Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 1 (47). С. 3–15

В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова

К ВОПРОСУ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ УДАРНОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НЕНАПРЯЖЕННОЙ НЕСЖИМАЕМОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия

Аннотация. Решается задача одномерной плоской деформации нелинейноупругого несжимаемого полупространства под действием ударной нагрузки на его границе. До момента ударного воздействия полупространство находится в свободном состоянии. Именно это условие позволяет осуществить движение разрыва в краевых условиях на границе полупространства в виде единственной плоскополяризованной ударной волны, на которой сохраняется неизменным направление предварительного сдвига. Перечисленные свойства переднего фронта ударного воздействия следуют из совместного анализа характеристических направлений задачи и видов ударных волн для одномерной плоской задачи в несжимаемой среде с произвольными предварительными деформациями. Приводятся два варианта приближенного решения задачи на основе метода сращиваемых асимптотических разложений и на основе метода лучевых рядов.

Ключевые слова: нелинейноупругая среда, несжимаемость, ударная волна, плоская деформация, характеристики гиперболических систем, метод возмущений, лучевые ряды.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.001

УДК: 539.3

Введение

Теоретические и экспериментальные исследования высокоскоростных процессов [1–4] имеют стабильно большое значение для области современного машиностроения, техники, физики. В частности, эти исследования включают разработку теоретических методов решения разнообразных задач динамики [5, 6] и изучение процессов образования и движения ударных волн в твердых телах [1, 3, 7]. Известно [1, 3], что ударные волны (поверхности сильных разрывов) возможно описать на основе только нелинейных физикомеханических моделей. При этом для твердых деформируемых сред выявляется большое число нелинейных особенностей движения ударных волн,

Рагозина Виктория Евгеньевна
`e-mail:` ragozina@vlc.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.
Иванова Юлия Евгеньевна
`e-mail:` ivanova@iacp.dvo.ru, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Поступила 20.08.2020

таких как зависимость геометрии ударной волны и ее скорости от состояния среды в ближайшей к ней окрестности, взаимосвязь процессов объемного и сдвигового деформирования и т.д. [1,3]. Нелинейная взаимосвязь уравнений движения нестационарных краевых задач с системой краевых условий на заранее неизвестных по пространственной локализации поверхностях (включая ударные волны) в общем случае на сегодняшний день исключает возможность получения точного теоретического решения. При этом, одновременно с исключительно большим значением современных вычислительных методов [6], приобретает важное значение разработка разнообразных приближенных теоретических методов решения [2,5,8,9]. Из этих методов отметим метод сращиваемых асимптотических разложений [8] и метод прифронтовых разложений в виде лучевых рядов [9]. Ранее было показано [10–13], что метод сращиваемых разложений по малому параметру для задач ударной деформации в окрестности ударных волн для областей, где нелинейность проявляется в полном объеме, приводит к одиночному эволюционному уравнению [10], либо системе эволюционных уравнений [11]. Данные квазилинейные уравнения допускают получение своего точного решения в отличие от исходных уравнений движения и одновременно позволяют отразить основные особенности нелинейного процесса. На основе этого метода были получены решения одномерных [10, 11] и многомерных [12] краевых задач о распространении плоских [10,11,13] ударных волн и волн с ненулевой кривизной волнового фронта [12] в несжимаемых и сжимаемых однородных и неоднородных средах. Еще более простым по виду используемых функций является вариант лучевого метода [14, 15] для ударноволновых задач, основанный на применении системы двойных рядов [16]. Данный вариант лучевого метода также неоднократно применялся ранее [16,17] в разнообразных задачах ударной деформации.

В настоящей статье решается задача об одномерной ударной деформации полупространства, занятого нелинейноупругой несжимаемой изотропной средой [18], которая до начала ударного воздействия на граничной плоскости находится в свободном состоянии. Предположение о несжимаемости не только отражает реальное свойство многих материалов [5,18], но позволяет рассматривать сдвиговое деформирование в “ чистом ” виде без связи с объемной деформацией. Предварительно ненапряженное состояние среды является ключевым условием, позволяющим на основе известных общих данных [3] о скоростях и типах плоских сдвиговых ударных волн, а также на основе анализа характеристических направлений задачи сделать заключение о движении в среде единственной ударной волны плоскополяризованного типа [1, 3]. Дополнительным свойством на такой волне становится неизменность направления сдвига, имеющего место в момент возникновения ударной волны. Данное условие позволяет существенно упростить анализ системы эволюционных уравнений, а также уравнений лучевого метода, с помощью которых строятся два приближенных решения описанной краевой задачи.

