

М. В Зарецкая

## К ИССЛЕДОВАНИЮ ФОНОВОЙ СЕЙСМИЧЕСКОЙ НАПРЯЖЕННОСТИ ГЕОЛОГИЧЕСКОГО МАССИВА

*Кубанский государственный университет, г. Краснодар, Россия*

**Аннотация.** Методом блочного элемента проведено исследование блочной структуры, моделирующей геологический массив. Состояние геологической среды описывается уравнениями движения для однородной, изотропной упругой среды в форме Ляме. Выписаны функциональные и псевдодифференциальные уравнения, получены интегральные представления блочного элемента. Установлены основные тенденции изменения контактных напряжений в зависимости от значений механических характеристик материала блоков и геометрических параметров структуры.

**Ключевые слова:** геологический массив, блочная структура, блочный элемент, контактные напряжения, сейсмический риск.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.009

УДК: 539.374

### Введение

При решении задач определения общего поля напряжений в литосферной плите необходимо руководствоваться следующими положениями. Земная кора, по мнению академика М. А. Садовского [1], имеет неоднородное строение и разбита разломами и трещинами на блоки различного размера. В блоках и на неоднородностях накапливается упругая энергия, которая обеспечивает развитие динамических процессов и часто разряжается землетрясениями. Движение блоков в коре порождает напряженное состояние, в частности, тектонические напряжения. Динамика блочных структур влияет на распределение напряжений в земной коре.

Рассматриваем литосферную плиту как блочную структуру. При наличии трещин, разломов или включений меньших размерностей в литосферной плите последние надо

---

© Зарецкая М. В., 2020

*Зарецкая Марина Валерьевна*

e-mail: zarmv@mail.ru, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического моделирования, Кубанский государственный университет, г. Краснодар, Россия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 19-08-00145-а), Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Краснодарского края (код проекта 19-41-230002 p\_юг-а).

Поступила 10.06.2020

рассматривать как границы блоков. Наиболее простым блоком, позволяющим моделировать геологические структуры любой сложности, является прямоугольный параллелепипед.

### 1. Математическая модель исследования напряженности геологической среды

Пусть состояние материала геологической среды описывается уравнениями движения для однородной, изотропной упругой среды в форме Ляме относительно перемещений  $\mathbf{u}(x, y, z)$ :

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}) - \mu \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{u}) + \rho\omega^2 \mathbf{u} = 0,$$

где  $\lambda, \mu$  — упругие константы Ляме,  $\rho$  — плотность материала,  $\omega$  — частота установившихся колебаний.

Для произвольного вектора-функции  $\mathbf{u}(x, y, z)$  справедливо разложение Грина-Ляме:

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi},$$

позволяющее перейти от системы уравнений Ляме к двум независимым уравнениям относительно скалярного потенциала  $\varphi$  и векторного потенциала  $\boldsymbol{\psi}$ :

$$\Delta \varphi + \kappa_1^2 \varphi = 0, \quad (1)$$

$$\Delta \psi_n + \kappa_2^2 \psi_n = 0, \quad (2)$$

где  $\kappa_1^2 = \rho\omega^2(\lambda + 2\mu)^{-1}$ ,  $\kappa_2^2 = \rho\omega^2\mu^{-1}$ ,  $n = 1, 2, 3$ .

Потенциал  $\varphi$  соответствует продольным волнам, вектор  $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  описывает распространение поперечных волн в среде.

В связи с тем, что для конкретных геологических задач корректно сформулировать соответствующие граничные условия сложно, основное внимание уделено построению представлений решений в блочных элементах сложных геологических объектов, основанных на применении уравнений (1)–(2).

Далее приводится пример построения трехмерного блочного элемента в форме прямоугольного параллелепипеда для дифференциального уравнения Гельмгольца, являющегося обобщением уравнений (1) и (2) и имеющего вид

$$(\Delta + k^2)u = 0, \quad (3)$$

где

$$\Delta = A_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + A_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + A_3 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

с некоторыми граничными условиями, например, Дирихле или Неймана.

Область выбранного параллелепипеда обозначим  $\Omega$ , его границу —  $\partial\Omega$ . Коэффициенты  $A_i(x_1, x_2, x_3)$  и  $k^2$  можно считать постоянными в границах блочного элемента.

Пусть в исходной системе координат область  $\Omega$  описывается соотношениями

$$\Omega : |x_1| \leq a, \quad |x_2| \leq c, \quad |x_3| \leq b.$$

В процессе применения дифференциального метода факторизации [2,3], являющегося основой метода блочного элемента, осуществляется касательное расслоение ориентированной границы  $\partial\Omega$ , и вводятся правые локальные системы координат с внешними нормальными  $x_3^k$  и касательными  $x_1^k, x_2^k$ . Для прямоугольного параллелепипеда  $k = 6$ . Локальные координаты располагаются на гранях параллелепипеда, следуют против часовой стрелки, с начальным индексом  $k = 1$  на верхней грани. Локальные системы

координат на фронтальной грани и ей противоположной имеют индексы  $k = 5$  и  $k = 6$  соответственно.

В каждой локальной системе координат строятся системы функциональных и псевдодифференциальных уравнений блочного элемента. После обращения последних получаем общее представление решения, то есть блочного элемента, в локальной системе координат. Блочные элементы имеют представление в форме интеграла по границе области носителя.

Введем операторы преобразования Фурье

$$\mathbf{F}(\alpha_1^k, \alpha_2^k)u = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1^k, x_2^k) e^{i\langle \mathbf{x}^k, \boldsymbol{\alpha}^k \rangle} dx_1^k dx_2^k,$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^k, x_2^k)U = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha_1^k, \alpha_2^k) e^{-i\langle \mathbf{x}^k, \boldsymbol{\alpha}^k \rangle} d\alpha_1^k d\alpha_2^k,$$

$$\mathbf{F}(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k)u = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1^k, x_2^k, x_3^k) e^{i\langle \mathbf{x}^k, \boldsymbol{\alpha}^k \rangle} dx_1^k dx_2^k dx_3^k,$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^k, x_2^k, x_3^k)U = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k) e^{-i\langle \mathbf{x}^k, \boldsymbol{\alpha}^k \rangle} d\alpha_1^k d\alpha_2^k d\alpha_3^k,$$

$$k = 1, 2, \dots, 6.$$

Функциональное уравнение краевой задачи представимо в форме

$$\mathbf{KF}(a_1^k, a_2^k, a_3^k)u = \int_{\partial\Omega} \omega,$$

где  $\omega$  — внешняя форма, связанная с краевой задачей.

Приведем вид получающихся функциональных и псевдодифференциальных уравнений в первой локальной системе координат, т.е. для  $k = 1$ .

Функциональное уравнение:

$$\begin{aligned}
 K_1 U_1 = \mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1) \left\{ \int_{-a}^a \int_{-c}^c A_3 (u'_{13} - i\alpha_{3-}^1 u_1) e^{i[\alpha_1^1 \eta_1^1 + \alpha_2^1 \eta_2^1]} d\eta_1^1 d\eta_2^1 + \right. \\
 + \int_{-c}^c \int_{-b}^b A_1 (u'_{22} + i\alpha_1^1 u_2) e^{i[-\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^2 + \alpha_3^1 - (x_1^2 - b)]} dx_1^2 dx_2^2 + \\
 + \int_{-a}^a \int_{-c}^c A_3 (u'_{33} + i\alpha_{3-}^1 u_3) e^{i[-\alpha_1^1 x_1^3 + \alpha_2^1 x_2^3 - \alpha_3^1 - 2b]} dx_1^3 dx_2^3 - \\
 - \int_{-c}^c \int_{-b}^b A_1 (u'_{43} - i\alpha_1^1 u_4) e^{i[\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^4 - \alpha_3^1 - (x_1^4 + b)]} dx_1^4 dx_2^4 + \\
 + \int_{-a}^a \int_{-b}^b A_2 (u'_{53} + i\alpha_2^1 u_5) e^{i[\alpha_1^1 x_1^5 - \alpha_2^1 c + \alpha_3^1 - (x_2^5 - b)]} dx_1^5 dx_2^5 + \\
 \left. + \int_{-a}^a \int_{-b}^b A_2 (u'_{63} - i\alpha_2^1 u_6) e^{i[-\alpha_1^1 x_1^6 + \alpha_2^1 c + \alpha_3^1 - (x_2^6 - b)]} dx_1^6 dx_2^6 \right\} = 0, \\
 |x_1^1| \leq a, \quad |x_2^1| \leq c.
 \end{aligned}$$

Псевдодифференциальное уравнение:

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^k, x_2^k) K_1 U_1 = 0, \quad |x_1^1| \leq a, \quad |x_2^1| \leq c.$$

Аналогично получаются псевдодифференциальные уравнения в локальных системах  $k = 2, 3, 4, 5, 6$ .

Характеристические уравнения в локальных системах координат представимы в форме

$$K_1(\alpha_1^m, \alpha_2^m, \alpha_3^m) = A_1(\alpha_1^m)^2 + A_2(\alpha_2^m)^2 + A_3(\alpha_3^m)^2 - k^2, \quad m = 1, 3;$$

$$K_2(\alpha_1^n, \alpha_2^n, \alpha_3^n) = A_3(\alpha_1^n)^2 + A_2(\alpha_2^n)^2 + A_1(\alpha_3^n)^2 - k^2, \quad n = 2, 4;$$

$$K_3(\alpha_1^p, \alpha_2^p, \alpha_3^p) = A_1(\alpha_1^p)^2 + A_3(\alpha_2^p)^2 + A_2(\alpha_3^p)^2 - k^2, \quad p = 5, 6.$$

Корневые множества описываются соотношениями

$$\alpha_{3-}^m(\alpha_1^m, \alpha_2^m) = -i\sqrt{A_3^{-1} [A_1(\alpha_1^m)^2 + A_2(\alpha_2^m)^2 - k^2]}, \quad m = 1, 3;$$

$$\alpha_{3-}^n(\alpha_1^n, \alpha_2^n) = -i\sqrt{A_1^{-1} [A_3(\alpha_1^n)^2 + A_2(\alpha_2^n)^2 - k^2]}, \quad n = 2, 4;$$

$$\alpha_{3-}^p(\alpha_1^p, \alpha_2^p) = -i\sqrt{A_2^{-1} [A_1(\alpha_1^p)^2 + A_3(\alpha_2^p)^2 - k^2]}, \quad p = 5, 6.$$

Здесь берутся те ветви аналитических функций, которые обеспечивают принадлежность корней нижней полуплоскости при достаточно больших по модулю вещественных параметрах преобразований Фурье.

Задавая в псевдодифференциальных уравнениях на границах значения функций или производных, получаем интегральные уравнения. Решив последние и внося решения в функциональные уравнения, получим интегральные представления блочного элемента.

В первой локальной системе координат это представление запишется:

$$\begin{aligned}
u_1(x_1^1, x_2^1, x_3^1) = \mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1, x_3^1) \mathbf{K}_1^{-1} \left\{ \int_{-a}^a \int_{-c}^c A_3 (u'_{13} - i\alpha_3^1 u_1) e^{i[\alpha_1^1 \eta_1^1 + \alpha_2^1 \eta_2^1]} d\eta_1^1 d\eta_2^1 + \right. \\
+ \int_{-c}^c \int_{-b}^b A_1 (u'_{22} + i\alpha_1^1 u_2) e^{i[-\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^2 + \alpha_3^1 (x_1^1 - b)]} dx_1^2 dx_2^2 + \\
+ \int_{-a}^a \int_{-c}^c A_3 (u'_{33} + i\alpha_3^1 u_3) e^{i[-\alpha_1^1 x_1^3 + \alpha_2^1 x_2^3 - \alpha_3^1 2b]} dx_1^3 dx_2^3 - \\
- \int_{-c}^c \int_{-b}^b A_1 (u'_{43} - i\alpha_1^1 u_4) e^{i[\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^4 - \alpha_3^1 (x_1^1 + b)]} dx_1^4 dx_2^4 + \\
+ \int_{-a}^a \int_{-b}^b A_2 (u'_{53} + i\alpha_2^1 u_5) e^{i[\alpha_1^1 x_1^5 - \alpha_2^1 c + \alpha_3^1 (x_2^5 - b)]} dx_1^5 dx_2^5 + \\
\left. + \int_{-a}^a \int_{-b}^b A_2 (u'_{63} - i\alpha_2^1 u_6) e^{i[-\alpha_1^1 x_1^6 + \alpha_2^1 c + \alpha_3^1 (x_2^6 - b)]} dx_1^6 dx_2^6 \right\}.
\end{aligned}$$

Для сопряжения блочных элементов необходимо применить гомеоморфизмы, что достигается введением фактор-топологических пространств [4]. В результате для блочных структур выводятся уравнения типа Винера-Хопфа, вид которых зависит от конкретных геометрических параметров блочной структуры. Обращение полученных уравнений позволяет оценить возникающие контактные напряжения.

## 2. Результаты и выводы

Выполним исследование блочной структуры, состоящей из четырех прямоугольных параллелепипедов на основании (рис. 1) с целью установления основные тенденции изменения контактных напряжений в зависимости от значений механических характеристик материала блоков и геометрических параметров структуры. Модель может соответствовать таким геологическим структурам как глубинные разломы, рифтовые образования, вертикальные трещины или включения, каньоны, некоторые типы вулканических структур.

В качестве варьируемого параметра выбраны:  $d_1$  — расстояние между блоками 2, 4 и  $d_2$  — расстояние между блоками 1, 3. Изменение этих параметров соответственно приводит к изменению размеров блоков.

Рассчитаны контактные напряжения между блоками и основанием при некоторые начальных значениях  $d_1$  и  $d_2$ , которые можно считать фоновыми.

При фиксированном значении  $d_2$  с уменьшением  $d_1$  (блоки сближаются) наблюдается рост контактных напряжений. При этом они остаются величиной конечной.

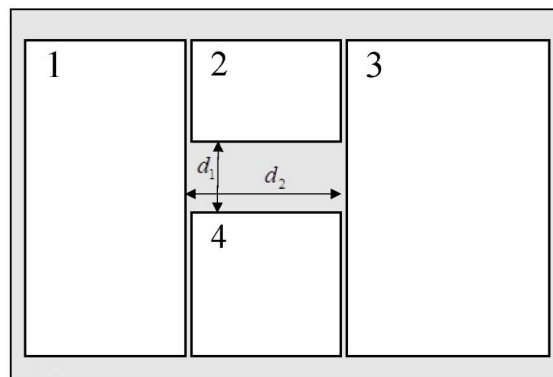


Рис. 1. Модель блочной структуры геологической среды

При проведении расчетов с той же динамикой изменения  $d_1$ , но при увеличивающихся значениях  $d_2$ , наблюдается тенденция нелинейного роста напряжений, которые, тем не менее, остаются конечными.

Не выявлено таких соотношений  $d_1$  и  $d_2$ , при которых наблюдался бы экспоненциальный рост контактных напряжений, описанный в работе [5]. Полученный результат позволяет выдвинуть гипотезу, что бесконечный рост напряжений при «слипании» литосферных плит объясняется, в том числе, и применением для моделирования полубесконечных блочных элементов.

Полученные результаты могут быть полезны организациям, осуществляющим мониторинг региональной сейсмичности для оценки риска сейсмического события по результатам обработки измерений тектонических движений.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Садовский М. А., Писаренко В. Ф. Сейсмический процесс в блоковой среде. М.: Наука, 1991. с. 95.
- [2] Дифференциальный метод факторизации для блочной структуры / В. А. Бабешко, О. М. Бабешко, О.В. Евдокимова [и др.] // Доклады академии наук. 2009. Т. 424, № 1. с. 36–39.
- [3] Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О.В. О методе блочного элемента // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2010. № 3. с. 155–163.
- [4] Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О.В. Об автоморфизме и псевдодифференциальных уравнениях в методе блочного элемента // Доклады академии наук. 2011. Т. 438, № 5. с. 623–625.
- [5] О стартовых землетрясениях при жёстком сцеплении литосферных плит с основанием / В. А. Бабешко, О. М. Бабешко, О.В. Евдокимова [и др.] // Доклады академии наук. 2018. Т. 478. с. 406–412.

*M. V Zaretskaya*

## TO THE STUDY OF THE NATURAL SEISMIC TENSION OF GEOLOGICAL MASSIFS

*Kuban State University, Krasnodar, Russia*

**Abstract.** The block structure method is used to study the block structure modeling a geological massif. The state of the geological medium is described by equations of motion for a homogeneous, isotropic elastic medium in the form of a Lamé. Functional and pseudo-differential equations are written out, and integral representations of the block element are obtained. The main tendencies of contact stress variation are established depending on the values of the mechanical characteristics of the material of the blocks and the geometric parameters of the structure.

**Keywords:** geological massif, block structure, block element, contact stresses, seismic risk.

### REFERENCES

- [1] Sadovskiy M. A., Pisarenko V. F. Seismic process in a block environment. M.: Nauka, 1991. p. 95.
- [2] Differential factorization method for block structure / V. A. Babeshko, O. M. Babeshko, O. V. Evdokimova et al. // Doklady akademii nauk. 2009. Vol. 424, no. 1. p. 36–39.
- [3] Babeshko V. A., Babeshko O. M., Evdokimova O. V. About the block element method // Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela. 2010. no. 3. P. 155–163.
- [4] Babeshko V. A., Babeshko O. M., Evdokimova O. V. On automorphism and pseudodifferential equations in the block element method // Doklady akademii nauk. 2011. Vol. 438, no. 5. p. 623–625.
- [5] About starting earthquakes with rigid adhesion of lithospheric plates to the base / V. A. Babeshko, O. M. Babeshko, O. V. Evdokimova et al. // Doklady akademii nauk. 2018. Vol. 478. P. 406–412.

---

*Zaretskaya Marina Valerievna*, Professor, Department of Mathematical Modeling, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Kuban State University, Krasnodar, Russia.