

М. И. Быкова¹, Н. Д. Вервейко¹, С. Е. Крупенко¹, А. И. Шашкин¹, С. А. Шашкина²

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛУЧЕВЫМ МЕТОДОМ
ПЕРЕНОСА ИНТЕНСИВНОСТИ ПЕРЕДНИХ КРОМОК
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТРЕЩИН
ФРОНТАМИ ПРОДОЛЬНЫХ И СДВИГОВЫХ ВОЛН**

¹Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

²Воронежский учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж, Россия

Аннотация. В ближайшей окрестности вершины плоской трещины, а в общем случае, вблизи передней кромки пространственной трещины, деформирование материала носит неупругий характер. В работе предложено лучевое моделирование высокоскоростного деформирования материала в δ -окрестности подвижной передней кромки трещины, используя динамическую упруговязкопластическую модель тела Бингама с условием пластичности Мизеса. Показано, что распространяющаяся передняя кромка трещины продольного сдвига лежит на поверхности сильного разрыва продольной скорости, бегущей со скоростью упругих продольных волн, а передняя кромка трещины отрыва и трещины поперечного сдвига лежит на поверхности сдвиговой волны, бегущей со скоростью волн сдвига. Введены интенсивности передних кромок трещин: скачок скорости сдвига поперек передней кромки трещины продольного сдвига, скачок поперечной скорости на передней кромке трещины отрыва, скачок касательной скорости к передней кромке трещины поперечного сдвига. Построены обыкновенные дифференциальные уравнения переноса интенсивностей передних кромок трещин вдоль лучей как ортогональных траекторий точек переднего фронта. Получены приближенные решения уравнений переноса интенсивностей передних кромок пространственных трещин в напряженный материал и приведены выражения для глубины проникания пространственных трещин. Показано изменение направления сдвига и отрыва в передних кромках соответствующих трещин в зависимости от напряженного состояния перед трещинами. Приведены графики численных расчетов переноса интенсивностей передних кромок трещин и глубины их проникания.

Ключевые слова: лучевой метод, передняя кромка, пространственная трещина, интенсивность кромки трещины, перенос интенсивности.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.014

УДК: 539.3+539.374

Введение. Сложность математического моделирования явления зарождения и дальнейшего движения пространственных трещин в хрупких материалах обусловлена недостаточностью экспериментальных данных и развитых математических моделей поведения материала в ближайшей окрестности передней кромки трещины [1]. Электронная микроскопия образцов при пластическом деформировании [2] показала сложнейшие процессы скольжения по пленкам боковых поверхностей кристаллов и их агломератов, при котором происходит изменение химических и физических свойств материала. Проведение динамических экспериментов затруднено высокими значениями скоростей распространения трещин и ограниченными величинами геометрических размеров образцов, что ведет к влиянию границ за счет отраженных волн. В [3, 4] приведены оценки величин скоростей распространения вершин трещин, которые оцениваются как близкие к скоростям c_1 и c_2 распространения продольных и сдвиговых упругих волн.

Теоретические постановки задач в перемещениях о движении вершины трещины, как вершины полубесконечного разреза, бегущего с произвольной постоянной скоростью v показали [1], что характерными числами в этих задачах являются скорости упругих продольных c_1 и сдвиговых c_2 волн и волн Релея c_R , так что без внешних границ задачи и внешнего воздействия в области вершины трещины скорость вершины определяется скоростями c_1 , c_2 , c_R .

Анализ кинематики деформирования материала в перемещениях вблизи вершины трещины выявил три основных вида возможного развития трещины — продольный сдвиг, отрыв и поперечный сдвиг по отношению к направлению развития трещины. В рамках упругой модели напряженное состояние в окрестности вершины трещины оценивается как величина $\sigma_r \sim K/\sqrt{r}$, где K — коэффициент интенсивности напряжений; r — расстояние от вершины трещины [3, 4]. Предельное равновесие трещины в окрестности ее вершины исследовалось для определения коэффициента интенсивности напряжений K , исходя из двух критериев: 1) достижения предела прочности на отрыв или сдвиг; 2) равенства потери механической энергии за счет перемещения

© М. И. Быкова, Н. Д. Вервейко, С. Е. Крупенко, А. И. Шашкин, С. А. Шашкина, 2020

Быкова Мария Игоревна

e-mail: bykova_mi@amm.vsu.ru, доцент, кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия.

Вервейко Николай Дмитриевич

e-mail: dean@amm.vsu.ru, профессор, доктор технических наук, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия.

Крупенко Светлана Евгеньевна

e-mail: dean@amm.vsu.ru, аспирант, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия.

Шашкин Александр Иванович

e-mail: dean@amm.vsu.ru, профессор, доктор физико-математических наук, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия.

Шашкина Софья Александровна

e-mail: soffia-alex@inbox.ru, доцент, кандидат физико-математических наук, Воронежский учебно-научный центр Военно-воздушных сил “Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина”, Воронеж, Россия.

Поступила 30.09.2020

вершины трещины на δl расстояние и перетока этой энергии в поверхностную энергию приращенной на δl границы трещины.

В [5, 6] показана эквивалентность этих критериев и это позволяет использовать любой из критериев в качестве определяющего начало движения вершины трещины или передней кромки пространственной трещины.

Для исключения особенности типа $1/\sqrt{r}$ в распределении напряжений в ближайшей окрестности вершины трещины многие авторы [3, 4] использовали классическую модель пластического материала с постоянным пределом пластичности K [5].

Предельное напряженное состояние материала для модели с учетом повреждаемости в малой окрестности вершины трещины исследовано в [8–10] для случая сложного нагружения. Локальные приближения свойств разрушенных материалов приведены в [11]. Исследование статического напряженного состояния в окрестности вершины трещины на модели атомарного взаимодействия приведено в [12]. Авторы работы [13] для анализа напряжений в вершине трехмерной трещины использовали 2-ух масштабные конечные элементы.

Высокая скорость распространения вершины трещины допускает выделение малой окрестности на фронте волн сильного разрыва скоростей и напряжений для описания динамического поведения скоростей и напряжений с использованием аппарата волновой динамики [14–20].

В случае подвижных трещин деформирование в особой точке — вершине трещины — достигает конечных значений за очень малое время, так что скорость деформаций достигает больших значений. Эксперименты по высокоскоростному деформированию материалов показали возрастание предела пластичности с ростом скорости деформирования [6, 15], что позволяет в линейной аппроксимации принять линейный закон роста напряжений от скорости деформирования на пластических деформациях.

Экспериментальные данные и теоретические модели деформирования позволяют сформулировать математическую модель динамического поведения материала в окрестности передней подвижной кромки трещины в виде совокупности динамических уравнений упруговязкопластического деформирования Бингама при условии пластичности Мизеса.

