Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4 (46). С. 182–189

С. В. Матвеев[1], *А. Н. Матвеева*[2]

ДВУОСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ ИЗ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ УСЛОВИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ ОТРЫВУ

[1] *Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, Чебоксары, Россия*
[2] *Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, Чебоксары, Россия*

Аннотация. В работе рассматривается задача определения компонент напряжения при двуосном растяжении тонкой пластины из упругопластического материала. Пластина ослаблена круговым отверстием. В задаче рассматривается случай сопротивления отрыву, $\sigma_1 = \sigma_2 = p$, $\sigma_3 < p$, $p = const$. Решение ищется методом разложения по малому параметру, аналогично работам [1–4]. В работе были получены выражения для определения компонент напряжения в упругой и пластической областях в первом приближении.

Ключевые слова: сопротивление отрыву, упругость, пластичность, линеаризация, напряжение.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.4.015

УДК: 539.374

Предельное состояние тел при отрыве имеет место при достижении одним или двумя главными напряжениями некоторого предельного значения. Полное предельное (статически определимое) состояние материала при отрыве достигается в случаях

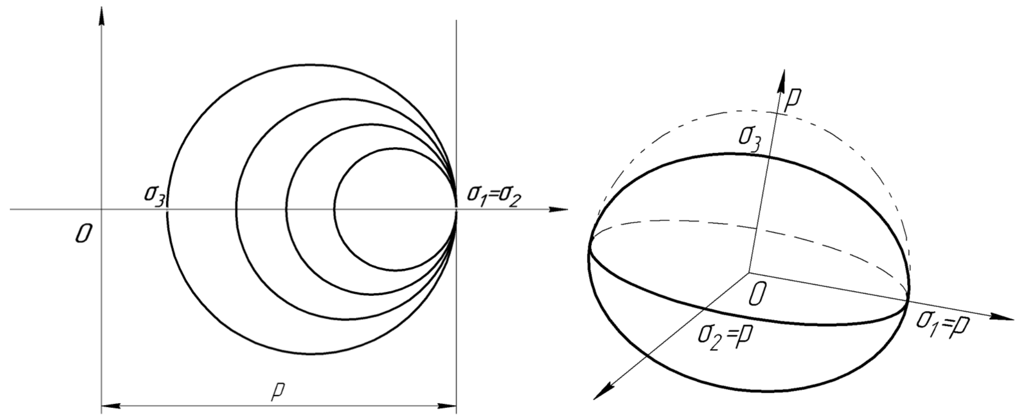
$$\sigma_1 = \sigma_2 = p, \quad \sigma_3 < p, \tag{1}$$

$$\sigma_3 = p, \quad \sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3, \quad p = const. \tag{2}$$

Д.Д. Ивлевым в работе [5] был рассмотрен случай (1). Отрыв, происходящий при выполнении условий (2), был рассмотрен в работе [6].

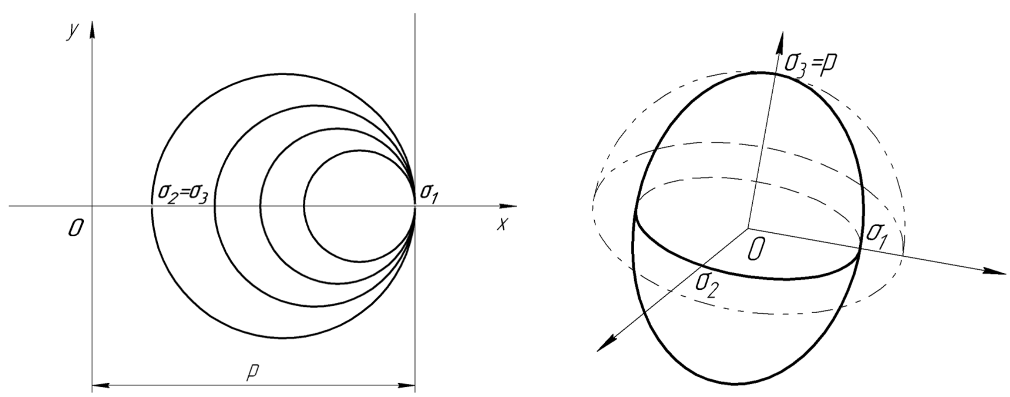
Матвеев Сергей Владимирович
`e-mail`: sergio2100@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.
Матвеева Алёна Николаевна
`e-mail`: roshtova@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и физики, Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия

Поступила 01.10.2020



а) б)

Рис. 1.