1. Основные модельные соотношения и постановка краевой задачи

Динамику несжимаемой нелинейноупругой среды зададим в прямоугольной декартовой системе координат Эйлера x_1, x_2, x_3 уравнениями [1]:

$$\begin{gathered}\rho=\rho_0=const,\quad \dot u_i=(\delta_{ij}-u_{i,j})v_j,\quad 2\alpha_{ij}=u_{i,j}+u_{j,i}-u_{k,i}u_{k,j},\\ \sigma_{ij,j}=\rho(\dot v_i+v_{i,j}v_j),\quad \sigma_{ij}=-p_0\delta_{ij}+\frac{\partial W}{\partial\alpha_{ik}}(\delta_{kj}-2\alpha_{kj}),\\ W(I_1,I_2)=(a-\mu)I_1+aI_2+bI_1^2-\kappa I_1I_2-\theta I_1^3+cI_1^4+\\ +dI_2^2+kI_1^2I_2+\chi I_1^2I_2+\ldots,\\ I_1=\alpha_{ii},\quad I_2=\alpha_{ij}\alpha_{ji},\quad \dot u_i=\frac{\partial u_i}{\partial t},\quad u_{i,j}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j},\end{gathered}\tag{1.1}$$

где u_i, v_i — компоненты векторов перемещений и скорости, α_{ij}, σ_{ij} — компоненты тензоров деформаций Альманси и напряжений Эйлера-Коши, p_0 — функция добавочного гидростатического давления, W — функция упругого потенциала, μ, a, b, κ, θ, c, d, k, χ— упругие модули среды в адиабатическом приближении, ρ — плотность среды. В системе (1.1) принято суммирование по повторяющемуся латинскому индексу, многоточием здесь и далее обозначены невыписанные слагаемые с более высокой степенью по компонентам градиента перемещений.

Далее рассмотрим одномерную плоскую деформацию нелинейноупругого полупространства $x_1\geq 0$, вызванную ударным нагружением по его границе $x_1=0$. Следствием этого воздействия будет поле перемещений $u_1=0$, $u_2=u_2(x_1,t)$, $u_3=u_3(x_1,t)$. Полагаем, что до момента времени $t=0$ деформации в среде отсутствуют, а перемещения на границе $x_1=0$ являются известными функциями времени:

$$\begin{gathered}u_2|_{x_1=0,\,t\geq 0}=U_2(t),\quad u_3|_{x_1=0,\,t\geq 0}=U_3(t),\\ U_2(0)=U_3(0)=0,\quad \dot U_2(0)\dot U_3(0)\neq 0,\\ u_2|_{x_1\geq 0,\,t\leq 0}=u_3|_{x_1\geq 0,\,t\leq 0}=0,\end{gathered}\tag{1.2}$$

где $U_2(t), U_3(t)$ — известные функции. Скачок их производных в нуле позволяет утверждать, что с момента $t=0$ по среде движутся поверхности сильных разрывов [3], на которых необходимо поставить дополнительные краевые условия, связывающие разрывы. Сформулируем такие дополнительные соотношения на ударной волне, проведя анализ уравнений вдоль характеристических направлений и геометрических, кинематических и динамических условий совместности. Для определения уравнений характеристик выпишем уравнения движения (1.1):

$$\begin{gathered}\sigma_{11,1}=0,\quad \sigma_{12,1}=\rho\ddot u_2,\quad \sigma_{13,1}=\rho\ddot u_3,\\ \sigma_{11}=-p+\mu\sum_{i=0}^{\infty}\beta_if^i,\quad \sigma_{12}=\mu u_{2,1}H,\quad \sigma_{13}=\mu u_{3,1}H,\\ H(f)=\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_if^i,\quad f=u_{2,1}^2+u_{3,1}^2,\quad \gamma_0=1,\quad \gamma_1=\frac{a+b+\kappa+d}{\mu}.\end{gathered}\tag{1.3}$$

Все безразмерные константы β_i и $\gamma_i (i=0,1,2,\ldots)$ в (1.3) вычисляются по упругим модулям материала. Первое из уравнений в (1.3) не влияет на поиск характеристических направлений и необходимо при определении функции добавочного гидростатического давления $p(x_1,t)$. Для нахождения уравнений характеристик применим известную

схему [2] ко второму и третьему уравнениям (1.3). Получим два семейства характеристик. Вдоль характеристических направлений первого семейства

$$\frac{dx_1}{dt} = \pm C\sqrt{H}, \quad C^2 = \mu\rho^{-1} \tag{1.4}$$

выполняются соотношения

$$\begin{gathered} \pm C\sqrt{H} f_2^2 \frac{d}{dt_{(1)}}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) - f_2\frac{df_3}{dt_{(1)}} + f_1\frac{df_4}{dt_{(1)}} = 0, \\ f_1 = u_{2,1}, \quad f_2 = u_{3,1}, \quad f_3 = \dot{u}_2, \quad f_4 = \dot{u}_3, \quad \frac{d}{dt_{(1)}} = \frac{\partial}{\partial t} \pm C\sqrt{H}\frac{\partial}{\partial x_1}; \end{gathered} \tag{1.5}$$

вдоль направлений второго семейства

$$\frac{dx_1}{dt} = \pm C\sqrt{H + 2H'f}, \quad H' = \frac{dH}{df} \tag{1.6}$$

имеют место соотношения

$$\begin{gathered} \pm C\sqrt{H + 2H'f}\frac{df}{dt_{(2)}} - 2f_1\frac{df_3}{dt_{(2)}} - 2f_2\frac{df_4}{dt_{(2)}} = 0, \\ \frac{d}{dt_{(2)}} = \frac{\partial}{\partial t} \pm C\sqrt{H + 2H'f}\frac{\partial}{\partial x_1}. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Если по предварительно недеформированной среде распространяется ударная волна, которая сама входит в число характеристик первого семейства, тогда для соотношений (1.5) справедливо утверждение: если $f_3 = \mp C\sqrt{H} f_1$, $f_4 = \mp C\sqrt{H} f_2$, то

$$\frac{d}{dt_{(1)}}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = 0, \quad \frac{f_1}{f_2} = const. \tag{1.8}$$

Связи между f_3 и f_1, f_4 и f_2 являются следствием геометрических и кинематических условий совместности разрывов [19].

Известно [3], что в случае произвольных ненулевых предварительных деформаций в полупространстве движутся две ударные волны: волна круговой поляризации и плоскополяризованная волна. Кратко перечислим свойства и запишем скорости этих волн. На волне круговой поляризации $[H] = [f] = 0$, то есть сохраняется неизменной сумма квадратов интенсивностей воздействия и меняется направление предварительного сдвига. Ее скорость G_1 вычисляется как

$$G_1 = \frac{dx_1}{dt} = C\sqrt{H^+} = C\sqrt{H^-}. \tag{1.9}$$

Данная волна согласно (1.4) содержится среди характеристик первого семейства.

Для плоскополяризованной ударной волны и ее скорости G_2 выполняется

$$\frac{u_{2,1}^+}{[u_{2,1}]} = \frac{u_{3,1}^+}{[u_{3,1}]}, \quad G_2 = \frac{dx_1}{dt} = C\sqrt{H^+ + [H]\left(\frac{u_{2,1}^+}{[u_{2,1}]} - 1\right)}. \tag{1.10}$$

На ней изменяется величина предварительного сдвига и не меняется его направление.

Если в среде отсутствуют предварительные деформации $u_{2,1}^+ = u_{3,1}^+ = 0$, то распространяется единственная ударная волна плоскополяризованного типа со скоростью

$$G = C\sqrt{H^-}. \tag{1.11}$$

На этой волне согласно (1.4), (1.8), (1.11) выполняется условие

$$\frac{u_{2,1}^-}{u_{3,1}^-} = \left.\frac{u_{2,1}^-}{u_{3,1}^-}\right|_{t=0} = const. \tag{1.12}$$

Такая волна совпадает с углом наклона характеристик первого семейства (1.4) исходной системы уравнений движения. На ней изменяется величина квадрата интенсивности воздействия на ненулевую. Одновременно на ней появляется дополнительное важное условие: постоянство направления сдвига, созданного в момент $t = 0$. Это условие не противоречит определению плоскополяризованной волны, поскольку нулевому состоянию перед ней можно приписать любое направление. Исходя из сказанного выше поставленную краевую задачу (1.1), (1.2) в случае отсутствия предварительных деформаций необходимо дополнить условиями на фронте ударной волны:

$$\begin{gathered} u_2(x_1,t)|_{x_1=X(t)} = 0, \quad u_3(x_1,t)|_{x_1=X(t)} = 0, \\ [u_{2,1}]|_{x_1=X(t)} = -u_{2,1}^-\Big|_{x_1=X(t)}, \quad [u_{3,1}]|_{x_1=X(t)} = -u_{3,1}^-\Big|_{x_1=X(t)}, \\ \left.\frac{u_{2,1}^-}{u_{3,1}^-}\right|_{x_1=X(t)} = const, \quad X(t) = \int\limits_0^t G(\xi)d\xi, \quad G = C\sqrt{H^-}. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Получить точное решение краевой задачи (1.1), (1.2), (1.13) невозможно из-за ее существенной нелинейности. Поэтому в разделах 2, 3 построим ее приближенное аналитическое решение на основе двух эффективных методов для динамических задач нелинейной теории упругости: метода сращиваемых асимптотических разложений [8] и лучевого метода, модифицированного для задач с ударными волнами [16].

2. Решение одномерной плоской динамической задачи на основе метода малого параметра

В работах [10–13] метод сращиваемых асимптотических разложений успешно применялся для решения одномерных и многомерных нестационарных задач ударного деформирования нелинейноупругих сред. Поэтому воспользуемся им для решения поставленной краевой задачи. Запишем второе и третье уравнения системы (1.3) в перемещениях, ограничиваясь третьим порядком малости, и конкретизируем функции нагружения $U_2(t)$, $U_3(t)$ на границе $x_1 = 0$:

$$\begin{gathered} u_{2,11}\left(1 + 3\gamma_1 u_{2,1}^2 + \gamma_1 u_{3,1}^2\right) + 2\gamma_1 u_{3,11}u_{2,1}u_{3,1} + \ldots = \ddot{u}_2 C^{-2}, \\ u_{3,11}\left(1 + 3\gamma_1 u_{3,1}^2 + \gamma_1 u_{2,1}^2\right) + 2\gamma_1 u_{2,11}u_{2,1}u_{3,1} + \ldots = \ddot{u}_3 C^{-2}, \\ u_2|_{x_1=0} = \frac{2}{3}\left\{(\alpha t + \alpha_0)^{3/2} - \alpha_0^{3/2}\right\}, \quad u_3|_{x_1=0} = \frac{2}{3}\left\{(\tau t + \tau_0)^{3/2} - \tau_0^{3/2}\right\}, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где α, α_0, τ, τ_0 — известные константы. Схема метода малого параметра требует перехода к безразмерным переменным. В нашем случае их удобно выбрать в виде:

$$\begin{gathered} s = \frac{x_1}{CT}, \quad m = \frac{t}{T}, \quad v(s,m) = \varepsilon^{-1}\frac{u_2(x_1,t)}{CT}, \\ w(s,m) = \varepsilon^{-1}\frac{u_3(x_1,t)}{CT}, \quad \varepsilon = \frac{\alpha\alpha_0^{1/2}}{C}, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где ε — малый параметр задачи, T — характерное время задачи, за которое возникающие на границе перемещения будут много меньше, чем расстояние CT. Переходя в

соотношениях (2.1) к новым переменным (2.2), получим внешнюю краевую задачу [8]:

$$
\begin{gathered}
v_{,ss}\left(1+3\gamma_1\varepsilon^2 v_{,s}^2+\gamma_1\varepsilon^2 w_{,s}^2\right)+2\gamma_1\varepsilon^2 w_{,ss}v_{,s}w_{,s}+\ldots=v_{,mm},\\
w_{,ss}\left(1+3\gamma_1\varepsilon^2 w_{,s}^2+\gamma_1\varepsilon^2 v_{,s}^2\right)+2\gamma_1\varepsilon^2 v_{,ss}v_{,s}w_{,s}+\ldots=w_{,mm},\\
v|_{s=0}=\frac{2}{3}\left\{(a_1m+a_2)^{3/2}-a_2^{3/2}\right\},\quad w|_{s=0}=\frac{2}{3}\left\{(a_3m+a_4)^{3/2}-a_4^{3/2}\right\},\\
a_1=\frac{\alpha^{1/3}T^{1/3}}{\alpha_0^{1/3}},\quad a_2=\frac{\alpha_0^{2/3}}{\alpha^{2/3}T^{2/3}},\\
a_3=\frac{\tau T^{1/3}}{\alpha^{2/3}\alpha_0^{1/3}},\quad a_4=\frac{\tau_0}{\alpha^{2/3}T^{2/3}\alpha_0^{1/3}}.
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

Искомые функции $v(s,m)$ и $w(s,m)$ представим асимптотическими рядами по квадратам степеней малого параметра

$$
\begin{gathered}
v(s,m)=v_0(s,m)+\varepsilon^2 v_1(s,m)+\varepsilon^4 v_2(s,m)+\ldots,\\
w(s,m)=w_0(s,m)+\varepsilon^2 w_1(s,m)+\varepsilon^4 w_2(s,m)+\ldots
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

и подставим в уравнения движения и краевые условия (2.3). Решение строится методом последовательных линейных приближений. В результате получим внешнее разложение [8]:

$$
\begin{gathered}
v(s,m)=\frac{2}{3}\left\{(a_1(m-s)+a_2)^{3/2}-a_2^{3/2}\right\}+\\
+\frac{\gamma_1 a_1}{2}\varepsilon^2(a_1(m-s)+a_2)^{1/2}s\left\{(a_1^3+a_3^3)(m-s)+a_1^2a_2+a_3^2a_4\right\}+\ldots,\\
w(s,m)=\frac{2}{3}\left\{(a_3(m-s)+a_4)^{3/2}-a_4^{3/2}\right\}+\\
+\frac{\gamma_1 a_3}{2}\varepsilon^2(a_3(m-s)+a_4)^{1/2}s\left\{(a_1^3+a_3^3)(m-s)+a_1^2a_2+a_3^2a_4\right\}+\ldots.
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

Решение (2.5) справедливо в малой окрестности нагружаемой границы $s=0$ в области, где $m-s>0$, его равномерность нарушается на расстояниях $s\sim\varepsilon^{-2}$. Для перехода в прифронтовую область ударной волны и учета краевых условий (1.13) необходимо изменить масштаб пространственной переменной. Переход к внутренним переменным $n=\varepsilon^2 s$, $p=s-m$, $v=v(n,p)$, $w=w(n,p)$ позволяет записать внутреннюю краевую задачу [8]:

$$
\begin{gathered}
2(v_{,pn}+\varepsilon^2 v_{,nn})\left\{1+\gamma_1\varepsilon^2\left(\left(v_{,p}+\varepsilon^2 v_{,n}\right)^2+\left(w_{,p}+\varepsilon^2 w_{,n}\right)^2\right)\right\}+\\
+\gamma_1 v_{,pp}\left\{\left(v_{,p}+\varepsilon^2 v_{,n}\right)^2+\left(w_{,p}+\varepsilon^2 w_{,n}\right)^2\right\}+2\gamma_1\left(v_{,p}+\varepsilon^2 v_{,n}\right)\left\{\left(v_{,p}+\varepsilon^2 v_{,n}\right)\times\right.\\
\left.\times\left(v_{,pp}+2\varepsilon^2 v_{,pn}+\varepsilon^4 v_{,nn}\right)+\left(w_{,p}+\varepsilon^2 w_{,n}\right)\left(w_{,pp}+2\varepsilon^2 w_{,pn}+\varepsilon^4 w_{,nn}\right)\right\}=0,\\
2(w_{,pn}+\varepsilon^2 w_{,nn})\left\{1+\gamma_1\varepsilon^2\left(\left(v_{,p}+\varepsilon^2 v_{,n}\right)^2+\left(w_{,p}+\varepsilon^2 w_{,n}\right)^2\right)\right\}+\\
+\gamma_1 w_{,pp}\left\{\left(v_{,p}+\varepsilon^2 v_{,n}\right)^2+\left(w_{,p}+\varepsilon^2 w_{,n}\right)^2\right\}+2\gamma_1\left(w_{,p}+\varepsilon^2 w_{,n}\right)\left\{\left(v_{,p}+\varepsilon^2 v_{,n}\right)\times\right.\\
\left.\times\left(v_{,pp}+2\varepsilon^2 v_{,pn}+\varepsilon^4 v_{,nn}\right)+\left(w_{,p}+\varepsilon^2 w_{,n}\right)\left(w_{,pp}+2\varepsilon^2 w_{,pn}+\varepsilon^4 w_{,nn}\right)\right\}=0,\\
v|_{p=p(n)}=0,\quad w|_{p=p(n)}=0,
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