1. Математическая модель пространственного деформирования упруговязкопластического материала в окрестности вершины трещины. Модель (рис. 1) упруговязкопластического материала [7, 8] до достижения условия пластичности Мизеса с пределом пластичности K допускает только упругие деформации, а потом включает в полные деформации еще и пластические деформации с вязким сопротивлением на скоростях пластических деформаций

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - 2\mu e_{ij}^p, \quad e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p, \\ e_{ij}^p = e_{ij}^v, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial t} = \frac{(I_2 - K\sqrt{2})\sigma'_{ij}}{I_2\eta}. \quad (1)$$

Здесь $e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ — полные деформации по Коши; $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$; $I_2 = (\sigma'_{ij}\sigma'_{ij})^{1/2}$, где $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ — девиаторные компоненты тензора напряжений σ_{ij} ; λ, μ — упругие параметры Ламе; η — коэффициент вязкости.

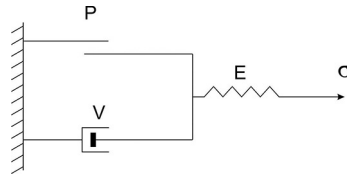


Рис. 1. Схематическое изображение элемента материала Бингама, обладающего упругими, пластическими и вязкими свойствами

Единой кривой “напряжение-деформация” для модели этого материала не существует, а скорость деформирования играет роль параметра динамического упрочнения, что наблюдается при динамических экспериментах, когда с увеличением скорости деформирования динамический предел пластичности возрастает [6].

На рис. 2 представлен трехмерный график в пространстве σ, e, \dot{e} (напряжение, деформация, скорость деформации) возможных кривых σ, e в плоскости σ, e (напряжение, деформация).

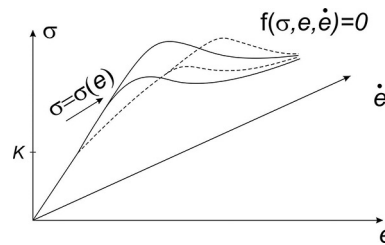


Рис. 2. Схематическое изображение экспериментов динамического нагружения, где в плоскости σ, e наблюдаемая диаграмма динамического нагружения есть проекция конкретной пространственной кривой $f(\sigma, e, \dot{e})$

Реологические уравнения (1) представляют собой систему уравнений, включающую в себя линейные уравнения в частных производных и нелинейные (точнее, полулинейные) уравнения для скоростей $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \partial e_{ij}^p / \partial t$ пластических деформаций. Условие пластичности Мизеса играет роль критерия возникновения скорости пластических деформаций, так что это условие формулируется в виде следующих неравенств:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0, \text{ если } \sigma_{ij}^p \sigma_{ij}^p - 2K^2 < 0; \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p \neq 0, \text{ если } \sigma_{ij}^p \sigma_{ij}^p - 2K^2 \geq 0. \quad (2)$$

Математическая модель динамического деформирования упруговязкопластического материала в окрестности передней кромки трещины отрыва, представленная как полная система уравнений, в которой число уравнений совпадает с числом функций, определяющих напряженно-деформированное состояние, задается реологическими уравнениями, уравнениями движения в напряжениях

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i \quad (3)$$

и уравнением неразрывности $\rho = \rho_0 = \text{const}$.

Систему уравнений (1–3) рассмотрим в окрестности переднего фронта пластического предвестника трещины.

Запишем систему уравнений (1–3), содержащую частные производные по x и времени t в подвижной системе координат:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial n} n_i + g^{\alpha\beta} \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} \frac{\partial f}{\partial y_\alpha}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\delta f}{\delta t} - c \frac{\partial f}{\partial n}, \quad (i = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2). \quad (4)$$

Здесь $\delta f / \delta t$ — локальная производная по времени t от функции, заданной на подвижной поверхности Σ ; $(\partial x_i / \partial y_\alpha)(\partial x_i / \partial y_\beta) = g^{\alpha\beta}$ — метрический тензор.

Реологические уравнения (1) и уравнения движения в напряжениях (3) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu(e_{ij} - e_{ij}^p), \quad \varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial t} = \frac{\delta e_{ij}^p}{\delta t} - c \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial n} = \frac{I_2 - K\sqrt{2}}{I_2\eta} \sigma'_{ij}, \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial n} n_j + \frac{\partial u_j}{\partial n} n_i + g^{\alpha\beta} \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} \frac{\partial u_i}{\partial y_\alpha} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} \frac{\partial u_j}{\partial y_\alpha} \right), \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\delta u_i}{\delta t} - c \frac{\partial u_i}{\partial n}, \\ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \rho \frac{\delta v_i}{\delta t} - c \frac{\partial v_i}{\partial n} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial n} n_j + g^{\alpha\beta} \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_\alpha} + b_i. \end{aligned} \quad (5)$$

Представление решений для скоростей и напряжений в виде степенного ряда по направлению нормали и в окрестности переднего фронта волнового предвестника трещины

$$f(n, y_1, y_2, t) = \sum \frac{1}{l!} \frac{\partial^l f(0, y_1, y_2, t)}{\partial n^l} n^l \quad (6)$$

относится к классу обобщенных функций, которые не обладают производной по нормали в точке $n = 0$ (рис. 3) и поэтому должны удовлетворять дифференциальным законам (5) в интегральном виде.

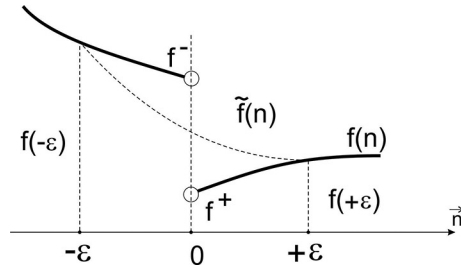


Рис. 3. Схематическое представление обобщенной функции $f(n)$, имеющей разрыв при $n = 0$ ($f(0^+) \neq f(0^-)$), непрерывной функцией $\tilde{f}(n)$ на интервале $n \in [-\varepsilon; +\varepsilon]$

Интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных (5) по n в пределах от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$ и переход к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ дает следующие уравнения:

$$-\rho c [v_i] = [\sigma_{ij}] n_j, \quad [e_{ij}^p] = 0, \quad \left[\frac{\partial e_{ij}^p}{\partial n} \right] \neq 0. \quad (7)$$

Второе уравнение отражает тот физический факт, что на поверхности Σ_δ , предвестника трещины пластические деформации e_{ij}^p непрерывны и зарождается только градиент пластических деформаций:

$$[e_{ij}^p] = 0, \quad \left[\frac{\partial e_{ij}^p}{\partial n} \right] \neq 0. \quad (8)$$

Реологические уравнения в (5) и выражения для деформаций e_{ij} и скоростей v_i , взятые в виде разности по значениям входящих величин справа и слева от поверхности предвестника Σ_δ , приводят к следующим выражениям:

$$[\sigma_{ij}] = \lambda[e_{kk}]\delta_{ij} + 2\mu([e_{ij}] - [e_{ij}^p]), \quad [v_i] = \frac{\delta[u_i]}{\delta t} - c \left[\frac{\partial u_i}{\partial n} \right],$$

$$[e_{ij}] = \frac{1}{2} \left([u_{i,j}] + [u_{j,i}] + g^{\alpha\beta} x_{j,\beta} \left[\frac{\partial u_i}{\partial y_\alpha} \right] + g^{\alpha\beta} x_{i,\beta} \left[\frac{\partial u_j}{\partial y_\alpha} \right] \right). \quad (9)$$

Система уравнений (7–9) является линейной однородной системой алгебраических уравнений для скачков скоростей $[v_i]$, градиентов перемещений $[\partial u_i / \partial n]$, напряжений $[\sigma_{ij}]$, перемещений $[u_i]$ и касательных вдоль y_α градиентов перемещений $[\partial u_i / \partial y_\alpha]$.