а) б)

Рис. 2.

Условиям (1) соответствуют диаграмма Мора и эллипсоид напряжений, представленные на рис. 1.

На рис. 2.а) и рис. 2.б) показаны диаграмма Мора и эллипсоид напряжений соответствующие условию отрыва (2).

В работах [7–9] были получены общие соотношения теории отрыва. В работах [10–13] рассмотрены задачи равномерного растяжения пластин при условии сопротивления отрыву. Задачи двуосного растяжения тонких пластин из анизотропного и и неоднородного материала, без учета сопротивления отрыву, были рассмотрены в работах [14, 15]. В данной работе рассматривается упругопластическое состояние бесконечной пластины, ослабленной круговым отверстием, при двуосном растяжении. Контур отверстия считается свободным от усилий.

Рассмотрим бесконечную пластину, из несжимаемого упругопластического материала ослабленную отверстием радиуса a. К пластине приложены растягивающие усилия p_1 и p_2, действующие по взаимно ортогональным осям. Решение будем искать в цилиндрической системе координат, ось z направим ортогонально плоскости пластины. Материал пластины предполагается несжимаемым. Условие отрыва примем в виде (1)

$$\sigma_\alpha = \sigma_2 = p, \quad \sigma_3 < p, \quad p = const.$$

В цилиндрической системе координат компоненты напряжений примут вид

$$\begin{gathered} \sigma_\rho = p + 3\,(\sigma - p)\, n_1^2, \quad \tau_{\rho\theta} = 3\,(\sigma - p)\, n_1 n_2, \\ \sigma_\theta = p + 3\,(\sigma - p)\, n_2^2, \quad \tau_{\theta z} = 3\,(\sigma - p)\, n_2 n_3, \\ \sigma_z = p + 3\,(\sigma - p)\, n_3^2, \quad \tau_{\rho z} = 3\,(\sigma - p)\, n_1 n_3, \\ \sigma = \tfrac{1}{3}\left(\sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_z\right), \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \end{gathered} \tag{3}$$

где σ_ρ, σ_θ, σ_z, $\tau_{\rho\theta}$, $\tau_{\theta z}$, $\tau_{\rho z}$ – компоненты напряжения цилиндрической системе координат, n_1, n_2, n_3 – направляющие косинусы, определяющие направление третьего главного напряжения. Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат запишем в виде

$$\begin{gathered} \frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Для определения компонент напряжений в упругой области и в зоне отрыва воспользуемся разложением по малому параметру δ. Компонентам напряжения в пластической зоне будем приписывать индекс «p», в упругой – «e».

$$\begin{gathered} \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta\sigma_{ij}^{(I)} + \delta^2\sigma_{ij}^{(II)} + \delta^3\sigma_{ij}^{(III)} + ..., \\ \delta = \frac{p_1 - p_2}{2}, \quad p_1,\, p_2 - const. \end{gathered} \tag{5}$$

На бесконечном удалении от центра отверстия будут справедливы соотношения

$$\begin{gathered} \sigma_\rho^e = q - \delta\cos 2\phi, \quad \sigma_\theta^e = q + \delta\cos 2\phi, \quad \text{при} \quad \rho = \infty \\ \tau_{\rho\theta}^e = \delta\sin 2\phi, \quad q = \frac{p_1 + p_2}{2}. \end{gathered} \tag{6}$$

На контуре отверстия примем

$$\sigma_\rho^p = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha. \tag{7}$$

Линеаризованные условия сопряжения при $\rho = 1$ имеют вид

$$\begin{gathered} \left[\sigma_{ij}^{(0)}\right] = 0, \\ \left[\sigma_{ij}^{(I)} + \frac{\partial\sigma_{ij}^{(0)}}{\partial\rho}\rho_s^{(I)}\right] = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

На контуре отверстия примем, что $\tau_{\rho z}$, $\tau_{\theta z}$ равны нулю и действует только касательное усилие $\tau_{\rho\theta}$. В выражениях (3) положим $n_3 = 0$.

С учетом вышеописанных предположений выражения (3) примут вид

$$\begin{aligned} &\sigma_\rho = p + 3\left(\sigma - p\right) n_1^2, \\ &\sigma_\theta = p + 3\left(\sigma - p\right) n_2^2, \\ &\sigma_z = p, \\ &\tau_{\rho\theta} = 3\left(\sigma - p\right) n_1 n_2, \\ &\sigma = \tfrac{1}{3}\left(\sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_z\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Из (9) следует

$$(\sigma_\rho - p)(\sigma_\theta - p) = \tau_{\rho\theta}^2. \tag{10}$$

В нулевом приближении будем иметь

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} \neq 0, \quad \tau_{\rho z}^{(0)} = \tau_{\theta z}^{(0)} = 0. \tag{11}$$

В нулевом приближении примем, при $\rho = \alpha$

$$\tau_{\rho\theta}^{0} = \tau_\alpha \quad \rho = \alpha, \quad \tau_\alpha = const. \tag{12}$$

Запишем выражения (4), (10), согласно (5), (11)

$$\begin{aligned} &\tfrac{d\sigma_\rho^{(0)}}{d\rho} + \tfrac{\sigma_\rho^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}}{\rho} = 0, \\ &\tfrac{d\tau_{\rho\theta}^{(0)}}{d\rho} + \tfrac{2\tau_{\rho\theta}^{(0)}}{\rho} = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

$$(\sigma_\rho^{(0)} - p)(\sigma_\theta^{(0)} - p) = \tau_{\rho\theta}^{(0)2}. \tag{14}$$

Из (12) и (13) получим

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = \frac{\alpha^2 \tau_\alpha}{\rho^2}. \tag{15}$$

Из (13) с учетом выражений (14), (7) получим

$$\begin{aligned} &\sigma_\rho^{(0)p} = p - \tfrac{\alpha\sqrt{\rho^2(p^2 - \tau_\alpha^2) + \alpha^2\tau_\alpha^2}}{\rho^2}, \\ &\sigma_\theta^{(0)p} = p - \tfrac{\alpha^3 \tau_\alpha^2}{\rho^2\sqrt{\rho^2(p^2 - \tau_\alpha^2) + \alpha^2\tau_\alpha^2}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Из (9), (15), (16) следует

$$n_1^2 = 1 - \frac{1}{\rho^2}\frac{\alpha^2\tau_\alpha^2}{p^2 - \tau_\alpha^2}, \quad n_2^2 = \frac{1}{\rho^2}\frac{\alpha^2\tau_\alpha^2}{p^2 - \tau_\alpha^2}. \tag{17}$$

В упругой зоне, решая первое уравнение системы (13), получим

$$\sigma_\rho^{(0)e} = A - \frac{B}{\rho^2}, \quad \sigma_\theta^{(0)e} = A + \frac{B}{\rho^2}, \tag{18}$$

где $A, B = const$.

В нулевом приближении из (6) следует $\sigma_\rho^{(0)} = q$ при $\rho = \infty$, соответственно из (18) определим константу $A = q$.

Удовлетворив (16), (18) условиям (8) определим константу B выражений (18). С учетом полученных значений коэффициентов A, B соотношения (18) примут вид

$$\begin{aligned} &\sigma_\rho^{(0)e} = q + \tfrac{1}{\rho^2}\tfrac{\alpha(\tau_\alpha^2 - p^2)}{2\sqrt{p^2 - \tau_\alpha^2 + \alpha^2\tau_\alpha^2}}, \\ &\sigma_\theta^{(0)e} = q - \tfrac{1}{\rho^2}\tfrac{\alpha(\tau_\alpha^2 - p^2)}{2\sqrt{p^2 - \tau_\alpha^2 + \alpha^2\tau_\alpha^2}}. \end{aligned} \tag{19}$$

Радиус упругопластической границы определим из уравнения

$$\frac{\alpha\sqrt{p^2-\tau_\alpha^2+2\alpha^2\tau_\alpha^2}}{\sqrt{p^2-\tau_\alpha^2+\alpha^2\tau_\alpha^2}}=2(p-q). \tag{20}$$

Внутренний контур отверстия пластины будем считать фиксированным и свободным от внешних нагрузок

$$\sigma_{ij}^{(I)p}=0. \tag{21}$$

В упругой области, согласно (7), (15), (16), (19), (21), получим

$$\sigma_\rho^{(I)e}=\tau_\rho\theta^{(I)}e=0 \quad \text{при} \quad \rho=1, \tag{22}$$

$$\sigma_\theta^{(I)e}=2\alpha\sqrt{p^2-\tau_\alpha^2+\alpha^2\tau^2}\rho_s^{(I)} \qquad \rho=1. \tag{23}$$

Граничные условия (6) в первом приближении будут иметь вид

$$\sigma_\rho^{(I)e}=-\cos 2\phi, \quad \tau_\rho\theta^{(I)e}=\sin 2\phi \quad \text{при} \quad \rho=\infty. \tag{24}$$

Решение в упругой области будем искать согласно [1]. С учетом граничных условий (22), (24) получим

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho^{(I)e} &= \left(-1+\tfrac{4}{\rho^2}-\tfrac{3}{\rho^4}\right)\cos 2\theta,\\
\sigma_\theta^{(I)e} &= \left(1+\tfrac{3}{\rho^4}\right)\cos 2\theta,\\
\tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \left(1+\tfrac{2}{\rho^2}-\tfrac{3}{\rho^4}\right)\sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{25}$$

Используя соотношения (23), (25) найдем границу упругопластической зоны в первом приближении

$$\rho_s^{(I)}=\frac{2\cos 2\theta}{\alpha\sqrt{p^2-\tau_\alpha^2+\alpha^2\tau_\alpha^2}}. \tag{26}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ивлев Д.Д. Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Наука: Москва, 1978. 208 с.

[2] Матвеев С.В. Митрофанова Т.В. Тихонов С.В. Введение в механику предельного и упругопластического состояния деформируемых тел. Чебоксары: Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, 2012. 165 с.

[3] С.В. Матвеев. Упругопластическое состояние анизотропной среды, ослабленной горизонтальной цилиндрической полостью, с учетом силы тяжести // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2007. № 3-1(55). С. 12–18.

[4] Матвеев С.В. Матвеева А.Н. Тихонов С.В. Деформированное состояние анизотропной плоскости, ослабленной отверстием, подкрепленной включением, ограниченной эксцентрической окружностью, при двуосном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 1(27). С. 105–114.

[5] Д.Д. Ивлев. Теория идеальной пластичности. Наука: Москва, 1966. 232 с.

[6] Ивлев Д.Д. Матченко Н.М. О преддельном состоянии при отрыве // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сборник статей к 75-летию Е.И. Шемякина. 2006. С. 288–290.

[7] Matveeva A.N. Matveev S.V. Tikhonov S.V. Mishin P.V. Alatirev S.S. Akimov A.P. On limit statically determinated detachment conditions for compressible anisotropic material // Journal of Physics: Conference Series. "1st International Conference on Physics, Mathematics and Statistics, ICPMS 2018". 2018. c. 012037.

[8] А.Н. Роштова. Об общих предельных условиях при отрыве для сжимаемых анизотропных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 2. С. 131–134.

[9] А.Н. Роштова. О плоском напряженном состоянии анизотропного идеальнопластического материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2007. № 3. С. 19–22.

[10] Матвеев С.В. Матвеева А.Н. Рыбакова Т.И. Равномерное растяжение тонкой анизотропной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 4(34). С. 59–65.

[11] Матвеев С.В. Матвеева А.Н. Тихонов С.В. Равномерное растяжение тонкой анизотропной пластины с круговым отверстием, подкрепленной включением, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 4(34). С. 95–103.

[12] Ефремов В.Г. Матвеев С.В. Матвеева А.Н. Тихонов С.В. Равномерное растяжение тонкой неоднородной пластины с круговым отверстием, при условии предельного сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 3(41). С. 95–103.

[13] Матвеев С.В. Матвеева А.Н. Тихонов С.В. Равномерное растяжение многослойной тонкой анизотропной пластины с эллиптическим отверстием, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 1(39). С. 94–101.

[14] П.Н. Кузнецов. Упругопластическое состояние неоднородной плоскости с круговым отверстием, подкрепленным включением, ограниченным эллипсами, при двуосном растяжении // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2009. № 2. С. 118–126.

[15] П.Н. Кузнецов. Упругопластическое состояние плоскости, подкрепленной эксцентрическими включениями, при двуосном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2009. № 2(62). С. 13–18.

S. V. Matveev, A. N. Matveeva

BIAXIAL TENSION OF A THIN PLATE MADE OF ELASTOPLASTIC MATERIAL UNDER THE CONDITION OF RESISTANCE TO SEPARATION

I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary

Abstract. The paper considers the problem of determining the stress components during biaxial tension of a thin plate made of elastoplastic material. The plate is weakened by the circular hole. The problem considers the case of separation resistance, $\sigma_1 = \sigma_2 = p$, $\sigma_3 < p$, $p = const$. The solution is sought by the method of decomposition in a small parameter, similar to the works of [1–4]. In this work, expressions were obtained for determining the stress components in the elastic and plastic regions in the first approximation.

Keywords: pull-off resistance, elasticity, plasticity, linearization, stress.

REFERENCES

[1] Ivlev D., Ershov L. Perturbation method in the theory of an elastoplastic body. Science: Moscow, 1978. 208 p.
[2] Matveev S., Mitrofanova T., Tikhonov S. Introduction to the mechanics of the limiting and elastoplastic state of deformable bodies. Cheboksary: Chuvash State Pedagogical University named after I. Yakovleva, 2012. 165 p.
[3] Matveev S. Elastoplastic state of an anisotropic medium, weakened by a horizontal cylindrical cavity, taking into account gravity // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. 2007. no. 3-1 (55). P. 12–18.
[4] Matveev S., Matveeva A., Tikhonov S. Deformed state of anisotropic plane, weakened by a hole, reinforced by an inclusion bounded by an eccentric circle, under biaxial tension // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2016. no. 1 (27). P. 105–114.
[5] Ivlev D. The theory of ideal plasticity. Science: Moscow, 1966. 232 p.
[6] Ivlev D., Matchenko N. About breakaway limit state // Problems in the mechanics of deformable solids and rocks. Collection of articles dedicated to the 75th anniversary of E.I. Shemyakin. 2006. P. 288–290.
[7] On limit statically determinated detachment conditions for compressible anisotropic material / A. Matveeva, S. Matveev, S. Tikhonov et al. // Journal of Physics: Conference Series. "1st International Conference on Physics, Mathematics and Statistics, ICPMS 2018". 2018. p. 012037.
[8] Roshtova A. On general separation limiting conditions for compressible anisotropic media // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2007. no. 2. P. 131–134.
[9] Roshtova A. On the plane stress state of an anisotropic ideal-plastic material // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. named after I. Ya. Yakovlev. 2007. no. 3. P. 19–22.

Matveev Sergey Vladimirovich
`e-mail:` sergio2100@mail.ru, Ph.D. Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary.
Matveeva Alena Nikolaevna
`e-mail:` roshtova@mail.ru, Ph.D. Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary.

[10] Matveev S.V.and Matveeva A., Rybakova T. Uniform stretching of a thin anisotropic plate weakened by an elliptical hole, subject to pull-off resistance // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2017. no. 4 (34). P. 59–65.

[11] Matveev S.V.and Matveeva A., Tikhonov S. Uniform stretching of a thin anisotropic plate with a circular hole, reinforced by inclusion, subject to pull-off resistance // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2017. no. 4 (34). P. 95–103.

[12] Uniform stretching of a thin non-uniform plate with a circular hole, subject to ultimate pull-off strength / V. Efremov, S. Matveev, A. Matveeva et al. // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2019. no. 3 (41). P. 95–103.

[13] Matveev S., Matveeva A., Tikhonov S. Uniform stretching of a multilayer thin anisotropic plate with an elliptical hole, subject to tear resistance // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2019. no. 1 (39). P. 94–101.

[14] Kuznetsov P. Elastoplastic state of an inhomogeneous plane with a circular hole reinforced by an inclusion bounded by ellipses under biaxial tension // Bulletin of the Tula State University. Natural Sciences. 2009. no. 2. P. 118–126.

[15] Kuznetsov P. Elastoplastic state of a plane, supported by eccentric inclusions, under biaxial tension // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2009. P. 13–18.