*Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева*
*Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4 (46). С. 107–114*

*А. В. Земсков, Г. М. Файкин*

# ИЗГИБ УПРУГОДИФФУЗИОННОЙ КОНСОЛЬНО-ЗАКРЕПЛЕННОЙ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ-ЭЙЛЕРА С УЧЕТОМ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДИФФУЗИОННЫХ ПОТОКОВ

*Московский авиационный институт*
*(национальный исследовательский университет) г.Москва, Россия*

***Аннотация.*** Исследуются нестационарные колебания балки Эйлера-Бернулли с учетом массопереноса. Используется модель упругой диффузии для многокомпонентных сред. Для получения решения задачи используются вариационный принцип Даламбера и метод эквивалентный граничных условий.

***Ключевые слова***: упругая диффузия, Функция Грина, Балка Эйлера-Бернулли

*DOI*: 10.37972/chgpu.2020.46.4.007

*УДК*: 539.374

Рассматривается нестационарная задача о плоском упругодиффузионном изгибе консольно-закрепленной однородной изотропной балки Бернулли- Эйлера.

Математическая модель поперечных колебаний имеет вид [1,2]:

$$\ddot{v}'' - a\ddot{v} = v^{(IV)} + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j H_j'',\ \ \dot{H}_q + \tau_q \ddot{H}_q = D_q H_q'' + \Lambda_q v^{(IV)},\ \ \frac{F}{J_3} = a \tag{1}$$

Здесь точки обозначают произвольную по времени,штрихи - производную по координате $x_1$. Все величины в (1) являются безразмерными. Для них приняты следующие


*Земсков Андрей Владимирович*
`e-mail:` azemskov1975@mail.ru, профессор кафедры «Прикладные программные средства и математические методы», Московский авиационный институт (национальный исследовательский институт), с.н.с. лаборатории динамических испытаний НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, д.ф.-м.н., доцент, Москва, Россия.
*Файкин Георгий Михайлович*
`e-mail:` Egorc16@mail.ru, Магистрант кафедры «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин», Московский авиационный институт (национальный исследовательский институт), г. Москва, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-19-00217).

Поступила 01.07.2020

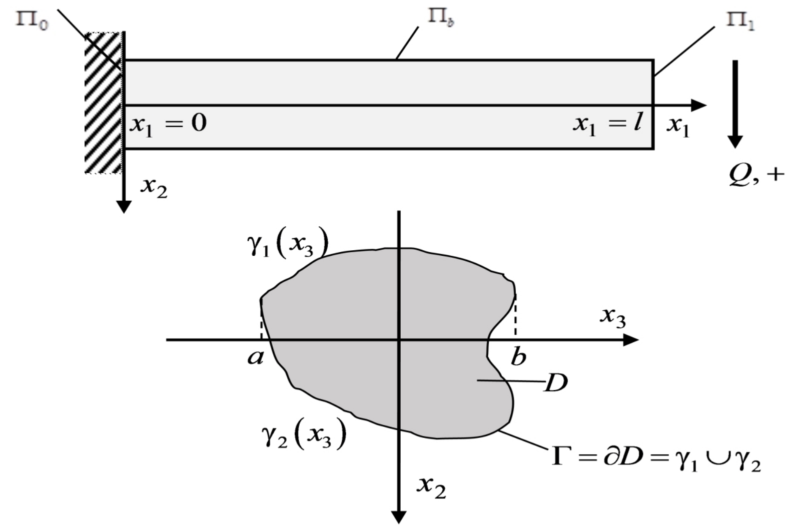


Рис. 1. Иллюстрация к постановке задачи

обозначения

$$x_i = \frac{x_i^*}{l}, v = \frac{v^*}{l}, \tau = \frac{Ct}{l}, C^2 = \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\rho}, \alpha_q = \frac{\alpha^{(q)}}{\lambda^* + 2\mu^*}, D^q = \frac{D^{(q)}}{Cl},$$
$$\Lambda_q = \frac{m^{(q)} D^{(q)} \alpha^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho R T_0 C l}, \lambda = \frac{\lambda^*}{\lambda^* + 2\mu^*}, \mu = \frac{mu^*}{\lambda^* + 2\mu^*}, F = \frac{F^*}{l^2}, J_3 = \frac{J_3^*}{l^2}, \tau_q = \frac{C\tau^{(q)}}{l},$$

