3k^3}w_{,\alpha\alpha\alpha z}- \tag{4}$$
$$-\frac{\mathrm{C}_5}{3k^2}w_{,\alpha\alpha zz}-\frac{\mathrm{C}_2}{3k^3}w_{,\alpha z}-\frac{\mathrm{C}_3}{12}w_{,zzzz}-\frac{\mathrm{C}_1}{6k^2}w_{,zz}-\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{12k^4}\right)w.$$

В (1) – (4) следующие безразмерные величины: τ – время, k – коэффициент отношения радиуса оболочки к ее толщине, C_i – упругие константы,w – нормальное перемещение, u_α, u_z – компоненты вектора тангенциальных перемещений, q_i – тангенциальное давление, p – нормальное давление.

Безразмерные упругие константы в (2)-(4) заданы следующим образом:

$$C_1=\frac{c_{12}}{c_{11}},\ C_2=\frac{c_{16}}{c_{11}},\ C_3=\frac{c_{22}}{c_{11}},\ C_4=\frac{c_{26}}{c_{11}},\ C_5=\frac{c_{66}}{c_{11}}.$$

Уравнения (1) – (4) совместно с начальными условиями

$$u_\alpha|_{\tau=0}=0,\ \left.\frac{\partial u_\alpha}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=0,\ u_z|_{\tau=0}=0,\ \left.\frac{\partial u_z}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=0,\ w|_{\tau=0}=0,\ \left.\frac{\partial w}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=0 \tag{5}$$

образуют начальную задачу.

Цель заключается в построении нестационарной функции нормальных перемещений $w\left(\alpha,z,\tau\right)$ в ответ на действие нестационарной нагрузки $P\left(\alpha,z,\tau\right)$.

2. Нестационарная функции прогиба. Решение начальной задачи (1) – (5) может быть построено с помощью функции влияния $G_w\left(\alpha,z,\tau\right)$ для нормального перемещения [1]:

$$w\left(\alpha,z,\tau\right)=G_w\left(\alpha,z,\tau\right)***P\left(\alpha,z,\tau\right). \tag{6}$$

В (6) через $*$ обозначены свертки по пространственным координатам α, z и безразмерному времени τ.

Функции влияния нормальных перемещений $G_w\left(\alpha,z,\tau\right)$ и тангенциальных перемещений $G_{u_\alpha}\left(\alpha,z,\tau\right)$ и $G_{u_z}\left(\alpha,z,\tau\right)$ – решение следующей задачи:

$$\frac{\partial^2G_{u_\alpha}}{\partial\tau^2}=K_{11}(G_{u_\alpha})+K_{12}(G_{u_z})+K_{13}(G_w),$$
$$\frac{\partial^2G_{u_z}}{\partial\tau^2}=K_{21}(G_{u_\alpha})+K_{22}(G_{u_z})+K_{23}(G_w), \tag{7}$$
$$\frac{\partial^2G_w}{\partial\tau^2}=K_{31}(G_{u_\alpha})+K_{32}(G_{u_z})+K_{33}(G_w)+\delta\left(\alpha,z\right)\delta\left(\tau\right).$$

$$G_{u_\alpha}\big|_{\tau=0}=\left.\frac{\partial}{\partial\tau}G_{u_\alpha}\right|_{\tau=0}=G_{u_z}\big|_{\tau=0}=\left.\frac{\partial}{\partial\tau}G_{u_z}\right|_{\tau=0}=G_w\big|_{\tau=0}=\left.\frac{\partial}{\partial\tau}G_w\right|_{\tau=0}=0.$$

Где $\delta\,(*)$ – дельта-функция Дирака, а дифференциальные операторы $K_{ij}(G_k)$ имеют вид (2) – (4), где необходимо заменить соответствующие искомые функции на функции влияния.

Для решения поставленной начальной задачи применим к (7) разложения в экспоненциальные ряды Фурье по углу α, а также интегральные преобразования Фурье по координате z и Лапласа по времени τ. В результате получим систему алгебраических уравнений относительно изображений функций влияния в пространстве преобразований Фурье и Лапласа в коэффициентах рядов.

Оригинал функции влияния прогиба по Лапласу найден аналитически при помощи таблиц [8] с предварительным применением метода неопределенных коэффициентов. Для нахождения оригинала по Фурье применим численный метод интегрирования быстро осциллирующих функций [9].

С учетом разложения в экспоненциальные ряды нестационарная функция влияния для нормального прогиба анизотропной неограниченной цилиндрической оболочки Кирхгофа-Лява примет вид:

$$G_w(\alpha,z,\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\alpha}\frac{\Delta}{2}\left(e^{i\frac{q_{k+1}z+q_kz}{2}}\cdot\left(D_1G_{wn}^F\left(q_k,\tau\right)+D_2G_{wn}^F\left(q_{k+1},\tau\right)\right)\right).\qquad(8)$$

Где:

$$\Delta=\frac{2A}{N},\ m=\frac{\Delta}{2},\ D_{1,2}=\frac{\sin m}{m}\pm\frac{m\cos m-\sin m}{m^2}i,$$
$$q_k=A+k\Delta,\ q_{k+1}=A+(k+1)\,\Delta,\ k=0..N-1.$$

При воздействии на боковую поверхность оболочки движущейся нагрузки, распределенной в виде полосы, выражение для $P\,(\alpha,z,\tau)$ примет вид:

$$P\,(\alpha,z,\tau)=p\,(\tau)\,H\,(\tau)\left[H\left(\alpha+\frac{\beta}{2}-\tau\right)-H\left(\alpha-\frac{\beta}{2}-\tau\right)\right]\times$$
$$\times\left[H\left(z+\frac{b}{2}-\tau\right)-H\left(z-\frac{b}{2}-\tau\right)\right],\qquad(9)$$

где $H\,(\tau)$ – функция Хевисайда.

Интегралы сверток (6) с учетом (8) и (9) берутся численным методом прямоугольников [9]. Приближенное выражение для искомой функции нестационарного прогиба примет вид:

$$w\,(\alpha,z,\tau)\approx\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{s}\frac{a}{n}\frac{b}{m}\frac{\tau}{s}G_{wijk}\,(\alpha,z,\tau)\,p\left(\frac{\tau}{s}k\right),\qquad(10)$$
$$G_{wijk}\,(\alpha,z,\tau)=G_w\left(\alpha-\frac{\beta}{n}i+\frac{\beta}{2}-\frac{\tau}{s}k,z-\frac{b}{m}j+\frac{b}{2}-\frac{\tau}{s}k,\tau-\frac{\tau}{s}k\right).$$

Соотношение (10) позволяет исследовать пространственно-временные распространения нестационарных колебаний в неограниченной анизотропной оболочке Кирхгофа-Лява от воздействия вынужденной нестационарной движущейся распределенной нагрузки.

На рис. 2 представлены пространственные зависимости нестационарного прогиба оболочки при воздействии нестационарной движущейся распределенной по области с размерами $z = 0.2,\ \alpha = \pi/12$ нагрузки вида:

$$p(\tau) = (150 \sin(0.09\tau))^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\tau}{5}},$$

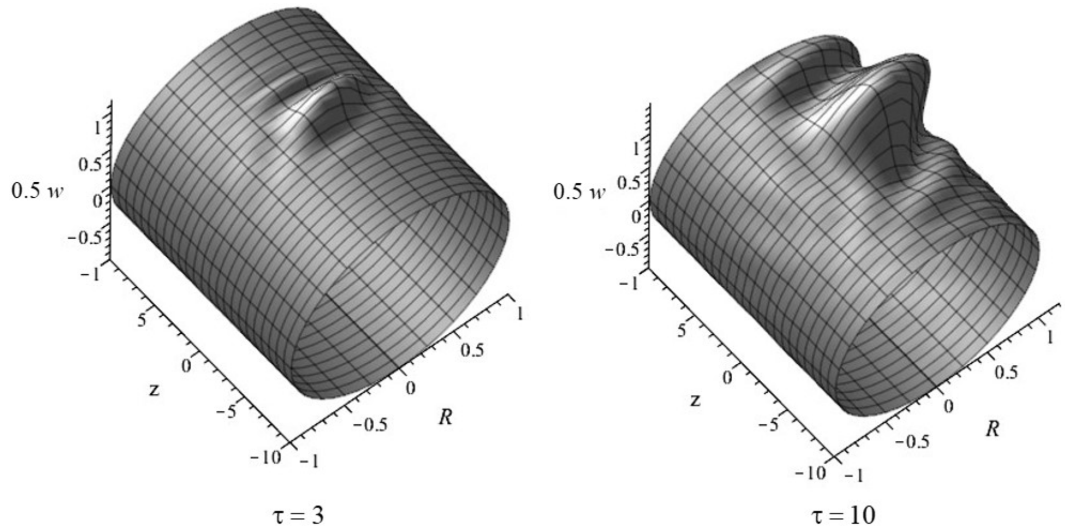

Рис. 2. Нестационарный прогиб оболочки

в безразмерные моменты времени 3 сек и 10 сек при следующих безразмерных параметрах:

$$C_1 = 0.814,\ C_2 = -0.735,\ C_3 = 0.717,\ C_4 = -0.630, C_5 = 0.574,\ k = 45.$$

На рис. 2 видно смещение максимального прогиба оболочки вдоль оси z и по углу α с течением времени, при этом виден несимметричный характер прогиба оболочки, что соответствует особенностям анизотропной упругой среды.

Выводы. Построена нестационарная функция прогиба для неограниченной анизотропной цилиндрической оболочки Кирхгофа-Лява при воздействии движущейся распределенной нестационарной нагрузки. Для построения функции прогиба была поставлена задача о нестационарной функции влияния, отыскание которой велось при помощи прямых и обратных интегральных преобразований Лапласа и Фурье, а также с применением разложений в экспоненциальные ряды. Приведен пример расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н. Волны в сплошных средах: Учеб. пособие.: для вузов. -М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 472 с.
[2] Богданович А. Е. Деформирование и прочность цилиндрических композитных оболочек при динамических нагрузках. Рига, 1985. 560 с.
[3] Богданович А. Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига, 1987. 295 с.
[4] Кошкина Т. Б. Деформирование и прочность подкрепленных композитных цилиндрических оболочек при динамических сжимающих нагрузках. Академия наук Латвийской ССР. Рига, 1984. 180 с.

[5] Сибиряков А. В. Динамика слоистых композиционных пластин и оболочек при импульсном нагружении: диссертация доктора технических наук: 01.02.06. М., 2002. 319 с.
[6] Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Общие соотношения и вариационные принципы математической теории упругости: Учебное пособие. М. : МАИ-ПРИНТ, 2009. 112 с.
[7] Михайлова Е. Ю., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Упругие пластины и пологие оболочки: Учебное пособие. М. : МАИ, 2018. 92 с.
[8] Деч Г., Ивлев Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразований. М. : Наука, 1971. 288 с.
[9] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М. : Наука, 1975. 630 с.

N. A. Lokteva, D. O. Serdyuk, P. D. Skopintsev

NON-STATIONARY DYNAMICS OF ANISOTROPIC KIRCHHOFF-LOVE TYPE SHEL

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

Abstract. A non-stationary deflection function is determined for a thin infinite cylindrical shell of constant thickness under the influence of non-stationary moving pressure. The pressure is distributed over a rectangular region, which belongs to the side surface of the shell. The shell material is elastic, anisotropic, and has symmetry to the median surface. The theory of thin elastic shells is based on the Kirchhoff-Love's hypotheses. The Dirac delta-functions are used to describe an instantaneously applied pressure.

Keywords: anisotropic cylindrical shell, non-stationary dynamics, influence function, deflection function, summarize function, integral transformation, quadrature equations, normal deflection, Kirchhoff-Love type shell.

REFERENCES

[1] Gorshkov A. G., Medvedsky A. L., Rabinsky L. N. Waves in Continuous Media: Textbook. allowance .: for universities. -M. : FIZMATLIT, 2004. 472 p.
[2] Bogdanovich A. E. Deformation and strength of cylindrical composite shells under dynamic loads. Riga, 1985. 560 p.
[3] Bogdanovich A. E. Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells. Riga, 1987. 295 p.
[4] Koshkina T. B. Deformation and strength of reinforced composite cylindrical shells under dynamic compressive loads. Academy of Sciences of the Latvian SSR. Riga, 1984. 180 p.
[5] Sibiryakov A. V. Dynamics of layered composite plates and shells under pulsed loading: dissertation of Doctor of Technical Sciences: 01.02.06. M., 2002. 319 p.
[6] Tarlakovsky D. V., Fedotenkov G. V. General relations and variational principles of the mathematical theory of elasticity: Textbook. M. : MAI-PRINT, 2009. 112 p.
[7] Mikhailova E. Yu., Tarlakovsky D. V., Fedotenkov G. V. Elastic Plates and Shallow Shells: A Tutorial. M. : MAI, 2018. 92 p.
[8] Dech G., Ivlev G. A guide to the practical application of the Laplace transform and Z-transformations. M. : Nauka, 1971. 288 p.
[9] Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobelkov G. M. Numerical methods. M. : Science, 1975. 630 p.

Lokteva Natalya Alexandorovna Ph.D and Associate Professor, Associate Professor, Department of Strength of Materials, Machinery Dynamics and Strength, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia.

Serdyuk Dmitriy Olegovich Ph.D, Associate Professor, Department of Strength of Materials, Machinery Dynamics and Strength, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia.

Skopintsev Pavel Dmitrievich Postgraduate student, Department of Strength of Materials, Machinery Dynamics and Strength, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia.