

Г. Н. Белосточный, М. В. Вильде, М. Ю. Сурова

ПРИМЕНЕНИЕ УТОЧНЕННОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЛАНАРНОЙ КРАЕВОЙ ВОЛНЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ КАСАТЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ НА ТОРЦЕ

ФГБОУ ВО «СГУ имени Н.Г. Чернышевского», г. Саратов, Россия

Аннотация. Изучается возможность применения уточненной асимптотической модели планарной краевой волны в задаче о действии нестационарной касательной нагрузки, приложенной на торце. При построении уточненной модели используется асимптотическая двумерная теория растяжения пластин высшего порядка точности. Приводятся результаты сравнения с решением по трехмерной теории упругости для различных законов распределения нагрузки. Показано, что уточненная модель позволяет достаточно точно описать влияние дисперсии краевой волны, не учитываемое в первом приближении.

Ключевые слова: краевые волны, нестационарные волны, пластина, асимптотические методы.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.012

УДК: 539.3

Введение

Волны, распространяющиеся вдоль края пластины (краевые волны), представляют интерес для практических приложений в области неразрушающего контроля, поскольку они могут быть использованы для поиска трещин и других дефектов вблизи

© Белосточный Г. Н., Вильде М. В., Сурова М. Ю., 2020

Белосточный Григорий Николаевич

e-mail: belostochny@mail.ru, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, ФГБОУ ВО «СГУ имени Н.Г. Чернышевского», г. Саратов, Россия.

Вильде Мария Владимировна

e-mail: mv_wilde@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, ФГБОУ ВО «СГУ имени Н.Г. Чернышевского», г. Саратов, Россия.

Сурова Мария Юрьевна

e-mail: mzhilko@yandex.ru, аспирант кафедры математической теории упругости и биомеханики, ФГБОУ ВО «СГУ имени Н.Г. Чернышевского», г. Саратов, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00673.

Поступила 20.09.2020

края. Простейшим примером краевой волны является планарная волна, представляющая собой аналог волны Рэлея в теории обобщенного плоского напряженного состояния пластин. Экспериментальные исследования [1] показывают, что данная волна весьма чувствительна к наличию трещины, выходящей на край, однако для обнаружения достаточно малых трещин требуется использовать частоты, выходящие за пределы применимости двумерной теории растяжения пластин. Несмотря на то, что современная вычислительная техника позволяет получить решение трехмерной задачи о распространении краевой волны (см. [2]), проблема построения уточненных двумерных теорий не потеряла своей актуальности. С практической точки зрения, применение такой теории позволяет значительно сократить время вычисления. Асимптотически корректные уточненные теории имеют также теоретическое значение, поскольку они позволяют исследовать поведение решения в окрестности фронтов волн и другие эффекты, для описания которых требуется знание асимптотического поведения решения.

Экспериментальное исследование [2] показывает, что при приложении касательной нагрузки на торце наиболее интенсивно возбуждается планарная краевая волна. В классической теории растяжения пластин для выделения поля данной волны можно применить асимптотическую модель из работы [3]. Целью данной работы является построение и апробация уточненной асимптотической модели, основанной на теории высшего порядка точности с приведенной инерцией [4].

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о распространении нестационарных упругих волн в полубесконечной идеально упругой изотропной пластине, отнесенной к декартовой системе координат и занимающей область $(x_1 \leq 0, -\infty < x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h)$ (см. рис. 1). Для описания волнового процесса будем использовать уточненную теорию растяжения пластин с приведенной инерцией [4] второго порядка приближения. Уравнения движения в этой теории имеют вид

$$Eh \left(\frac{1}{1+\nu} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-\nu} \text{grad div } \mathbf{u} \right) - 2\rho h \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \frac{2\nu^2}{3(1-\nu)^2} \rho h^3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{grad div } \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{u} — вектор перемещения частиц на срединной поверхности, ρ — плотность, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, t — время, h — полутолщина пластины. Все численные расчеты, представленные в данной работе, выполнены при $\nu = 0.33$. Запишем выражения напряжений σ_{ij} ($i, j = 1, 2$) через перемещения, соответствующие уравнению (1) по асимптотическому порядку точности [5]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\nu h^2}{6(1-\nu)} \left[\frac{\nu}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{div } \mathbf{u} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) \text{div } \mathbf{u} \right] \right\}, \\ \sigma_{ij} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\nu h^2}{3(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \text{div } \mathbf{u} \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Как и в классической теории, представление перемещения через потенциалы Ламе φ, ψ

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (3)$$

приводит к разделению уравнений движения (1) на два независимых уравнения

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\nu^2}{3(1-\nu)^2} \frac{h^2}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \psi - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

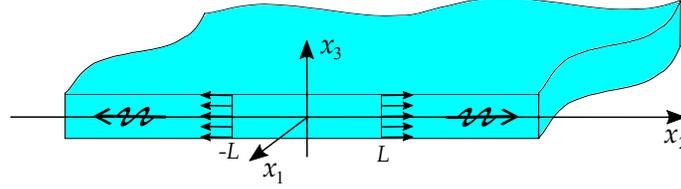


Рис. 1. Полубесконечная пластина с касательной нагрузкой на торце, возбуждающей планарную краевую волну

где $c_1 = E/(1 - \nu^2)$ и $c_2 = E/2(1 + \nu)$ – скорости продольной и поперечной волн в теории пластин. Введем также обозначение $\kappa_0^2 = c_2^2/c_1^2 = (1 - \nu)/2$.

Рассмотрим задачу, в которой к торцу пластины приложена касательная нагрузка, распределенная на конечном интервале $-L \leq x_2 \leq L$ (см. рис. 1). Граничные условия в таком случае имеют вид

$$\sigma_{11}|_{x_1=0} = 0, \quad \sigma_{12}|_{x_1=0} = S_0(x_2, t). \quad (5)$$

Примем, что до приложения нагрузки пластина находилась в покое, что соответствует нулевым начальным условиям (это относится и к старшим производным по времени, возникающим в результате итерационного построения асимптотического приближения). Будем искать решение, описывающее волну, распространяющуюся вдоль края $x_1 = 0$ и затухающую при $x_1 \rightarrow -\infty$.

2. Уточненная асимптотическая модель

Построение уточненной асимптотической модели для случая нормальной нагрузки на торце подробно описано в работе [6]. Поскольку в случае граничных условий (5) модель строится аналогично, приведем только окончательный результат. Распространение волны вдоль края описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\nu^2}{12} \frac{k_R^2}{k_1^2 B} \frac{h^2}{c_R^4} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial t^4} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \left(\frac{1}{k_R^2 B} \frac{\partial S_0}{\partial x_2} - \frac{\nu^2}{12} \frac{B_1}{B} \frac{h^2}{c_R^2} \frac{\partial^3 S_0}{\partial x_2 \partial t^2} \right), \quad (6)$$

где

$$k_R = \frac{c_R}{c_2}, \quad k_1 = \sqrt{1 - \kappa_0^2 k_R^2}, \quad k_2 = \sqrt{1 - k_R^2}, \quad k_3^2 = 1 - \frac{k_R^2}{2}, \quad (7)$$

$$B = \frac{\kappa_0^2}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} - \frac{2}{k_3^2}, \quad B_1 = \frac{1}{k_1^2 B} \left[\frac{1}{B} \left(\frac{\kappa_0^2}{k_1^4} + \frac{1}{k_2^4} - \frac{2}{k_3^4} \right) - \frac{\kappa_0^2 k_R^2}{k_1^2} - 1 \right].$$

Здесь c_R – скорость планарной краевой волны в классической теории растяжения пластин, которая определяется как корень уравнения, по своему виду совпадающего с уравнением для скорости волны Рэлея. В терминах безразмерных констант (7) это уравнение имеет вид $k_3^4 - k_1 k_2 = 0$. После определения функции Φ можно восстановить волновое поле во всей области, занятой пластиной, решив уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + k_1^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\nu^2}{12} \left(1 - \frac{\kappa_0^2}{k_1^2 B} \right) k_R^4 h^2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_2^4} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + k_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = 0 \quad (8)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = \Phi - \frac{\nu}{12} \frac{k_R^2 h^2}{k_1^2 B} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \Big|_{x_1=0} = -\frac{1}{k_3^2} \left(\Phi + \frac{\nu^2}{24} \frac{k_R^4}{k_1^2 k_3^2 B} h^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \right). \quad (9)$$

После нахождения потенциалов можно определить перемещения по формулам (3). Заметим, что если для практических целей необходимо определить какую-либо характеристику НДС только на краю пластины, то в решении уравнений (8) нет необходимости. Рассмотрим, например, решение для скорости продольного перемещения на торце $W = \dot{u}_1|_{x_1=0}$, которая может быть измерена экспериментально с помощью лазерного виброметра [2]. Подставляя выражения производных потенциалов из граничных условий (9) в формулу перемещения u_1 из (3), получим выражение для функции Φ . Подставляя его в уравнение (6), приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\nu^2}{12} \frac{k_R^2}{k_1^2 B} \frac{h^2}{c_R^4} \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} = \frac{1+\nu}{E} \frac{1}{k_3^2 B} \left[\frac{\partial^2 S_0}{\partial x_2 \partial t} - B_2 k_R^2 h^2 \frac{\partial^4 S_0}{\partial x_2^3 \partial t} \right], \quad (10)$$

где

$$B_2 = -\frac{\nu}{6} \frac{k_3^2}{k_R^2} + \frac{\nu^2}{12} \left(B_1 - \frac{1}{k_1^2 k_3^2 B} \right).$$

Решение уравнения (10), удовлетворяющее нулевыми начальным условиям, представляет поле планарной краевой волны.

3. Решение задачи и его анализ

Введем для удобства безразмерные переменные $x_2 = h\xi$, $t = h\tau/c_2$, $W = c_2 V$. Применяя преобразования Лапласа и Фурье

$$f^L(\omega) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad f^F(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\chi\xi} d\xi, \quad (11)$$

нетрудно записать решение уравнения (10) в изображениях

$$V^{\text{FL}}(\chi, \omega) = \frac{1}{2\mu k_3^2 B} \frac{\chi \omega S_0^{\text{FL}} (1 + B_2 k_R^2 \chi^2)}{\chi^2 - \frac{\omega^2}{k_R^2} \left(1 + \frac{\nu^2}{12 k_1^2 B} \omega^2 \right)}. \quad (12)$$

Полюса $\omega_0 = \pm\omega_0(\chi)$ ($\chi_0 = \pm\chi_0(\omega)$) функции V^{FL} определяют вклад планарной краевой волны. На рис. 2 приведено сравнение величин $c_g = d\omega_0/d\chi$ и вычета $R_{\text{EW}} = \text{Res } V^{\text{FL}}$ при $S_0^{\text{FL}} = 1$ в полюсе $\omega_0 = \omega_0(\chi)$ с соответствующими величинами, определенными на основании численного решения трехмерной задачи [2].

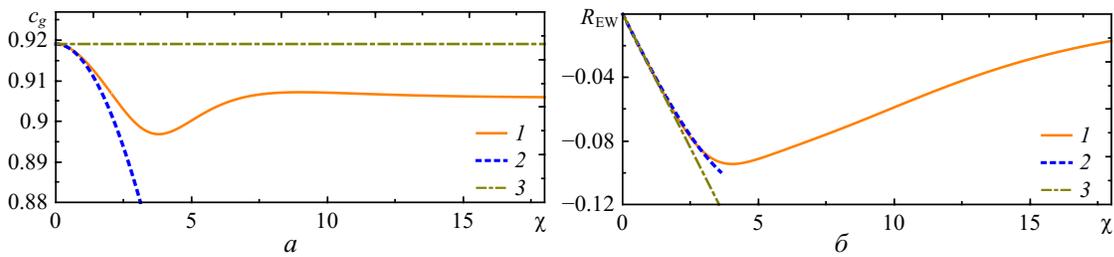


Рис. 2. Сравнение групповой скорости (а) и вычета (б) с трехмерной теорией

Здесь и далее на графиках приняты обозначения: 1 – трехмерная теория, 2 – уточненная асимптотическая модель, 3 – теория обобщенного плоского напряженного состояния пластины. Из рис. 2 видно, что уточненная модель позволяет определить следующий член асимптотического приближения при $\chi \rightarrow 0$.

4. Численные результаты

Рассмотрим частный случай нагрузки вида

$$S_0(\xi, \tau) = \begin{cases} \mu I_0 f(\xi) H(\tau), & \text{если } -l \leq \xi \leq l, \\ 0, & \text{если } |\xi| > l, \end{cases}$$

где $H(\tau)$ – функция Хевисайда, $f(\xi)$ – функция, характеризующая распределение нагрузки, $l = L/h$. В первом приближении задача определения скорости V сводится к решению задачи Коши с нулевыми начальными условиями для неоднородного одномерного волнового уравнения, которое получается из (10), если опустить подчеркнутые слагаемые. На основании известной формулы Даламбера решение этого уравнения может быть записано в явном виде

$$V(\xi, \tau) = -\frac{I_0}{4k_3^2 B} [f(\xi - k_R \tau) - f(\xi + k_R \tau)]. \quad (13)$$

Формула (13) показывает, что в первом приближении профиль волны в точности повторяет закон распределения касательной нагрузки. Уточненная асимптотическая модель позволяет учесть искажение профиля вследствие дисперсии. Обращая преобразование Фурье в (12) путем использования контурного интегрирования и теоремы о вычетах и затем преобразование Лапласа, приходим к решению

$$V(\xi, \tau) = -\frac{1}{4\pi k_3^2 B} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[f^F(\chi_0(\omega)) e^{i(\omega\tau - \chi_0(\omega)\xi)} (1 + B_2 \omega^2) \right] w(\omega) d\omega.$$

Здесь $w(\omega)$ – фильтр типа “природнятого косинуса”, выделяющий область низких частот. На рис. 3 приведены результаты расчетов для случая сглаженной нагрузки

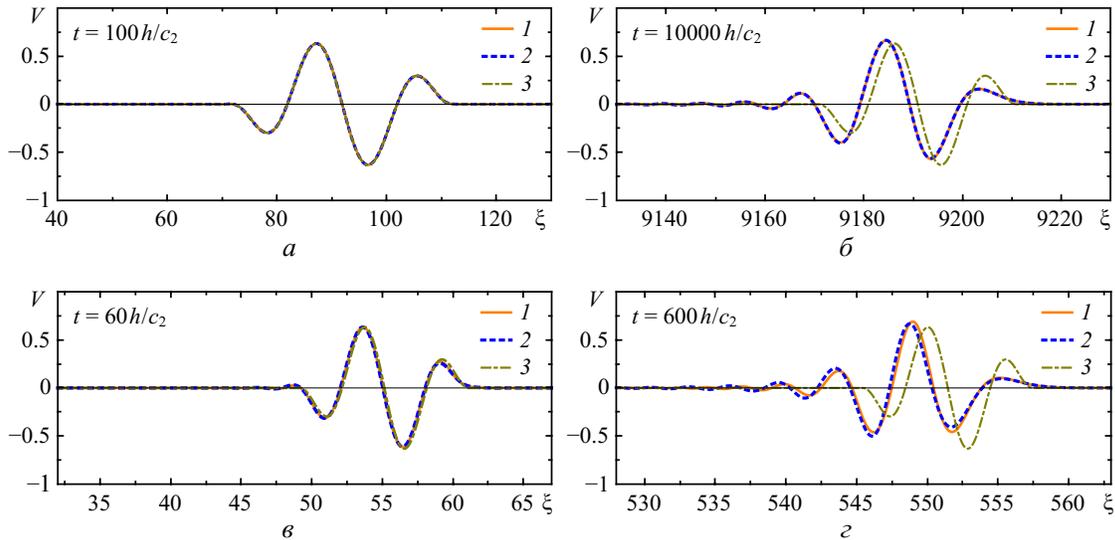


Рис. 3. Профиль волны в различные моменты времени для случая нагрузки, распределенной по закону (14) при $l = 20$ (а, б) и $l = 6$ (в, г)

вида

$$f_1(\xi) = \frac{15\pi}{8} \sin \frac{2\pi\xi}{l} \cos \frac{\pi\xi}{2l}, \quad f_1^F(\chi) = i\chi \frac{15\pi}{8} \left[\frac{\cos \chi l}{\left(\frac{5\pi}{2l}\right)^2 - \chi^2} - \frac{\cos \chi l}{\left(\frac{3\pi}{2l}\right)^2 - \chi^2} \right]. \quad (14)$$

На рис. 4 представлены аналогичные результаты для случая линейного распределения нагрузки

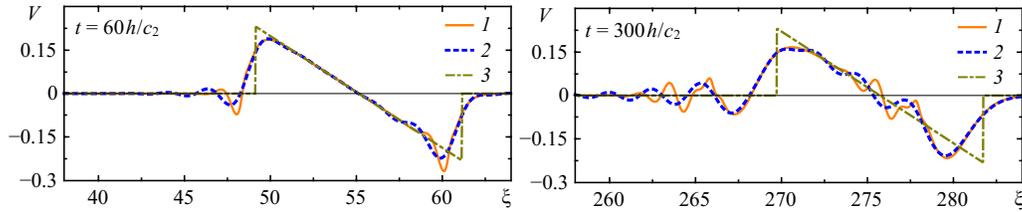


Рис. 4. То же, что рис. 3, для закона распределения нагрузки (15)

$$f_2(\xi) = \frac{2\xi}{l}, \quad f_2^F(\chi) = 4i \frac{\sin \chi l - \chi l \cos \chi l}{\chi^2 l}. \quad (15)$$

Далее рассмотрены примеры распределения нагрузки, представляющие интерес при моделировании действия пьезоэлектрического актуатора [7]. Рис. 5 получен при

$$f_3(\xi) = \frac{\alpha l \operatorname{sh} \alpha \xi}{\operatorname{ch} \alpha l - 1}, \quad f_3^F(\chi) = \frac{\alpha l}{\operatorname{ch} \alpha l - 1} \left[\frac{\sin [(\chi - i\alpha)l]}{\chi - i\alpha} - \frac{\sin [(\chi + i\alpha)l]}{\chi + i\alpha} \right]. \quad (16)$$

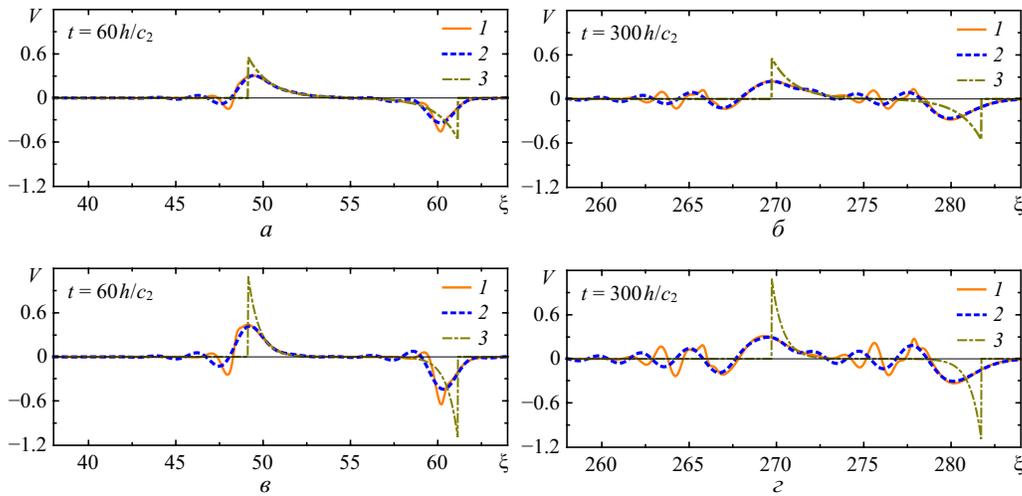


Рис. 5. То же, что рис. 3, для закона распределения нагрузки (16) при $\alpha = 0.25$ (a,b) и $\alpha = 0.5$ (в,г)

На рис. 6 показаны результаты для двух типов нагрузки с сингулярностью на границах области приложения:

$$f_4(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{l^2 - \xi^2}}, \quad f_4^F(\chi) = 2\pi i l J_1(\chi l); \quad f_5(\xi) = l(\delta_+ - \delta_-), \quad f_5^F(\chi) = 2i l \sin \chi l, \quad (17)$$

где $\delta_{\pm} = \delta(\xi \mp l)$, δ – дельта-функция Дирака, J_1 – функция Бесселя первого рода. Постоянные множители в (14)–(17) подобраны таким образом, чтобы выполнялось условие $\int_0^l f(\xi) d\xi = l$.

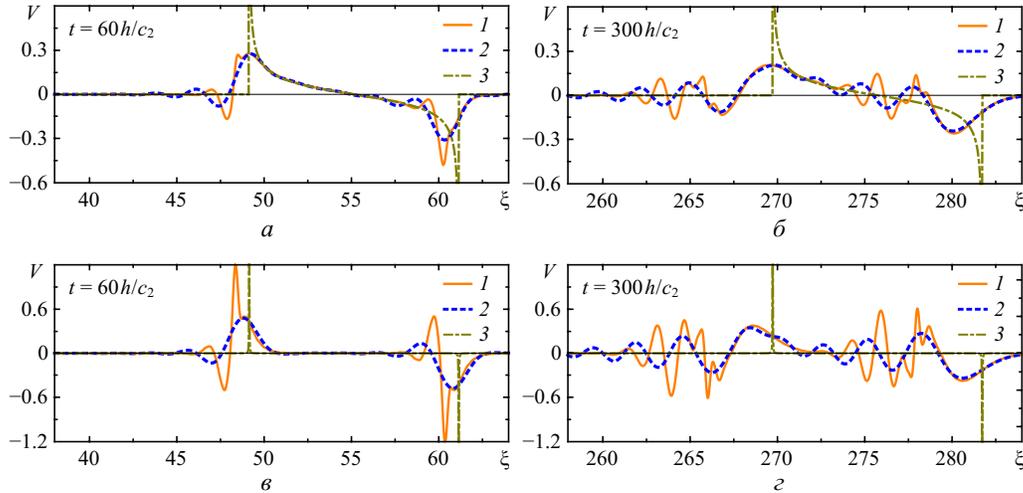


Рис. 6. То же, что рис. 3, для законов распределения нагрузки (17) $f_4(a, б)$ и $f_5(в, г)$

Спектр нагрузки (14) локализован в окрестности волнового числа $2\pi/l$. При $l \gg 2\pi$ влияние дисперсии заметно только на очень больших временах (см. рис. 3), так что можно считать применимым решение (13). С уменьшением l влияние дисперсии увеличивается, при этом уточненная модель достаточно точно описывает искажение профиля. В случаях (15)–(17) решение по теории пластин содержит разрыв на фронте волны, однако уточненная модель и решение по трехмерной теории показывают, что этот разрыв сглаживается. Увеличение степени локализации нагрузки у границ области приводит к возрастанию амплитуды высокочастотных осцилляций, и к увеличению пика, связанного с угловой волной.

Заключение

Исследование, проведенное в данной работе, показывает, что уточненная асимптотическая модель позволяет, в целом, получить качественно верное описание поля краевой волны. Исключение составляют пики, связанные с угловой волной, и высокочастотная осцилляция, однако на практике эти эффекты быстро затухают вследствие внутреннего трения. С количественной точки зрения уточненная модель дает достаточно точные результаты в случае сглаженной нагрузки, а также на больших временах в окрестности квазифронта в случае разрывной нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Wilde M. V., Golub M. V., Eremin A. A. Experimental and theoretical investigation of edge waves propagation and scattering in a thick plate with surface-breaking crack-like defect // Proceedings of 13th European Conference on Non-destructive Testing ECNDT 2018, Gothenburg, Sweden. 2018. p. 0295. URL: <https://www.ndt.net/>.
- [2] Wilde M. V., Golub M. V., Eremin A. A. Experimental and theoretical investigation of transient edge waves excited by a piezoelectric transducer bonded to the edge of a thick elastic plate // Journal of Sound and Vibration. 2019. Vol. 441. P. 26–49.

- [3] Kaplunov J., Prikazchikov D. Asymptotic theory for Rayleigh and Rayleigh-type waves // *Adv. Appl. Mech.* 2017. Vol. 50. P. 1–106.
- [4] Kaplunov J. D., Kossovich L. Y., Nolde E. V. *Dynamics of thin walled elastic bodies*. San Diego: Academic Press, 1998. 226 p.
- [5] Вильде М. В., Сулова М. Ю. Формулировка граничных условий и применение уточненной теории растяжения пластин для описания дисперсии планарной краевой волны // *Современные проблемы механики сплошной среды: труды XIX Международной конференции (Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2018 г.)*. Т. 2. Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2018. С. 68–72.
- [6] Сулова М. Ю., Вильде М. В. Уточненная асимптотическая модель для описания планарной краевой волны в тонкой пластине // *XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах*. Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. С. 199–201.
- [7] Giurgiutiu V. *Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors*. Elsevier Academic Press, 2014. 1024 p.

G. N. Belostochny, M. V. Wilde, M. Yu. Surova

**APPLICATION OF THE REFINED ASYMPTOTIC MODEL FOR DESCRIBING
OF THE TRANSIENT EXTENSIONAL EDGE WAVE EXCITED BY A
TANGENTIAL LOAD APPLIED TO THE EDGE**

Saratov State University, Saratov, Russia

Abstract. The possibility of application of the refined explicit model for extensional edge wave in the problem of transient waves excitation by an edge tangential load is investigated. The refined model is based on the higher order theory of plate extension. The results of comparison with the 3D solution for various distributions of the load are presented. It is shown that the refined model allows correct describing of dispersion effects which are not taken into account in the leading approximation.

Keywords: edge waves, transient waves, plate, asymptotic methods.

REFERENCES

- [1] Wilde M. V., Golub M. V., Eremin A. A. Experimental and theoretical investigation of edge waves propagation and scattering in a thick plate with surface-breaking crack-like defect // Proceedings of 13th European Conference on Non-destructive Testing ECNDT 2018, Gothenburg, Sweden. 2018. p. 0295. URL: <https://www.ndt.net/>.
- [2] Wilde M. V., Golub M. V., Eremin A. A. Experimental and theoretical investigation of transient edge waves excited by a piezoelectric transducer bonded to the edge of a thick elastic plate // Journal of Sound and Vibration. 2019. Vol. 441. P. 26–49.
- [3] Kaplunov J., Prikazchikov D. Asymptotic theory for Rayleigh and Rayleigh-type waves // Adv. Appl. Mech. 2017. Vol. 50. P. 1–106.
- [4] Kaplunov J. D., Kossovich L. Y., Nolde E. V. Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego: Academic Press, 1998. 226 p.
- [5] Wilde M. V., Surova M. Y. Formulation of boundary conditions and application of refined theory of plate extension for describing of tangential edge wave dispersion // Modern Problems of Continuum Mechanics: Proceedings of XIX International conference (Rostov-on-Don, October 15-18, 2018). Vol. 2. Rostov-on-Don: Southern Federal University, 2018. P. 68–72. (in Russian).
- [6] Surova M. Y., Wilde M. V. Refined asymptotic model for the description of a planar edge wave in a thin plate // XII All-Russian congress on fundamental problems of theoretical and applied mechanics: proceedings in 4 volumes. V. 3: Mechanics of deformable solids. Ufa: Bashkir State University, 2019. P. 199–201. (in Russian).
- [7] Giurgiutiu V. Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors. Elsevier Academic Press, 2014. 1024 p.

Belostochny Grigorij Nikolaevich, Doctor of technical Sciences, Professor, Professor of Department of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics, Saratov State University, Saratov, Russia.
Wilde Maria Vladimirovna, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor of Department of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics, Saratov State University, Saratov, Russia.
Surova Maria Yurievna, Postgraduate student of Department of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics, Saratov State University, Saratov, Russia.