где $t$ – время; $x_i^*$ – прямоугольные декартовы координаты; $v^*$ – поперечный прогиб балки; $l$ – длина балки; $H_q$ – приращение концентрации q-ой компоненты вещества в составе $N$ – компонентной среды; $n_0^{(q)}$ – начальная концентрация q-го вещества; $\lambda^*$ и $\mu^*$ – упругие постоянные Ламе; $\rho$ – плотность; $\alpha^{(q)}$ – коэффициенты самодиффузии; $R$ – универсальная газовая постоянная; $T_0$ – температура среды; $m^{(q)}$ - молярная масса $q$- ого вещества, $F^*$ - площадь сечения, $J_3^*$ – момент инерции сечения балки относительно оси $Ox_3$; $\tau^{(q)}$ – время релаксации диффузионных потоков.

Начальные условия полагаем нулевыми. Граничные условия в соответствии с моделью консольного изгиба балки имеют вид ($x = x_1$):

$$\begin{gathered} v'\Big|_{x=0} = 0,\ v\Big|_{x=0} = 0,\ H_q\Big|_{x=0} = 0,\ \left(v'' + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j H_j\right)\Bigg|_{x=1} = 0, \\ \left(v''' + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j H_j' - \ddot{v}'\right)\Bigg|_{x=1} = f_{22}(\tau),\ \left(D_q H_q' + \Lambda_q v'''\right)\Big|_{x=1} = 0 \end{gathered} \qquad (2)$$

Решение задачи ищется с помощью метода эквивалентных граничных условий [3,4]. Для этого рассматривается вспомогательная задача

$$\begin{gathered} v'\Big|_{x=0}=0,\ \left(v'''+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j H_j'-\ddot{v}'\right)\Bigg|_{x=0}=f_{21}^{*}(\tau),\ \left(D_q H_q'+\Lambda_q v'''\right)\Bigg|_{x=0}=f_{q+2,1}^{*}(\tau) \\ v'\Big|_{x=1}=f_{12}^{*}(\tau),\ \left(v'''+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j H_j'-\ddot{v}'\right)\Bigg|_{x=1}=f_{22}(\tau),\ \left(D_q H_q'+\Lambda_q v'''\right)\Bigg|_{x=1}=0 \end{gathered} \tag{3}$$

где функции $f_{12}^{*}(\tau)$, $f_{1,q+2}^{*}(\tau)$, $f_{21}^{*}(\tau)$ подлежит определению.

Выражения для искомых функций в задаче (1),(3) записываются следующим образом [1,2]

$$\begin{gathered} v(x,\tau)=\int_0^b\left[G_{12}(x,\tau-t)f_{21}^{*}(t)-G_{12}(1-x,\tau-t)f_{22}(t)\right]dt+ \\ +\sum_{p=1}^{N}\int_0^\tau G_{1,p+2}(x,\tau-t)f_{p+2,1}^{*}(t)dt-\int_0^\tau G_{11}(1-x,\tau-t)f_{12}^{*}(t)dt, \\ \eta_q(x,\tau)=\int_0^\tau\left[G_{q+2,2}(x,\tau-t)f_{21}^{*}(t)-G_{q+2,2}(1-x,\tau-t)f_{22}(t)\right]dt+ \\ +\sum_{k=1}^{N}\int_0^\tau G_{q+2,p+2}(x,\tau-t)f_{p+2,1}^{*}(t)dt-\int_0^\tau G_{q+2,1}(1-x,\tau-t)f_{12}^{*}(t)dt, \end{gathered} \tag{4}$$

где $G_{mk}$ – поверхностные функции Грина задачи (1), (3), которые являются решениями следующих задач

$$\begin{gathered} \ddot{G}_{1k}''-a\ddot{G}_{1k}=G_{1k}^{IV}+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j G_{j+1,k}'',\ \dot{G}_{q+1,k}+\tau_q\ddot{G}_{q+1,k}=D_q G_{q+1,k}''+\Lambda_q G_{1k}^{IV}, \\ \left(G_{1k}'''+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j G_{j+1,k}'-\ddot{G}_{1k}'\right)\Big|_{x_1=0}=\delta_{2k}\delta(\tau), \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \left(G_{1k}'''+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j G_{j+1,k}'-\ddot{G}_{1k}'\right)\Big|_{x_1=1}=0, \\ G_{1k}'\Big|_{x_1=0}=\delta_{1k}\delta(\tau),\ \left(D_q G_{q+1,k}'+\Lambda_q G_{1k}'''\right)\Big|_{x_1=1}=0, \\ G_{1k}'\Big|_{x_1=1}=0,\ \left(D_q G_{q+1,k}'+\Lambda_q G_{1k}'''\right)\Big|_{x_1=0}=\delta_{q+2,k}\delta(\tau), \end{gathered} \tag{6}$$

Прогибы и приращения концентраций (4) будут удовлетворять задаче (1), (2) если функции $f_{12}^*(\tau),\ f_{1,q+2}^*(\tau),\ f_{21}^*(\tau)$ будут удовлетворять следующей системе интегральных уравнений [3,4]

$$\sum_{j=1}^{4}\int\limits_0^\tau a_{ij}(\tau-t)y_j(t)dt=\varphi_i(\tau), \tag{7}$$

где:

$$\begin{gathered}
y_1(\tau)=f_{21}^*(\tau),\ y_2(\tau)=f_{12}^*(\tau),\ y_{p+2}(\tau)=f_{p+2,1}^*(\tau),\\
a_{11}(\tau)=G_{12}(0,\tau),\ a_{12}(\tau)=-G_{11}(1,\tau),\ a_{1,p+2}(\tau)=G_{1,p+2}(0,\tau),\\
a_{q+2,1}(\tau)=G_{q+2,2}(0,\tau),\ a_{q+2,2}(\tau)=-G_{q+2,1}(1,\tau),\ a_{q+2,p+2}(\tau)=G_{q+2,p+2}(0,\tau),\\
a_{21}(\tau)=G_{12}''(1,\tau)+\sum_{j=1}^{N}\alpha_jG_{q+2,2}(1,\tau),\ a_{22}(\tau)=-G_{11}''(0,\tau)-\sum_{j=1}^{N}\alpha_jG_{q+2,1}(0,\tau),\\
a_{q+2,p+2}(\tau)=\sum_{p=1}^{N}[G_{1,p+2}''(1,\tau)+\sum_{j=1}^{N}\alpha_jG_{q+2,p+2}(1,\tau)],\\
\varphi_1(\tau)=\int\limits_0^\tau G_{12}(1,\tau-t)f_{22}(t)dt,\ \varphi_{p+2}(\tau)=\int\limits_0^\tau G_{p+2,2}(1,\tau-t)f_{22}(t)dt,\\
\varphi_2(\tau)=\int\limits_0^\tau[G_{12}''(0,\tau-t)+\sum_{j=1}^{N}\alpha_jG_{j=2,2}(0,\tau-t)]f_{22}(t)dt.
\end{gathered}$$

Решение задачи (5), (6) ищется с помощью преобразования Лапласа и пазложения в ряды по косинусам. В этом случае задача (5), (6) сводится к следубщей систем елинейных алгебраических уравнений (вехний индекс "L"обозначает трансформанту Лапласа, s – параметр преобразования Лапласа)

$$\begin{gathered}
k_1(\lambda_n,s)G_{1k}^{LF}(\lambda_n,s)-\lambda_n^2\sum_{j=1}^{N}\alpha_jG_{j+1,k}^{LF}(\lambda_n,s)=-2\lambda_n^2\delta_{1k}+2\delta_{2k},\\
-\Lambda_q\lambda_n^4G_{1k}^{LF}(\lambda_n,s)+k_{q+1}G_{q+1,k}^{LF}(\lambda_n,s)=2\lambda_n^2\Lambda_q\delta_{1k}-2\delta_{q+2,k},\\
k_1(\lambda_n,s)=\lambda_n^2s^2+as^2+\lambda_n^4,\ k_{q+1}(\lambda_n,s)=s+\tau_qs^2+\lambda_n^2D_q,
\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}
G_{mk}^{LF}(\lambda_n,s)=2\int\limits_0^1G_{mk}^L(x,s)cos(\lambda_nx)dx\ (m=\overline{1,N+1},k=\overline{1,N+2}),\\
G_{mk}^L(x,s)=\frac{G_{mk}^{LF}(\lambda_n,s)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}G_{mk}^{LF}(\lambda_ns)cos(\lambda_nx),\ \lambda_n=\pi n.
\end{gathered}$$

Решение системы (8) имеет вид

$$
\begin{gathered}
G_{1k}^{LF} = \frac{P_{1k}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)},\ G_{q+1,1}^{LF} = \frac{2\Lambda_q \lambda_n^2}{k_{q+1}} + \frac{P_{q+1,1}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)}, \\
G_{q+1,2}^{LF} = \frac{P_{q+1,2}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)},\ G_{q+1,p+2}^{LF} = -\frac{2\delta_{qp}}{k_{q+1}} + \frac{P_{q+1,p+2}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)}, \\
G_{q+1,k}^{LF} = \frac{2\Lambda_q \lambda_n^2 \delta_{1k}}{k_{q+1}} - \frac{2\delta_{q+2,k}}{k_{q+1}} + \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)},
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
Q_q(\lambda_n, s) = k_{q+1}(\lambda_n, s) P(\lambda_n, s), \\
P(\lambda_n, s) = k_1(\lambda_n, s) \prod_{q=1}^{N} k_{q+1}(\lambda_n, s) - \lambda_n^6 \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \Lambda_j \prod_{q=1, q\neq j}^{N} k_{q+1}(\lambda_n, s) \\
\Pi(\lambda_n, s) = \prod_{q=1}^{N} k_{q+1}(\lambda_n, s),\ \Pi_j(\lambda_n, s) = \prod_{q=1, q\neq j}^{N} k_{q+1}(\lambda_n, s) \\
P_{11}(\lambda_n, s) = -2\lambda_n^2 [\Pi(\lambda_n, s) - \lambda_n^2 \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \Lambda_j \Pi_j(\lambda_n, s)], \\
P_{12}(\lambda_n, s) = 2\Pi(\lambda_n, s),\ P_{1,q+2}(\lambda_n, s) = -2\lambda_n^2 \alpha_q \Pi_q(\lambda_n, s), \\
P_{q+1,k}(\lambda_n, s) = \lambda_n^4 \Lambda_q P_{1k}(\lambda_n, s).
\end{gathered}
$$

Так как многочлены $P_{mk}(\lambda_n, s)$ является рациональными функциями параметра преобразования Лапласа s, то переход в пространство оригиналов осуществляется с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления. Оригиналы функций Грина:

$$
\begin{gathered}
G_{1k}^{F}(\lambda_n, \varepsilon, s) = \sum_{j=1}^{2N+2} A_{1k}^{(j)}(\lambda_n) e^{s_j(\lambda_n)\tau},\ G_{q+1,2}^{F} = \sum_{j=1}^{2N+4} A_{q+1,2}^{(j)}(\lambda_n) e^{s_j(\lambda_n)\tau}, \\
G_{q+1,1}^{F} = 2\Lambda_q \lambda_n^2 \sum_{l=1}^{2} \frac{e^{\xi_l(\lambda_n)\tau}}{k_{q+1}(\lambda_n, \varepsilon_l)} + \sum_{j=1}^{2N+4} A_{q+1,1}^{(j)}(\lambda_n) e^{s_j\tau},
\end{gathered} \tag{9}
$$

$$
\begin{gathered}
G_{q+1,p+2}^{F} = -2\delta_{qp} \sum_{l=1}^{2} \frac{e^{\xi_l(\lambda_n)\tau}}{k_{q+1}(\lambda_n, \varepsilon_l)} + \sum_{j=1}^{2N+4} A_{q+1,p+2}^{(j)}(\lambda_n) e^{s_j(\lambda_n)\tau}, \\
A_{1k}^{(j)}(\lambda_n) = \frac{P_{1k}(\lambda_n, s_j(\lambda_n))}{P'(\lambda_n, s_j(\lambda_n))}\ (j = \overline{1, 2N+2},\ q = \overline{1, N}), \\
A_{q+1,k}^{(l)}(\lambda_n) = \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, s_j(\lambda_n))}{Q_q'(\lambda_n, s_j(\lambda_n))}\ (l = \overline{1, 2N+4}),
\end{gathered}
$$

$$G_{1k}(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}G_{1k}^{F}(\lambda_n,\tau)\cos(\lambda_n x),$$
$$G_{q+1,1}(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}G_{q+1,1}^{F}(\lambda_n,\tau)\cos\lambda_n x,$$
$$G_{q+1,2}(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}G_{q+1,2}^{F}(\lambda_n,\tau)\cos\lambda_n x,$$
$$G_{q+1,p+2}(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}G_{q+1,p+2}^{F}(\lambda_n,\tau)\cos\lambda_n x,$$

где $s_j\left(\lambda_n\right)\left(j=\overline{1,N+2}\right)$ – нули многочлена $P\left(\lambda_n,s\right)$, $s_{2N+3}\left(\lambda_n\right)$ и $s_{2N+4}\left(\lambda_n\right)$ – дополнительные нули многочленов $Q_q\left(\lambda_n,s\right)$:

$$\xi_1\left(\lambda_n\right)=s_{2N+3}\left(\lambda_n\right)=\frac{-1-\sqrt{1-4\tau_q D_q\lambda_n^2}}{2\tau_q},$$
$$\xi_2\left(\lambda_n\right)=s_{2N+4}\left(\lambda_n\right)=\frac{-1+\sqrt{1-4\tau_q D_q\lambda_n^2}}{2\tau_q}.$$

Далее, для решения системы (7) разбиваем область $[0,T]$, изменения времени $\tau$ на $N_\tau$ отрезков точками $\tau_m=mh$ $(m=\overline{0,N_\tau})$ с равномерным шагом $h=\frac{T}{N_\tau}$ и вводим сеточные функции $y_m^j=y_j(\tau_m)$, $a_m^{ij}=a_{ij}(\tau_m)$. Каждый из интегралов при $\tau=\tau_m$ приближенно заменяем суммой, соответсвующей формуле средних прямоугольников:

$$\int_0^{\tau_j}a_{ij}(\tau_m-t)y_j(t)dt\approx hS_{m-1/2}^{ij}+ha_{1/2}^{ij}y_{m-1/2}^{j},$$
$$S_{m-1/2}^{ij}=\sum_{l=1}^{m-1/2}a_{m-l+1/2}^{ij}y_{l-1/2}^{j},\ \tau_{m-1/2}=\frac{\tau_{m-1}+\tau_m}{2}=h\left(m-\frac{1}{2}\right).$$

В результате приходим к рекурентной системе линейных алгебраических уравнений:

$$Ay_{m-1/2}=b_{m-1/2}$$

Где $y_{m-1/2}=(y_{m-1/2}^{i})_{4\times1}$ – столбец неизвестных, а остальные величины определяются так:

$$A=(a_{1/2}^{ij})_{4\times4},\ b_{m-1/2}=(b_{m-1/2}^{i})_{4\times1},\ b_{m-1/2}^{i}=\frac{\varphi_i(\tau_m)}{h}-\sum_{j=1}^{4}S_{m-1/2}^{ij}.$$

Решение полученной системы находится методом Крамера. Решение исходной задачи получается путём численного вычисления свёрток (4) функций Грина (9) вспомогательной задачи с функциями, полученными в результате численного решения системы уравнений (10). Эти свёртки вычисляются с помощью квадратурной формулы средних прямоугольников.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Тарлаковский Д.В., Земсков А.В., Файкин Г.М. Постановка задачи о Консольном изгибе балки Эйлера-Бернулли с учетом диффузии // Материалы XXV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т. 2. М.: ООО «ТРП», 2019. С. 136-139.

[2] Тарлаковский Д.В., Земсков А.В., Файкин Г.М. Постановка задачи о нестационарном изгибе консольно-закрепленной балки Эйлера-Бернулли с учетом диффузии // Проблемы безопасности на транспорте: матер. IX Междунар. научн.-практ. конф., Гомель, 28–29 ноябр. 2019 г. Гомель: БелГУТ, 2019. Ч. 2. С. 215-217

[3] Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V. Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer // Materials Physics and Mechanics. No 1. Vol 23. 2015. pp. 36-41

[4] Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Решение двумерных задач механодиффузии с помощью интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016. №1. С. 49-56.

*A. V. Zemskov, G. M. Faykin*

**EULER-BERNOULLI CANTILEVER BEAM BENDING CONSIDERING THE INNER DIFFUSION FLOWS FINITE PROPAGATION SPEED**

*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

***Abstract.*** Unsteady vibrations of the Euler-Bernoulli beam are studied taking into account mass transfer. The model of elastic diffusion for multicomponent media is used. To obtain a solution to the problem, the d'Alembert variational principle and the equivalent boundary conditions method are used.

***Keywords***: elastic diffusion, Green's function, Euler-Bernoulli beam

## REFERENCES

[1] Tarlakovsky D. V., Zemskov A. V., Faikin G. M. Statement of the Problem of Cantilever Bending of the Euler-Bernoulli Beam Taking Diffusion into Account. Proceedings of the XXV International Symposium "Dynamic and Technological Problems of Structural Mechanics and Continuous Media"A.G. Gorshkov. T. 2.M .: LLC "TRP 2019. P. 136-139.

[2] Tarlakovsky D. V., Zemskov A. V., Faikin G. M. Formulation of the problem of unsteady bending of a cantilever-fixed Euler-Bernoulli beam taking into account diffusion // Problems of safety in transport: mater. IX Int. scientific-practical. Conf., Gomel, 28–29 Nov. 2019 Gomel: BelSUT, 2019. Part 2. P. 215-217

[3] Zemskov A. V., Tarlakovskiy D. V. Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer // Materials Physics and Mechanics. No 1. Vol 23. 2015. pp. 36-41

[4] Zemskov A. V., Tarlakovsky D. V. Solution of two-dimensional problems of mechanodiffusion using integral equations of Volterra of the 1st kind // Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation. 2016. No. 1. P. 49-56.

*Zemskov Andrey Vladimirovich* Professor, Department of Applied Software and Mathematical Methods, Moscow Aviation Institute (National Research University), Senior Researcher of Dynamic Testing Laboratory, Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Doctor of Physics and Mathematics Science, assistant professor, Moscow, Russia.

*Faykin Georgy Mikhailovich* Master student, Department of materials resistance, dynamics and machine strength, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia.