

В. В. Козлов^{1,2}, А. А. Маркин¹, В. Е. Петрова³

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ
ПОЛУТОРОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ**

¹ ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», г. Тула, Россия

² МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

³ ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж, Россия

Аннотация. Рассматривается нелинейно-упругая осесимметричная модель полутороидальной оболочки, закрепленной по основаниям, под действием внутреннего давления. Предложен подход к формулировке мер, определяющих напряженно-деформированное состояние оболочки. Для несжимаемого материала получена замкнутая система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций. С помощью метода конечных элементов дана оценка напряженно-деформированного состояния оболочки в случае малых деформаций.

Ключевые слова: полутороидальная оболочка, нелинейная упругость, метод конечных элементов.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.013

УДК: 539.3

Введение Исследование характеристик упругих оболочек при возникновении в них конечных деформаций является перспективным направлением развития механики, что подтверждается большим количеством современных публикаций на эту тему [1–3]. В настоящей работе рассмотрена нелинейно-упругая осесимметричная модель полутороидальной оболочки под действием внутреннего давления. Подобную схему нагружения можно считать актуальной, поскольку она изучается в современных исследованиях [4]. При этом рассматриваются и более сложные схемы – например, в [5] изучается оболочка с эллиптическим сечением. В публикациях [6, 7] рассматривается тороидальная оболочка при воздействии внешнего и внутреннего давлений, изучается эффект устойчивости, возникающий при превышении внешнего давления внутреннего. В качестве первого приближения для оценки напряженно-деформированного состояния при малых деформациях в работе используется метод конечных элементов [8].

1. Кинематика процесса Рассматривается напряженно-деформированное состояние оболочки, опорная поверхность которой имеет в начальном (недеформированном) состоянии форму полутора и нагружается внутренним давлением P . Торцы оболочки закреплены. Четверть схемы расчета представлена на рисунке 1. Оболочка отнесена

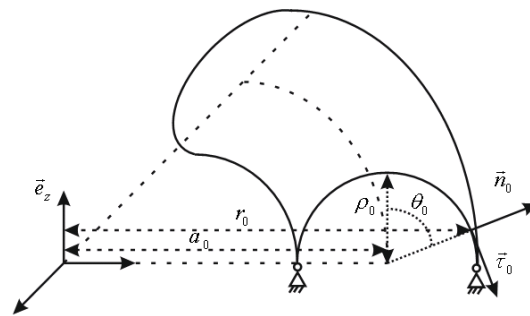


Рис. 1. Схема модели

© Козлов В. В., Маркин А. А., Петрова В. Е., 2020

Козлов Виктор Вячеславович

e-mail: vvkozlovtsu@mail.ru, кандидат физико-математических наук. Доцент кафедры «Вычислительная механика и математика» ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», г. Тула, Россия (основное место работы). Старший научный сотрудник кафедры «Вычислительная механика» МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия (по совместительству).

Маркин Алексей Александрович

e-mail: markin-nikram@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Вычислительная механика и математика» ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», г. Тула, Россия.

Петрова Вера Евгеньевна

e-mail: rnmntamc@main.vsu.ru, доктор физико-математических наук, доцент кафедры «Математический и прикладной анализ» ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж, Россия.

Исследование выполнено частично при финансовой поддержке гранта Президента РФ, проект № МД-1803.2019.1 (формулировка постановки задачи), частично при финансовой поддержке гранта РНФ, проект 19-71-10008 (получение приближения решения в случае малых деформаций).

Поступила 21.11.2020

к цилиндрической системе координат r_0, φ, z_0 . Напряженно-деформированное состояние не зависит от угла φ . Положение точек оболочки, отстающих на расстояние ξ_0 , отсчитываемое вдоль нормали к опорной поверхности вдоль нормали \mathbf{n}_0 , в начальном состоянии определяется в виде

$$\mathbf{x} = (a_0 + \rho_0 \sin \theta_0) \mathbf{e}_r + \rho_0 \cos \theta_0 \mathbf{e}_z + \xi_0 (\sin \theta_0 \mathbf{e}_r + \cos \theta_0 \mathbf{e}_z) \quad (1)$$

Будем полагать, что толщина оболочки в начальном состоянии постоянна и равна h_0 . Тогда $-\frac{h_0}{2} \leq \xi_0 \leq \frac{h_0}{2}$. Положение тех же материальных точек в деформированном состоянии определяется в виде

$$\mathbf{x} = r(\theta_0) \mathbf{e}_r + z(\theta_0) \mathbf{e}_z + \lambda_3(\theta_0) \xi_0 \mathbf{n} \quad (2)$$

Таким образом, положение материальных точек среды характеризуется функциями $r(\theta_0), z(\theta_0), \lambda_3(\theta_0)$, зависящими от начального угла θ_0 , определяющего положение материальных точек. Закон (2) предполагает выполнение обобщенной гипотезы Киргоффа – точки, лежащие на прямой вдоль начальной нормали \vec{n}_0 , остаются на прямой вдоль текущей нормали \mathbf{n} , определяемой углом $\theta(\theta_0)$: $\mathbf{n} = \cos[\theta(\theta_0)] \mathbf{e}_r + \sin[\theta(\theta_0)] \mathbf{e}_z$. При этом $\lambda_3(\theta_0)$ – относительное удлинение (укорочение) нормальных волокон.

Как известно, [9] аффинор деформации связывает материальные элементарные векторы в начальном и деформированном состоянии. Элементарный (бесконечно малый) вектор начального состояния имеет вид

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_0} d\theta_0 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_0} d\xi_0 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} d\varphi = \mathbf{e}_1 d\theta_0 + \mathbf{e}_2 d\xi_0 + \mathbf{e}_3 d\varphi \quad (3)$$

где \mathbf{e}_i – векторы-касательные к координатным линиям. Из выражений (1), (3) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (\rho_0 + \xi_0) (\cos \theta_0 \mathbf{e}_r - \sin \theta_0 \mathbf{e}_z) = (\rho_0 + \xi_0) \boldsymbol{\tau}_0 \\ \mathbf{e}_2 &= (a_0 + \rho_0 \sin \theta_0 + \xi_0 \sin \theta_0) \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_3 &= \sin \theta_0 \mathbf{e}_r + \cos \theta_0 \mathbf{e}_z = \mathbf{n}_0 \end{aligned}$$

Поскольку $a_0 \gg h_0$, пренебрегаем слагаемыми, содержащими ξ_0 в выражениях для \mathbf{e}_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &\simeq \rho_0 \boldsymbol{\tau}_0 \\ \mathbf{e}_2 &\simeq (a_0 + \rho_0 \sin \theta_0) \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{n}_0 \end{aligned} \quad (4)$$

Используя представление отсчетного базиса в виде (4), найдем контравариантные компоненты отсчетного базиса:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^1 &= \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{|\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)|} = \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\tau}_0 \\ \mathbf{e}^2 &= \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)|} = \frac{1}{a_0 + \rho_0 \sin \theta_0} \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{r_0} \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}^3 &= \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)|} = \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}_0 \end{aligned} \quad (5)$$

Элементарный материальный вектор деформированного состояния представим в виде

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_0} d\theta_0 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_0} d\xi_0.$$

Используя выражение (2), получим следующие представления векторов материального базиса:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_0} \simeq \frac{dr}{d\theta_0} \mathbf{e}_r + \frac{dz}{d\theta_0} \mathbf{e}_z = r' \mathbf{e}_r + z' \mathbf{e}_z \\ \mathfrak{D}_2 &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \simeq r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = r \mathbf{e}_\varphi \\ \mathfrak{D}_3 &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_0} = \lambda_3 \mathbf{n} \end{aligned} \quad (6)$$

где $r' = \frac{dr}{d\theta_0}$, $z' = \frac{dz}{d\theta_0}$. Представим тензор-аффинол Φ с помощью (5) и (6) в следующем виде [9]

$$\Phi = \overset{0}{\nabla} \mathbf{x} = \mathbf{e}^i \mathfrak{D}_i = \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\tau}_0 (r' \mathbf{e}_r + z' \mathbf{e}_z) + \frac{r}{r_0} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \lambda_3 \mathbf{n}_0 \mathbf{n} \quad (7)$$

Из определения меры деформаций Коши-Грина через тензор-аффинол находим ее диадное разложение:

$$\mathbf{G} = \Phi \cdot \Phi^T = \frac{(r')^2 + (z')^2}{\rho_0^2} \boldsymbol{\tau}_0 \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{\lambda_3}{\rho_0} [r' (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}) + z' (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n})] (\boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{n}_0 + \mathbf{n}_0 \boldsymbol{\tau}_0) + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \lambda_3^2 \mathbf{n}_0 \mathbf{n}_0$$

В начальном приближении можно пренебречь сдвиговыми компонентами и принять

$$\mathbf{G} \simeq \frac{(r')^2 + (z')^2}{\rho_0^2} \boldsymbol{\tau}_0 \boldsymbol{\tau}_0 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \lambda_3^2 \mathbf{n}_0 \mathbf{n}_0 = \lambda_1^2 \boldsymbol{\tau}_0 \boldsymbol{\tau}_0 + \lambda_2^2 \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \lambda_3^2 \mathbf{n}_0 \mathbf{n}_0 \quad (8)$$

В упрощенном представлении (8) $\boldsymbol{\tau}_0$, \mathbf{e}_φ , \mathbf{n}_0 – главные векторы меры Коши-Грина,

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{(r')^2 + (z')^2}}{\rho_0}, \quad \lambda_2 = \frac{r}{r_0} \quad (9)$$

– относительное удлинение меридионального волокна, относительное удлинение окружного волокна соответственно. Учитывая (8), запишем представления единичного вектора $\boldsymbol{\tau}$, касательного к меридиану в деформированном состоянии и единичный вектор нормали \mathbf{n} к деформированной поверхности:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \frac{\mathfrak{D}_1}{|\mathfrak{D}_1|} = \frac{(r' \mathbf{e}_r + z' \mathbf{e}_z)}{\sqrt{(r')^2 + (z')^2}} = \frac{1}{\rho_0 \lambda_1} \mathfrak{D}_1, \\ \mathbf{n} &= \frac{\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2}{|\mathfrak{D}_1| |\mathfrak{D}_2|} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 r_0 \rho_0} (r' \mathbf{e}_r + z' \mathbf{e}_z) \times r \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\lambda_1 \rho_0} (r' \mathbf{e}_z - z' \mathbf{e}_r) \end{aligned} \quad (10)$$

С учётом данных выражений векторы материального базиса (6) запишем в виде

$$\mathfrak{D}_1 = \lambda_1 \rho_0 \boldsymbol{\tau}; \quad \mathfrak{D}_2 = r \mathbf{e}_\varphi = r_0 \lambda_2 \mathbf{e}_\varphi; \quad \mathfrak{D}_3 = \lambda_3 \mathbf{n} \quad (11)$$

Используя условие $\mathfrak{D}^i \cdot \mathfrak{D}_j = \delta^i_j$, определим векторы контравариантного материального базиса \mathfrak{D}^i из (11):

$$\mathfrak{D}^1 = \frac{\lambda_1}{\rho_0} \boldsymbol{\tau}; \quad \mathfrak{D}^2 = \frac{\lambda_2}{r_0} \mathbf{e}_\varphi; \quad \mathfrak{D}^3 = \frac{1}{\lambda_3} \mathbf{n} \quad (12)$$

Таким образом, описаны меры деформирования среды.

2. Напряженное состояние и уравнения равновесия Для описания напряженного состояния среды в нелинейной теории упругости могут быть использованы различные тензорные меры. Будем полагать, что напряженное состояние в полутороидальной оболочке описывается тензором истинных напряжений и пренебрегаем сдвиговыми напряжениями. Тогда разложение тензора можно представить в виде

$$\mathbf{S} = s^{11} \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_1 + s^{22} \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_2 + s^{33} \mathfrak{D}_3 \mathfrak{D}_3$$

С учётом (11) последнюю формулу преобразуем последнюю формулу:

$$\mathbf{S} = \sigma_{11} \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau} + \sigma_{22} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \sigma_{33} \mathbf{n} \mathbf{n}, \quad (13)$$

где $\sigma_{11} = \lambda_1^2 \rho_0^2 s^{11}$, $\sigma_{22} = (\lambda_2 r_0)^2 s^{22}$, $\sigma_{33} = \lambda_3^2 s^{33}$. Распределение компонент тензора напряжений по начальным координатам $x^1 = \theta_0$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = \xi_0$ должно удовлетворять уравнениям равновесия. Используем смешанную (Лангранжево-Эйлерову) форму условий равновесия [10] при отсутствии массовых сил

$$\exists^i \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x^i} = \mathbf{0}. \quad (14)$$

Полагаем оболочку тонкой: $\frac{h_0}{\rho_0} \ll 1$, а напряженное состояние однородным по толщине. При этом напряжением σ_{33} по сравнению с σ_{11} и σ_{22} пренебрегаем. В условиях равновесия производную от σ_{33} по ξ_0 учитываем. В результате условие равновесия (14) для тензора напряжений (13) примет следующий вид:

$$\exists^1 \cdot \frac{\partial (\sigma_{11} \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau} + \sigma_{22} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi)}{\partial \theta_0} + \exists^2 \cdot \frac{\partial (\sigma_{11} \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau} + \sigma_{22} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi)}{\partial \varphi} + \exists^3 \cdot \frac{\partial \sigma_{33} \mathbf{n} \mathbf{n}}{\partial \xi_0} = \mathbf{0} \quad (15)$$

Касательный и нормальный векторы к меридианной деформированной поверхности могут быть записаны не только с помощью соотношений (10), но и с помощью угла $\theta(\theta_0)$ в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_z, \\ \boldsymbol{\tau} &= \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (16)$$

В (16) угол θ определяется из соотношений (8), (10):

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z = \frac{r'}{\lambda_1 \rho_0} = \frac{r_0 \lambda_2'}{\rho_0 \lambda_1}, \\ \sin \theta &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r = -\frac{z'}{\lambda_1 \rho_0} \end{aligned} \quad (17)$$

С помощью (17) запишем производные векторов $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{e}_φ , а также угла θ по начальному углу θ_0 , входящие в первое слагаемое (15):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \theta_0} = -(\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_z) \theta' \equiv -\theta' \mathbf{n}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta_0} = \mathbf{0} \quad (19)$$

$$\theta' = \frac{d\theta}{d\theta_0} = -\frac{\lambda_1}{z'} \left(\frac{r'}{\lambda_1} \right)' = -\frac{\lambda_1 r_0}{z'} \left(\frac{\lambda_2'}{\lambda_1} \right)' \quad (20)$$

Для второго слагаемого (15) с помощью (10) полезно получить дифференциальные соотношения

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \varphi} = \frac{r'}{\lambda_1 \rho_0} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \cos \theta \mathbf{e}_\varphi \quad (21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_r = -\cos \theta \boldsymbol{\tau} - \sin \theta \mathbf{n} \quad (22)$$

Раскрывая производные (15) с помощью (18)–(22) и используя выражения вектором взаимного материального базиса (12), получим уравнения равновесия в виде

$$\left(\frac{1}{\lambda_1 \rho_0} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta_0} + \frac{\cos \theta}{\lambda_2 r_0} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \right) \boldsymbol{\tau} + \left(-\frac{\theta'}{\lambda_1 \rho_0} \sigma_{11} - \frac{\sin \theta}{\lambda_2 r_0} \sigma_{22} + \frac{1}{\lambda_3} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \xi_0} \right) \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Приравнивая к нулю компоненты вектора в левой части последнего выражения, получим с учётом (17) уравнения равновесия в координатной форме:

$$r \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta_0} + \frac{\partial r}{\partial \theta_0} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) = 0 \quad (23)$$

$$\lambda_3 (\theta' r \sigma_{11} + \lambda_1 \rho_0 \sin \theta \sigma_{22}) - \lambda_1 \rho_0 r \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \xi_0} = 0 \quad (24)$$

Если принять материал несжимаемым, относительное удлинение нормальных волокон λ_3 также может быть выражено через функции

$$\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{\rho_0 r_0 \cos \theta}{r' r} \quad (25)$$

3. Определяющие соотношения, замкнутая система уравнений Для замыкания системы уравнений (23)–(25) необходимо определить связь между тензором истинных напряжений и соответствующей мерой деформации. Пренебрежем изменением углов между материальными волокнами в процессе деформирования. Тогда из работы [11] следует, что для изотропных несжимаемых материалов в рамках данной постановки можно использовать выражение

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G \ln \mathbf{V} + \sigma_0 \mathbf{E}, \quad (26)$$

где \mathbf{V} – правая мера искажения, $\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$. По определению [10],

$$\mathbf{V}^2 = \boldsymbol{\Phi}^T \cdot \boldsymbol{\Phi}$$

Используем приближенное выражение аффинора, следующее из его представления (7) с учетом формул для λ_i :

$$\boldsymbol{\Phi} \simeq \lambda_1 \boldsymbol{\tau}_0 \boldsymbol{\tau} + \lambda_2 \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \lambda_3 \mathbf{n}_0 \mathbf{n}$$

Тогда

$$\mathbf{V}^2 \simeq \lambda_1^2 \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau} + \lambda_2^2 \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \lambda_3^2 \mathbf{n} \mathbf{n},$$

откуда

$$\mathbf{V} \simeq \lambda_1 \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau} + \lambda_2 \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \lambda_3 \mathbf{n} \mathbf{n}.$$

Тогда из последнего соотношения и (26) получим при условии плоского напряженного состояния, когда $\sigma_{33} = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2G \ln \lambda_1 + \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \\ \sigma_{22} &= 2G \ln \lambda_2 + \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22}). \end{aligned}$$

Разрешая данную систему относительно σ_{11} и σ_{22} , получим

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 4G \ln \lambda_1 - 2G \ln \lambda_2 = 2G (2 \ln \lambda_1 - \ln \lambda_2) \\ \sigma_{22} &= 2G (2 \ln \lambda_2 - \ln \lambda_1) \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, уравнение равновесия (23) вместе с формулировкой компонент напряжений (27) и выражениями (9) для λ_i является уравнение относительно неизвестных функций $r(\theta_0)$, $z(\theta_0)$. Для упрощения уравнения равновесия (24) запишем граничные условия для вектора напряжений на внешней (нормаль \mathbf{n}_0^+) и внутренней (нормаль \mathbf{n}_0^-) поверхностей полутороидальной оболочки:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{n}_0^-) &= P \mathbf{n}_0 = \boldsymbol{\sigma}|_{\xi=-\frac{h_0}{2}} \cdot \mathbf{n}_0^- = -\sigma_{33}|_{\xi=-\frac{h_0}{2}} \mathbf{n}_0 \\ \mathbf{P}(\mathbf{n}_0^+) &= \mathbf{0} = \sigma_{33}|_{\xi=\frac{h_0}{2}} \mathbf{n}_0 \end{aligned}$$

Проинтегрируем уравнение (24) по координате ξ_0 от $-\frac{h_0}{2}$ до $\frac{h_0}{2}$. В результате данное уравнение примет следующий вид:

$$\lambda_3 h_0 (\theta_0) (\theta' r \sigma_{11} + \lambda_1 \rho_0 \sin \theta \sigma_{22}) = \lambda_1 \rho_0 r P \quad (28)$$

Уравнения (23), (28), выражения (8), (25) для λ_i с компонентами σ_{ii} (27) образуют замкнутую систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $r(\theta_0)$, $z(\theta_0)$. Для решения данной системы используем граничные условия в перемещениях:

$$\begin{aligned} r|_{\theta_0=-\frac{\pi}{2}} &= a_0 - \rho_0, & r|_{\theta_0=\frac{\pi}{2}} &= a_0 + \rho_0, \\ z|_{\theta_0=-\frac{\pi}{2}} &= 0, & z|_{\theta_0=\frac{\pi}{2}} &= 0 \end{aligned}$$

4. Оценка напряженно деформированного состояния оболочки в случае малых деформаций В качестве первого приближения для оценки напряженно-деформированного состояния оболочки используем решение соответствующей задачи в случае малых деформаций. Методом конечных элементов для безразмерной модели с параметрами $P = 0.05$, $a_0 = 1$, $\rho_0 = 0.1$, $h_0 = 0.02$, $G = 0.5$ получен вид деформированного состояния срединной поверхности оболочки. На рисунке 2 представлен

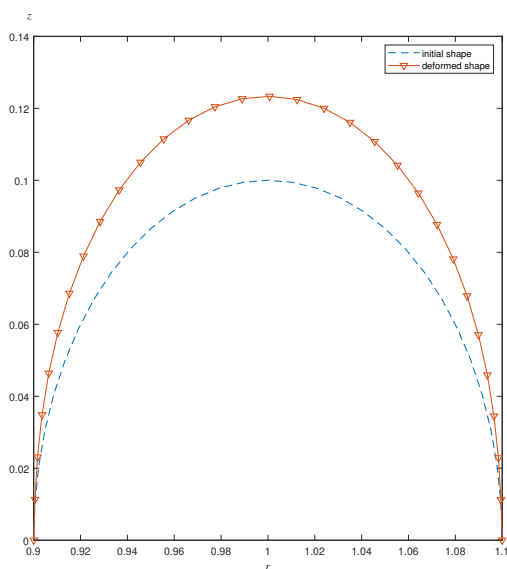


Рис. 2. Деформированный и недеформированный вид сечения оболочки.

деформированный (deformed shape) и недеформированный (initial shape). Данное решение можно использовать в качестве приближения при решении задачи в конечных деформациях.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Cowley J., Mulholland A., Gachagan A. A. Nonlinear elasticity approach to modelling the collapse of a shelled microbubble // IMA Journal of Applied Mathematics (Institute of Mathematics and Its Applications). 2017. no. V(82). p. 781–801.
- [2] Киселев В. В., Долгих Д. В. Влияние жестких связей на изменение формы гидростатически сжатой оболочки // Прикладная механика и техническая физика. 2017. № 3. с. 178–189.
- [3] Жгутов В. М. Нелинейные уравнения равновесия ребристых оболочек с учетом различных свойств материала // Инженерно-строительный журнал. 2010. № 2(12). с. 36–44.

- [4] Jiammeepreecha W., Chucheeprakul S. Nonlinear static analysis of an underwater elastic semi-toroidal shell // *Thin-Walled Structures*. 2017. no. V(116). p. 12–18.
- [5] Chernyshenko I. S., Maksimyyuk V. A. On the stress-strain state of toroidal shells of elliptical cross section formed from nonlinear elastic or-thotropic materials // *International Applied Mechanics*. 2000. no. V(36). P. 90–97.
- [6] Бужков И. А., Лысенко А. В. Особенность осесимметричного деформирования надувной торообразной оболочки при воздействии внешнего давления // *Космонавтика и ракетостроение*. 2014. № 6(79). с. 56–58.
- [7] Buckling characteristics of externally pressurised toroidal shell / Y. Zhu, B. Chen, B. Zhao et al. // *Ships and Offshore Structures*. 2019. no. 15(8). P. 804–814.
- [8] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Москва: Мир, 1975. 541 с.
- [9] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. 512 с.
- [10] Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. Москва: Физматлит, 2013. 320 с.
- [11] Маркин А. А., Христинич Д. В. Нелинейная теория упругости: учеб. пособие: 2-е изд., доп. Тула: Издательство ТулГУ, 2007. 92 с.

V. V. Kozlov^{1,2}, A.A. Markin¹, V. E. Petrova³

FORMULATION OF THE PROBLEM OF FINITE DEFORMATIONS OF A SEMI-TOROIDAL SHELL UNDER THE INTERNAL PRESSURE

¹*Tula State University, Tula, Russia*

²*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

³*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

Abstract. A nonlinear elastic axisymmetric model of a semi-toroidal shell fixed at the bases under the internal pressure is considered. An approach to the formulation of measures that determine the stress-strain state of the shell is proposed. For an incompressible material, a closed system of nonlinear ordinary differential equations for unknown functions is obtained. The finite element method is used to estimate the stress-strain state of the shell in the case of small deformations.

Keywords: semi-toroidal shell, nonlinear elasticity, finite element method.

Kozlov Viktor Vyacheslavovich, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the department «Computational mechanics and mathematics» of Tula State University, Tula, Russia (main place of work). Senior researcher of the department «Computational mechanics» of Lomonosov Moscow State University (part time).

Markin Alexey Alexandrovich, doctor of physical and mathematical sciences, professor of the department «Computational mechanics and mathematics» of Tula State University, Tula, Russia.

Petrova Vera Evgenievna, doctor of physical and mathematical sciences, associate professor of the department «Mathematical and applied analysis» of Voronezh State University, Voronezh, Russia.

The study was partially supported by a grant from the President of the Russian Federation, project No. MD-1803.2019.1 (formulation of the problem statement), partially with the financial support of a grant from the Russian Science Foundation, project 19-71-10008 (obtaining an approximation of the solution in the case of small deformations).

REFERENCES

- [1] Cowley J., Mulholland A., Gachagan A. A. Nonlinear elasticity approach to modelling the collapse of a shelled microbubble // *IMA Journal of Applied Mathematics (Institute of Mathematics and Its Applications)*. 2017. no. V(82). p. 781–801.
- [2] Kiselev V. V., Dolgikh D. V. Influence of rigid constraints on the deformation of a hydrostatically compressed shell // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2017. no. 3. P. 178–189. (in Russian).
- [3] Zhgutov V. M. Nonlinear equilibrium equations for ribbed shells with consider various material properties // *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal*. 2010. no. 2(12). P. 36–44. (in Russian).
- [4] Jiammeeprecha W., Chucheepsakul S. Nonlinear static analysis of an underwater elastic semi-toroidal shell // *Thin-Walled Structures*. 2017. no. V(116). p. 12–18.
- [5] Chernyshenko I. S., Maksimyuk V. A. On the stress-strain state of toroidal shells of elliptical cross section formed from nonlinear elastic or-thotropic materials // *International Applied Mechanics*. 2000. no. V(36). P. 90–97.
- [6] Buyakov I. A., Lysenko A. V. Feature of an axisymmetric straining inflatable toroidal shell when exposed to an external pressure // *Kosmonavtika i raketostroenie*. 2014. no. 6(79). P. 56–58. (in Russian).
- [7] Buckling characteristics of externally pressurised toroidal shell / Y. Zhu, B. Chen, B. Zhao et al. // *Ships and Offshore Structures*. 2019. no. 15(8). P. 804–814.
- [8] Zienkiewicz O. C. *The finite element method in engineering science*. Moscow: Mir, 1975. 541 p. (in Russian).
- [9] Lurie A. I. *Nonlinear theory of elasticity*. Moscow: Nauka, 1980. 512 p. (in Russian).
- [10] Markin A. A., Sokolova M. Y. *Thermomechanics of elastoplastic deformation*. Moscow: Fizmatlit, 2013. 320 p. (in Russian).
- [11] Markin A. A., Khristich D. V. *Nonlinear theory of elasticity: tutorial, second edition*. Tula: TulGU, 2007. 92 p. (in Russian).