Условие непрерывности перемещений вдоль Σ_δ по y_α и условие сплошности материала, отсутствие разрывов перемещений в предвестнике приводят к равенствам

$$\frac{\delta[u_i]}{\delta t} = 0, \quad \left[\frac{\partial u_i}{\partial y_\alpha} \right] = \frac{\partial[u_i]}{\partial y_\alpha} = 0. \quad (10)$$

Исключая $[\sigma_{ij}]$, $[e_{ij}]$, $[u_{i,j}]$, уравнения (9) приводятся к виду

$$\rho c^2 [v_i] = (\lambda + \mu) [v_j] n_i n_j + \mu [v_i]. \quad (11)$$

Существует только два отличных от нуля решения для $[v_i]$:

$$[v_i] n_i = \omega_n \text{ при условии } \rho c_1^2 = \lambda + 2\mu; \quad (12)$$

$$[v_i] \tau_i = \omega_\tau \text{ при условии } \rho c_2^2 = \mu. \quad (13)$$

Допустимые разрывные решения со скачками нормальной компоненты скорости $[v_n] = \omega_n$ на фронте Σ_1 , перемещающемся со скоростью c_1 (рис. 4) и касательной компоненты скорости $[v_\tau] = \omega_\tau$ на фронте Σ_2 , перемещающейся со скоростью c_2 (рис. 5, 6), имеют место в окрестности передней кромки трещины.

Соответствие кинематики перемещений материала в окрестности трещин продольного сдвига, отрыва и антиплоской деформации позволяет построить математическую модель движения материала вблизи кромки пространственной трещины в терминах скоростей перемещений материальных точек среды.

2. Математическая модель передней кромки трещины. Выделим δ -окрестность передней кромки трещины L в форме цилиндра S_δ с криволинейной осью L . Поверхность Σ_δ является поверхностью слабого разрыва, порожденного начальным возмущением при зарождении кромки трещины. Кривую L_δ на Σ_δ будем считать предвестником кромки трещины L .

Рассмотрим след передней кромки трещины на фронте Σ_δ волнового предвестника, который представлен пространственной кривой L_δ , принадлежащей поверхности Σ_δ (рис. 7).

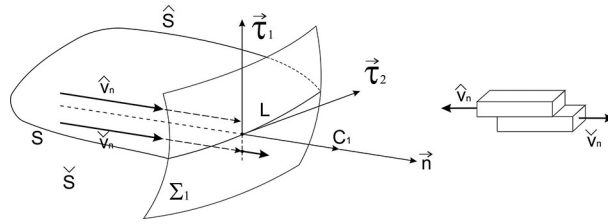


Рис. 4. Изображение поверхности Σ_1 волны продольного к Σ_1 разрыва скорости и напряжения, поверхности S трещины продольного сдвига с передней кромкой L , лежащей на фронте Σ_1 , и поведения материала вблизи вершины трещины продольного сдвига. Знаки \wedge и \vee используются для обозначения значения функций за Σ_δ в точках выше (знак \wedge) или ниже (знак \vee) следа L_δ трещины на Σ_δ для случая трещины L отрыва, поперечного или продольного сдвига.

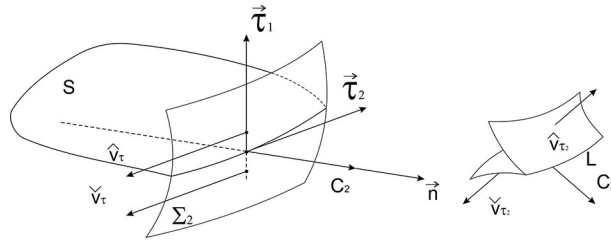


Рис. 5. Изображение поверхности Σ_2 волны разрыва скорости и напряжений, касательных к Σ_2 и L , и поверхности S с передней кромкой L , лежащей на фронте Σ_2 , и поведения материала вблизи вершины трещины антиплоского сдвига

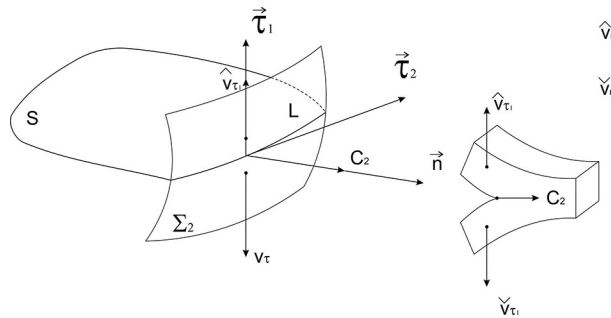


Рис. 6. Изображение поверхности Σ_2 волны разрыва скоростей и напряжений, касательных к Σ_2 , но перпендикулярных к передней кромке трещины L , лежащей на фронте Σ_2 и поведения материала вблизи вершины трещины отрыва

Соответствие кинематики поведения материала вблизи вершины трещины в перемещениях и кинематики поведения материала в окрестности фронтов продольной и сдвиговой волн в скоростях перемещений приводит к заключению:

1) передняя кромка предвестника l_δ пространственной трещины L распространяется как ортогональная траектория лучей волнового фронта Σ_δ с принадлежащей ему

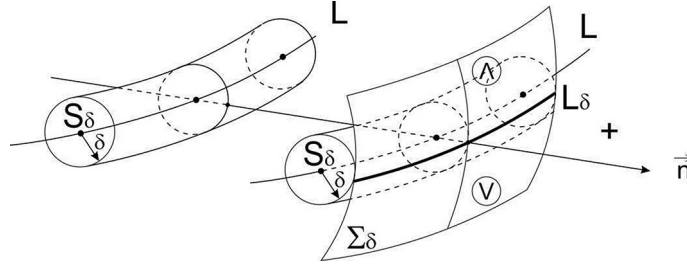


Рис. 7. Схематическое изображение предвестника Σ_δ трещины и следа L_δ трещины на предвестнике.

линией L_δ с разрывами скоростей и напряжений при переходе поперек самой линии на Σ_δ :

— передняя кромка трещины продольного сдвига распространяется со скоростью c_1 волн продольной деформации в упругом теле (рис. 4);

— передняя кромка трещины антипродольного сдвига и трещины отрыва распространяется со скоростью c_2 сдвиговых волн (рис. 5, 6);

2) в качестве интенсивности передних кромок трещин удобно выбрать скачок скорости на поверхности Σ_δ при переходе через переднюю кромку L_δ трещины S :

— для трещины продольного сдвига на Σ_1 (рис. 4)

$$\omega_{nL} = (\hat{v}_n - \check{v}_n)|_L = [v_n]_L; \quad (14)$$

— для трещины антиплоского сдвига на Σ_2 (рис. 5)

$$\omega_{2L} = (\hat{v}_{\tau_2} - \check{v}_{\tau_2})|_L = [v_{\tau_2}]_L; \quad (15)$$

— для трещины отрыва на Σ_2 (рис. 6)

$$\omega_{1L} = (\hat{v}_{\tau_1} - \check{v}_{\tau_1})|_L = [v_{\tau_1}]_L. \quad (16)$$

Таким образом, тип трещины определяется видом предвестника Σ_1 или Σ_2 , а само существование передней кромки определяется интенсивностью переднего фронта — превышением динамического второго инварианта девиатора тензора напряжений над статическим пределом пластичности K : $\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} \geq K^2$ в области за предвестниками Σ_1 и Σ_2 .

3. Упруговязкопластическое деформирование материала в окрестности передней кромки трещины. Введем сильные разрывы скоростей и напряжений на кривой L , принадлежащей волновой поверхности Σ .

Линейные уравнения для скоростей и напряжений при переходе через поверхности

$$c[\sigma_{ij}] = -\lambda[v_k]n_k\delta_{ij} - \mu([v_i]n_j + [v_j]n_i), \quad (17)$$

$$\rho c[v_i] = -[\sigma_{ij}]n_j \quad (18)$$

получены в предположении наличия тонкого переходного слоя поперек поверхности Σ толщиной h для быстроменяющихся функций вдоль нормали \bar{n} при $h \rightarrow 0$ [10, 11]. Допустимо не только гладкое изменение функций вдоль поверхности Σ , но и разрывное поведение с наличием разрывов первого рода конечной величины.

Введем разрывы функций на кривой $L \in \Sigma$ (рис. 3), используя выражения

$$\begin{aligned} \hat{f}^- &= \hat{v}^+ - [\hat{f}], & \check{f}^- &= \check{f}^+ - [\check{f}], & \hat{f}^+ &= \check{f}^+, \\ [f]_l &= \hat{f}^- - \check{f}^- = \hat{f}^+ - [\hat{f}] - \check{f}^+ + [\check{f}] = -[\hat{f}] + [\check{f}]. \end{aligned} \quad (19)$$

Производя вычитание уравнений (17), (18), взятых выше L и ниже L , получим

$$c[\sigma_{ij}]_L = -\lambda[v_k]_L n_k \delta_{ij} - \mu([v_i]_L n_j + [v_j]_L n_i), \quad \rho c[v_i]_L = -[\sigma_{ij}]_L n_j. \quad (20)$$

Из последних уравнений для скачков скоростей и напряжений на линии L следует, что таких подвижных поверхностей Σ с линией L существует две (Σ_1 и Σ_2), распространяющихся со скоростями: c_1 — для продольных волн ($\rho c_1^2 = \lambda + 2\mu$); c_2 — для сдвиговых волн ($\rho c_2^2 = \mu$). На этих поверхностях (рис. 4, 5, 6) возможны разрывы продольных вдоль \bar{n} скачков скоростей на L $\rho c_1[v_n]_L = -[\sigma_{nn}]_L$ и разрывы поперечных относительно нормали \bar{n} скачков скоростей на L $\rho c_2[v_\tau]_L = -[\sigma_{n\tau}]_L$.

Разрывы продольных скоростей $[v_n]$ на передней кромке L трещины продольного сдвига, принадлежащей поверхности Σ_1 (рис. 4), при переходе через предвестник трещины L_δ , распространяются со скоростью продольных волн.

Разрывы касательной к поверхности Σ_2 скорости $[v_\tau]_L$ имеют две проекции на векторы $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$ (рис. 4) и могут реализоваться три случая:

- 1) наличие только одной компоненты разрыва касательной к L скорости $[v_{\tau_1}]_L \neq 0$ на передней кромке L_δ трещины поперечного сдвига;
- 2) наличие только одной компоненты разрыва касательной к Σ_2 скорости $[v_{\tau_2}]_L$, ортогональной к L , на передней кромке трещины отрыва;
- 3) наличие произвольного разрыва $[v_\tau]_L$ по отношению к передней кромке L_δ предвестника трещины говорит о том, что передняя кромка L_δ такой трещины несет за собой деформации сдвига и отрыва при условии одновременного превышения предела прочности на сдвиг и на отрыв.

4. Дифференциальные уравнения переноса интенсивностей ω_n и ω_τ продольных и сдвиговых волн сильного разрыва. Систему уравнений (5), в которой дифференцирование по декартовым координатам x_i заменено производными по нормали \bar{n} к Σ_δ и криволинейным координатам (y_1, y_2) , а также выделена локальная производная по времени $\delta/\delta t$, запишем в виде разности уравнений справа “+” и слева “-” на поверхности Σ :

$$[\sigma_{ij,n}]n_j + g^{\alpha\beta}[\sigma_{ij},\alpha x_{j,\beta}] = -\rho c[v_{i,n}] + \rho \frac{\delta[v_i]}{\delta t}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} c[\sigma_{ij,n}] + \frac{\delta[\sigma_{ij}]}{\delta t} &= \lambda \left([v_{k,n}]n_k + g^{\alpha\beta}[v_n,\alpha x_{k,\beta}] \right) \delta_{ij} + \\ &+ \mu \left([v_{i,n}]n_j + [v_{j,n}]n_i + g^{\alpha\beta}([v_i,\alpha x_{j,\beta}] + [v_j,\alpha x_{i,\beta}]) \right) - 2\mu[\varepsilon_{ij}^p]. \end{aligned} \quad (22)$$

Система линейных алгебраических уравнений для $[\sigma_{ij,n}]$ и $[v_{i,n}]$ упрощается до трех уравнений для $[v_{i,n}]$ путем исключения $[\sigma_{ij,n}]$:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)[v_{k,n}]n_k n_i + (\mu - \rho c^2)[v_{i,n}] + \rho c \frac{\delta[v_i]}{\delta t} - \frac{\delta[\sigma_{ij}]}{\delta t} n_j &= \\ = 2\mu[\varepsilon_{ij}^p]n_j - c g^{\alpha\beta}[\sigma_{ij},\alpha x_{j,\beta}] - \lambda g^{\alpha\beta}[v_j,\alpha x_{j,\beta}]n_j, & \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (23)$$

где $[\sigma_{ij}]$ известно через v_k из (17).

Система трех уравнений (23) для $[v_{i,n}]$ вырождается в двух случаях:

- 1) $\rho c_1^2 = \lambda + 2\mu$ при $[v_{k,n}]n_k = [v_{n,n}] \neq 0$;
- 2) $\rho c_2^2 = \mu$ при $[v_{\tau,n}] \neq 0$.

Условия совместности уравнений (23) дают уравнения переноса скачков скорости $[v_k]n_k = \omega_n$ и $[v_k]\tau_k = \omega_\tau$ на фронтах продольных и сдвиговых волн соответственно. Получим проекцию уравнений (23) на нормаль \bar{n} к Σ_δ и на касательное направление $\bar{\tau}$ к Σ_δ , умножая уравнение (23) на вектор нормали и на касательный вектор соответственно:

$$\rho c_1 \frac{\delta \omega_n}{\delta t} = (\lambda + 2\mu)\Omega \omega_n + \mu[\varepsilon_{ij}^p]n_i n_j, \quad (24)$$

$$\rho c_2 \frac{\delta \omega_\tau}{\delta t} = \mu\Omega \omega_\tau + \mu[\varepsilon_{ij}^p]n_i \tau_j. \quad (25)$$

Здесь $\Omega = (1/\rho_1 + 1/\rho_2)/2$ — средняя кривизна поверхности Σ_δ ; ρ_1 и ρ_2 — главные кривизны Σ_δ в текущий момент времени.

Уравнения (24), (25) могут быть представлены дифференциальными уравнениями по времени в следующем виде для проекций $[v_i]$:

$$\text{на } \Sigma_1: \quad [v_i] = \omega_n n_i \quad \text{и} \quad \frac{\delta [v_i]}{\delta t} = c_1 \Omega [v_i] + \frac{c_2^2}{c_1} [\varepsilon_{nn}^p] n_i; \quad (26)$$

$$\text{на } \Sigma_2: \quad [v_i] = \omega_\tau \tau_i \quad \text{и} \quad \frac{\delta [v_i]}{\delta t} = c_2 \Omega [v_i] + c_2 \left([\varepsilon_{ij}^p] n_j - [\varepsilon_{pq}] n_p n_q n_i \right), \quad (27)$$

а также в форме обыкновенного дифференциального уравнения по пройденному расстоянию s ($s = ct$):

$$\frac{\delta [v_i]}{\delta s} = \Omega [v_i] + \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 [\varepsilon_{ij}^p] n_j \quad \text{на } \Sigma_1, \quad (28)$$

$$\frac{\delta [v_i]}{\delta s} = \Omega [v_i] + [\varepsilon_{ij}^p] n_j - [\varepsilon_{kq}^p] n_k n_q n_i \quad \text{на } \Sigma_2. \quad (29)$$

5. Дифференциальные уравнения переноса интенсивностей предвестников передних кромок трещин. Дифференциальные уравнения переноса интенсивностей $[v_i]_L$ и $[\sigma_{ij}]_L n_j$ предвестников передних кромок трещин получаются из уравнений (28), (29) переноса интенсивностей поверхностей Σ_1 и Σ_2 сильного разрыва скоростей $[v_i]$ и напряжений $[\sigma_{ij}] n_j$, взятых в виде их разности при переходе через кромку L :

$$\frac{\delta [v_i]_L}{\delta s} - \Omega [v_i] = \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 [\varepsilon_{ij}^p]_L n_j \quad \text{на } \Sigma_1, \quad (30)$$

$$\frac{\delta [v_i]_L}{\delta s} - \Omega [v_i]_L = [\varepsilon_{ij}^p]_L n_j - [\varepsilon_{kq}^p]_L n_k n_q n_i \quad \text{на } \Sigma_2. \quad (31)$$

Здесь

$$[v_i]_L = [\check{v}_i] - [\hat{v}_i], \quad [\varepsilon_{ij}^p]_L = \frac{[\check{I}_2] - K\sqrt{2}}{[\check{I}_2]\eta} [\check{\sigma}_{ij}] - \frac{[\hat{I}_2] - K\sqrt{2}}{[\hat{I}_2]\eta} [\hat{\sigma}_{ij}],$$

$$I_2 = (\sigma'_{ij} \sigma'_{ij})^{1/2}, \quad [\hat{I}_2] = (\sigma'_{ij} \sigma'_{ij})^{1/2} - (\hat{\sigma}'_{ij} \hat{\sigma}'_{ij})^{1/2}, \quad [\check{I}_2] = (\sigma'_{ij} \sigma'_{ij})^{1/2} - (\check{\sigma}'_{ij} \check{\sigma}'_{ij})^{1/2}.$$

Вектор $[v_i]_L$ интенсивности кромки трещины продольного сдвига направлен по направлению нормали \bar{n} и имеет модуль $[v_i]_L n_i = [v_n]_L$, который изменяется с пройденным расстоянием $s = c_1 t$. Скалярное уравнение (30) для $[v_i]_L$ примет вид

$$\frac{\delta[v_n]_L}{\delta s} - \Omega[v_n]_L = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 [\varepsilon_{nn}^p]_L. \quad (32)$$

Вектор $[v_i]_L$ интенсивности кромки трещины отрыва и трещины поперечного сдвига в процессе движения может изменять свой модуль $[v_i]_L \tau_i = [v_\tau]_L$, удовлетворяя уравнению (33) вдоль $s = c_2 t$:

$$\frac{\delta[v_\tau]_L}{\delta s} - \Omega[v_\tau]_L = [\varepsilon_{n\tau}^p]_L. \quad (33)$$

Направление θ вектора скорости $[v_\tau]_L \tau_i$ (рис. 7) относительно касательного напряжения $\sigma_{n\tau}^+$ перед фронтом Σ_2 определяется уравнением

$$\frac{\delta\bar{\theta}}{\delta s} - \Omega\bar{\theta} = \frac{[\varepsilon_{n\tau}^p]_L \sigma_{n\tau}^+}{|\sigma_{n\tau}^+| [v_\tau]_L}, \quad (34)$$

здесь

$$\bar{\theta} = \cos \theta = \frac{\sigma_{n\tau}^+ [v_\tau]_L}{|\sigma_{n\tau}^+| [v_\tau]_L}.$$

Изменение направления вектора $[v_i]_L$ скачка скорости на кромке трещины отрыва или трещины антипродольного сдвига может иметь место в двух случаях:

1) изменение направления $[v_i]_L$ на кромке ведет к повороту кромки трещины вокруг нормали \bar{n} к Σ_2 , то есть к повороту плоскости трещины вблизи ее нормали \bar{n} так, что кромка трещины ограничивает пространственную поверхность отрыва или поперечного сдвига;

2) изменение направления $[v_i]_L$ на кромке трещины при неизменном направлении самой кромки возможно при достижении в окрестности кромки предела пластичности на сдвиг и предела прочности на отрыв одновременно.

6. Затухание интенсивности передних развертывающихся кромок трещин. Для решения уравнений (32), (33) переноса интенсивности $[v_i]$ передних кромок трещин конкретизируем выражения $[\varepsilon_{nn}^p]$ на $L \in \Sigma_1$ и $[\varepsilon_{n\tau}^p]$ на $L \in \Sigma_2$, используя выражение (1) для ε_{ij}^p .

Вычислим $[\varepsilon_{nn}^p]$ на $L \in \Sigma_1$:

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{nn}^p] &= [\check{\varepsilon}_{nn}^p] - [\hat{\varepsilon}_{nn}^p] = \\ &= \frac{1}{\eta[\hat{I}_2][\check{I}_2]} \left(([\hat{I}_2][\check{I}_2] - K\sqrt{2}[\check{I}_2])[\check{\varepsilon}_{nn}] - ([\check{I}_2][\hat{I}_2] - K\sqrt{2}[\hat{I}_2])[\hat{\varepsilon}_{nn}] \right) = \\ &= \frac{1}{\eta} [\sigma_{nn}]_L + \frac{K\sqrt{2}}{\eta} \rho c_1 \left(\frac{[\hat{v}_n]}{[\hat{I}_2]} - \frac{[\check{v}_n]}{[\check{I}_2]} \right), \quad (35) \end{aligned}$$

где

$$[I_2] = \left(\sigma'_{ij} \sigma'_{ij} + 4\mu \frac{[v_n]}{c_1} \sigma'_{nn} + \frac{8}{3} \mu^2 \left(\frac{[v_n]}{c_1} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad [\sigma_{nn}]_L = \rho c_1 [v_n]_L.$$

Для случая сильно напряженного материала перед кромкой трещины продольного сдвига в линейном приближении по $[v_n]$ имеем

$$[\varepsilon_{nn}^p] \approx \frac{\rho c_1 [v_n]_L}{\eta} \left(1 - \frac{K\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma_{ij}'^+ \sigma_{ij}'^+}} \right). \quad (36)$$

Для случая слабо напряженного материала перед кромкой трещины продольного сдвига имеем

$$\sigma_{ij}'^+ \approx 0, \quad [\varepsilon_{nn}^p]_L \approx \frac{\rho c_1 [v_n]_L}{\eta}. \quad (37)$$

Вычислим $[\varepsilon_{n\tau}^p]_L$ на $L \in \Sigma_2$:

$$[\varepsilon_{n\tau}^p] = [\tilde{\varepsilon}_{n\tau}^p] - [\hat{\varepsilon}_{n\tau}^p] = \frac{\rho c_2}{\eta} \left([v_\tau] + K\sqrt{2} \left(\frac{[\hat{v}_\tau]}{[\hat{I}_2]} - \frac{[\check{v}_\tau]}{[\check{I}_2]} \right)^2 \right). \quad (38)$$

Линейную аппроксимацию скачка $[\varepsilon_{n\tau}]_L$ пластических деформаций на кромке трещины отрыва или трещины поперечного сдвига построим для двух случаев:

1) в случае сильно напряженного материала перед кромкой трещины:

$$[\varepsilon_{n\tau}^p]_L \approx \frac{\rho c_2 [v_\tau]_L}{\eta} \left(1 - \frac{K\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma_{ij}'^+ \sigma_{ij}'^+}} \right); \quad (39)$$

2) в случае слабо напряженного материала перед $L \in \Sigma_2$:

$$[\varepsilon_{n\tau}^p]_L \approx \frac{\rho c_2}{\eta} [v_\tau]_L. \quad (40)$$

В предельных случаях распространения передних кромок трещин сдвига и отрыва уравнения (32), (33) принимают линейный вид:

$$\frac{\delta y}{\delta s} - Ay = 0. \quad (41)$$

6.1. Случай пластически деформируемого материала ($\sigma_{ij}'^+ \sigma_{ij}'^+ \geq 2k^2$) перед кромкой трещины продольного сдвига. Выражение для A перед кромкой трещины продольного сдвига имеет вид

$$A = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\delta_0} + \frac{1}{\rho_0 + s} \right) + \tilde{c}^2 \frac{\rho c_1}{\eta} \left(1 - \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma_{ij}'^+ \sigma_{ij}'^+}} \right). \quad (42)$$

Перед кромкой трещины отрыва или поперечного сдвига выражения для A имеет вид

$$A = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\delta_0} + \frac{1}{\rho_0 + s} \right) + \frac{\rho c_2}{\eta} \left(1 - \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{I_2'^+}} \right). \quad (43)$$

Решение дифференциального уравнения (41) при начальных условиях $y = y_0$ при $s = 0$ для случая кромок продольного сдвига и отрыва дает

$$\omega_{nL} = \omega_{nL}^0 \left(1 + \frac{s}{\rho_0} \right)^{-1/2} \exp \left(- \left(\frac{1}{2\delta_0} + \tilde{c}^2 \frac{\rho c_1}{\eta} \left(1 - \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{I_2'^+}} \right) \right) s \right), \quad (s \geq 2\delta_0), \quad (44)$$

$$\omega_{\tau L} = \omega_{\tau L}^0 \left(1 + \frac{s}{\rho_0}\right)^{-1/2} \exp\left(-\left(\frac{1}{2\delta_0} + \frac{\rho c_2}{\eta} \left(1 - \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{I_2^{'+}}}\right) s\right)\right). \quad (45)$$

Графики, приведенные на рис. 8, 9, отражают факт уменьшения относительной интенсивности $\omega_{\tau L}/\omega_{\tau L}^0$ от пройденного кромкой трещины расстояния S и усиление затухания при увеличении интенсивности $I_2^{'+}$ напряжений перед фронтом трещины.

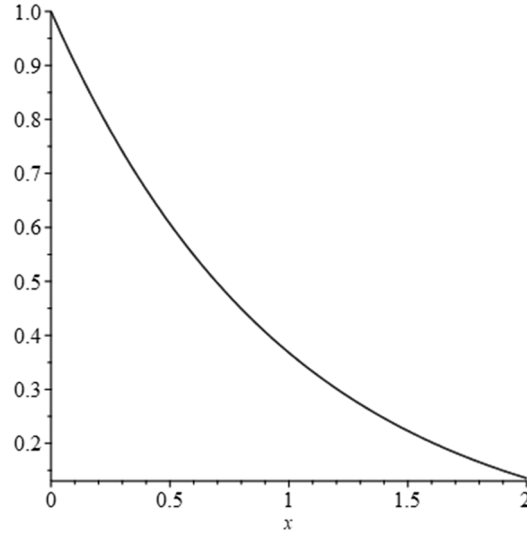


Рис. 8. Графическое изображение изменения относительной интенсивности $y = \omega/\omega_0$ плоских ($\rho_0 \rightarrow \infty$) передних кромок трещин отрыва и сдвига при их распространении в пластически деформируемый материал ($s_{ij}^{'+} s_{ij}^{'+} - 2k^2 = \Delta > 0$)

6.2. Случай упругого деформирования материала ($s_{ij}^{'+} s_{ij}^{'+} < 2k^2$) перед передней кромкой трещин. Имеем следующие закономерности: для трещины продольного сдвига

$$\omega_{nL} = \omega_{nL}^0 \left(1 + \frac{s}{\rho_0}\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{s}{2\delta_0}\right), \quad (46)$$

для трещин отрыва и поперечного сдвига

$$\omega_{\tau L} = \omega_{\tau L}^0 \left(1 + \frac{s}{\rho_0}\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{s}{2\delta_0}\right). \quad (47)$$

Построенные выражения затухания интенсивностей передних кромок трещин (44)–(47) отражают факты убывания интенсивности по законам геометрической акустики $(1 + s/\rho_0)^{-1/2}$ и экспоненциальному за счет работы сил вязкости, превышающих статический предел пластичности $(1 - k\sqrt{2}/\sqrt{I_2^{'+}})$, на пластических деформациях.

Глубина S^* проникания передних кромок трещин в материал может быть оценена как расстояние S^* , на котором относительная интенсивность передних кромок трещин $\omega_L/\omega_0|_{S^*}$ принимает значение равное нулю ($\omega_L/\omega_0|_{S^*} = 0$) (рис. 9, 10). Это означает отсутствие скачка скорости при переходе через переднюю кромку L трещины.

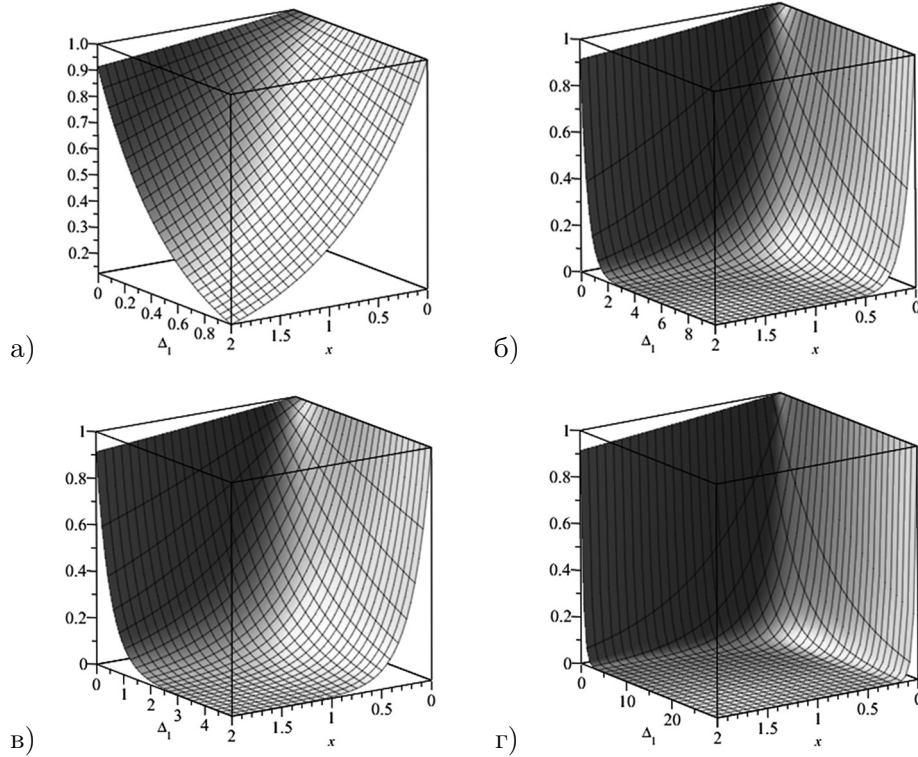


Рис. 9. Графическое изображение изменения относительной интенсивности $y = \omega/\omega_0$ передних кромок трещин отрыва и сдвига при их распространении в пластически деформируемом материале в зависимости от интенсивности пластического деформирования $\Delta = 1 - K\sqrt{2}/\sqrt{I_2^+}$ для различных значений $\Delta_1 = (\rho c/\eta)\Delta$

Заключение. Использование модели Бингама с условием пластичности Мизеса упруговязкопластического поведения деформируемого материала для описания деформированного состояния среды в окрестности подвижной передней кромки пространственной трещины позволяет сделать следующие выводы:

1) задача исследования неупругого деформирования среды в окрестности подвижной передней кромки трещины рассматривается в терминах напряжений и скоростей перемещения материальных точек среды;

2) передняя кромка распространяющейся трещины рассматривается как пространственная кривая, при переходе через которую поперек локальной плоскости трещины имеет место разрыв скорости;

3) передняя кромка распространяющейся трещины принадлежит поверхностям разрыва скоростей и напряжений, распространяющихся со скоростями упругих продольных и сдвиговых волн и допускает разрывы скоростей и напряжений, продольных вдоль кромки и нормальных к ней;

4) передняя кромка трещины продольного сдвига принадлежит фронту продольной волны и распространяется вместе с фронтом со скоростью продольных упругих волн;

5) передняя кромка трещин отрыва и поперечного сдвига лежит на фронте сдвиговых волн и распространяется вместе с фронтом;

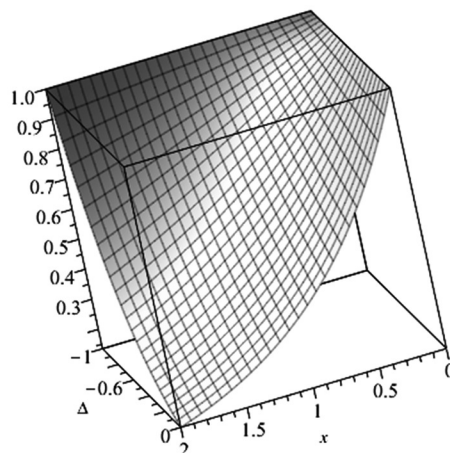


Рис. 10. Графическое изображение изменения относительной интенсивности $y = \omega/\omega_0$ переднего фронта прямолинейных трещин отражает факт сохранения величины $y = 1$ ($\omega = \omega_0$) при распространении в упруго деформируемый материал

6) наряду с распространением передних кромок трещин отрыва и поперечного сдвига допустимо также распространение передней кромки трещины, за которой осуществляется одновременно отрыв и поперечный сдвиг;

7) интенсивность передней кромки трещины как скалярная величина разности скоростей поперек передней кромки трещины, в процессе ее распространения, изменяется по законам геометрической оптики и затухает одновременно за счет работы на пластических деформациях;

8) глубина проникания пространственной трещины определяется как расстояние, на котором интенсивность трещины падает до нуля.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
- [2] Иевлев В.М. Структура поверхностей раздела в пленках металлов. М.: Металлургия, 1992. 172 с.
- [3] Партон В.З., Борисковский В.Г. Динамика хрупкого разрушения. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
- [4] Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, физ.-мат. лит., 1985.
- [5] Ивлев Д.Д. Теория предельного состояния и идеальной пластичности: избранные работы. Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 2005. 357 с.
- [6] Rice J., Druccer D. Energy changes in stressed bodies due to void and crack growth // IJFM. 1967. Т. 3, N 1.
- [7] Райс Дж. Математические методы в механике разрушения // Разрушение. 1975. Т. 2. С. 204–235.
- [8] Stepanova L.V., Igonin S.A. Asymptotics of the near-crack-tip stress field of a growing fatigue crack in damaged materials: Numerical experiment and analytical solution // Numerical Analysis and Applications. 2015. N. 8(2). Pp. 168–181.
- [9] Stepanova L.V., Adylina E.M. Stresses-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed loading // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. 2014. N. 55(5). Pp. 885–895.
- [10] Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Mixed-mode loading of the cracked plate under plane stress condition // PNRPU Mechanics Bulletin. 2014. N. 3. Pp. 129–162.
- [11] Berto F., Lazzarin P. Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches // Material Science and Engineering R. 2014. N. 75. Pp. 1–48.

-
- [12] Gao Y.J., Deng Q.Q., Hnang L.Y., Wen Z.C., Luo Zhi.R. Atomistic modeling for mechanism of crack cleavage extension on nano-scale // *Computational Materials Science*. 2017. N. 130. Pp. 64–75.
- [13] Pierres E., Baicetto V.C., Gravonil A. A two-scale extended finite element method for modeling 3D crack growth with interfacial contact // *Compute. Math. Appl. Mech. and Eng.* 2010. N 17. 20 pp.
- [14] Кукуджанов В.Н. Распространение упругопластических волн в стержне с учетом влияния скорости деформирования. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 48 с.
- [15] Ивлев Д.Д. Теория предельного состояния и идеальной пластичности: избранные работы. Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 2005. 357 с.
- [16] Вервейко Н.Д. Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидроудара. Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 1997. 204 с.
- [17] Вервейко Н.Д., Шашкин А.И., Крупенко С.Е. Зарождение и движение вершин трещин за фронтами упруговязкопластических волн. Воронеж: Кварта, 2017. 124 с.
- [18] Verveiko N.D., Shashkin A.I., Krupenko S.E. Mathematical modeling of the propagations of precursors of the front edges of crack as spatial curves on the fronts of waves of a strong discontinuity of rates and stresses // *Journals of Physics: Conference Series*. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012033>.
- [19] Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.

M. I. Bykova, N. D. Verveiko, S. E. Krupenko, A. I. Shashkin, S. A. Shashkina

**MATHEMATICAL MODELING OF TRANSFER INTENSIVE OF EDGES
OF SPATIAL CRACKS ON THE FRONTS OF LONGITUDINAL
AND SHEAR WAVES BY A RAY METHOD**

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Federal State Public Military Educational Institution of Higher Professional Education

*“Military Training and Research Center of the Air Force “The Air Force Academy
named after Professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin”, Voronezh, Russia*

Abstract. In the near neighborhood of the top of the plane crack, and in General, in the space case, near the edge of the spatial crack, the deformations of the material have the inelastic character. In this article proposes the elasticviscoplastic model of the Bingham body with the condition of plasticity of Mises for modeling high velocity deformation material near of the top of crack. Shown that an edge of crack belong a surface of elastic wave: cracks of longitudinal shear belong of longitudinal wave and a crack of untiplane shear and avulsion belong a surface of shear wave. For intensity of the crack suggest a shock velocity on the curve of the edge of crack and made ordinary differential equation for transfer intensity of crack on the front of the wave. Shown that a distant of propagation edge of the crack depend from plastic deformation material on the front of the wave. In the process of propagation crack this direction of shear can change from a stresses in front of the wave. Three-D graphics show change intensity of the crack in a process of propagation from parameters.

Keywords: ray method, leading edge, spatial crack, crack edge intensity, intensity transfer.

REFERENCES

- [1] Kachanov L.M. Fundamentals of the mechanics of destruction. M.: Science, 1974. 312 p.
- [2] Ievlev V.M. The structure of the interface in metal films. M.: Metallurgy, 1992. 172 p.
- [3] Parton V.Z., Boriskovsky V.G. Dynamics of brittle fracture. M.: Mechanical engineering, 1988. 240 p.
- [4] Parton V.Z., Morozov E.M. Mechanics of Elasto-Plastic Destruction. M.: Science, Phys. lit., 1985.
- [5] Ivlev D.D. Theory of limit state and ideal plasticity: selected works. Voronezh: Voronezh State University, 2005. 357 p.

Bykova Marya Igorevna

e-mail: bykova_mi@amm.vsu.ru, Assistant Professor, Ph. D. Phys. & Math., Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Verveiko Nikolay Dmitrievitch

e-mail: dean@amm.vsu.ru, Professor, D. Sc. Tech., Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Krupenko Svetlana Evgenjevna

e-mail: dean@amm.vsu.ru, Graduate Student, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Shashkin Alexandr Ivanovitch

e-mail: dean@amm.vsu.ru, Professor, D. Sc. Phys. & Math., Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Shashkina Sofya Alexandrovna

e-mail: soffia-alex@inbox.ru, Assistant Professor, Ph. D. Phys. & Math., Federal State Public Military Educational Institution of Higher Professional Education “Military Training and Research Center of the Air Force “The Air Force Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin”, Voronezh, Russia.

- [6] Rice J., Druccer D. Energy changes in stressed bodies due to void and crack growth // *IJFM*. 1967. V. 3, No. 1.
- [7] Rice J. Mathematical methods in the mechanics of destruction // *Destruction*. 1975. V. 2. Pp. 204–235.
- [8] Stepanova L.V., Igonin S.A. Asymptotics of the near-crack-tip stress field of a growing fatigue crack in damaged materials: Numerical experiment and analytical solution // *Numerical Analysis and Applications*. 2015. N. 8(2). Pp. 168–181.
- [9] Stepanova L.V., Adylina E.M. Stresses-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed loading // *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2014. N. 55(5). Pp. 885–895.
- [10] Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Mixed-mode loading of the cracked plate under plane stress condition // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2014. N. 3. Pp. 129–162.
- [11] Berto F., Lazzarin P. Recent developments in brittle and quasibrittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches // *Material Science and Engineering R*. 2014. N. 75. Pp. 1–48.
- [12] Gao Y.J., Deng Q.Q., Hnang L.Y., Wen Z.C., Luo Zhi.R. Atomistic modeling for mechanism of crack cleavage extension on nano-scale // *Computational Materials Science*. 2017. N. 130. Pp. 64–75.
- [13] Pierres E., Baicotto V.C., Gravonil A. A two-scale extended finite element method for modeling 3D crack growth with interfacial contact // *Compute Math. Appl. Mech and Eng.* 2010. No. 17. 20 pp.
- [14] Kukudzhanov V.N. Propagation of elastoplastic waves in a rod taking into account the influence of the strain rate. M.: VTs AN SSSR, 1967. 48 p.
- [15] Ivlev D.D. Theory of limit state and ideal plasticity: selected works. Voronezh: Voronezh State University, 2005. 357 p.
- [16] Verveiko N.D. Radiation theory of elastic-viscoplastic waves and waves of hydroblow. Voronezh: Voronezh State University, 1997. 204 p.
- [17] Verveiko N.D., Shashkin A.I., Krupenko S.E. Origin and motion of crack tops behind the fronts of elastic-viscoplastic waves. Voronezh: Kvarta, 2017. 124 p.
- [18] Verveiko N.D., Shashkin A.I., Krupenko S.E. Mathematical modeling of the propagations of precursors of the front edges of crack as spatial curves on the fronts of waves of a strong discontinuity of rates and stresses // *Journals of Physics: Conference Series*. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012033>.
- [19] Thomas T. Plastic flow and destruction in solids. M.: Mir, 1964. 308 p.