где $p(n)$ — неизвестная функция, задающая положение переднего фронта ударной волны. Новые неизвестные функции $v(n,p)$, $w(n,p)$ и функцию $p(n)$ представим в виде асимптотических рядов:

$$v(n,p)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{2i}v_{2i}(n,p)\approx v_0(n,p),\quad w(n,p)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{2i}w_{2i}(n,p)\approx w_0(n,p),$$
$$p(n)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{2i}p_{2i}(n)\approx p_0(n) \tag{2.7}$$

и подставим в первые два соотношения (2.6). На нулевом шаге метода получим систему эволюционных уравнений:

$$2g_{0,n}+\gamma_1 g_{0,p}\left(g_0^2+h_0^2\right)+2\gamma_1 g_0\left(g_0g_{0,p}+h_0h_{0,p}\right)=0,$$
$$2h_{0,n}+\gamma_1 h_{0,p}\left(g_0^2+h_0^2\right)+2\gamma_1 h_0\left(g_0g_{0,p}+h_0h_{0,p}\right)=0,\quad g_0=v_{0,p},\quad h_0=w_{0,p}. \tag{2.8}$$

Для построения решения системы гиперболических нелинейных уравнений (2.8), описывающей поведение решения в прифронтовой области ударной волны, удобно ввести замену неизвестных функций g_0, h_0, учитывая полученные в разделе 1 результаты. Полагая $\eta=g_0^2+h_0^2$, $\vartheta=h_0/g_0$, от системы уравнений (2.8) перейдем к соотношениям:

$$\eta_{,n}+\frac{3\gamma_1}{2}\eta\eta_{,p}=0,\quad \vartheta_{,n}+\frac{\gamma_1}{2}\eta\vartheta_{,p}=0, \tag{2.9}$$

где второе уравнение интегрируется после решения первого. Система эволюционных уравнений (2.9) описывает два процесса: изменение квадрата интенсивности воздействия и изменение направления воздействия. Изменение квадрата интенсивности сдвига полностью описывается первым уравнением, а на изменение направления сдвига влияет нелинейность задачи и вид функции η. Общее решение (2.9) вдоль характеристик можно представить в виде

$$\eta=F\left(p-\frac{3\gamma_1}{2}\eta n\right),$$
$$\vartheta=const\quad \text{вдоль}\quad \frac{dp}{dn}=\frac{\gamma_1}{2}\eta, \tag{2.10}$$

где F — произвольная функция, определяемая условиями нагружения на границе. Сравнение (2.10) с краевыми условиями (2.3) и внешним решением (2.5) позволяет предположить частный вид представления для функций η и ϑ:

$$\eta=(B-Ap)z^3,\quad \vartheta=\sqrt{\frac{D(B-Ap)z+E}{(1-D)(B-Ap)z-E}},$$
$$z=\left(1-\frac{3\gamma_1}{2}An\right)^{-1/3},\quad A,\ B,\ D,\ E=const. \tag{2.11}$$

Для определения поля перемещений необходимо учесть, что $v_{0,p}=-\sqrt{\eta/(1+\vartheta^2)}$, $w_{0,p}=-\vartheta\sqrt{\eta/(1+\vartheta^2)}$. В результате получим для искомых функций:

$$v_0(n,p)=\frac{2}{3A(1-D)}\left\{(1-D)(B-Ap)z-E\right\}^{3/2}+\varphi_1(n),$$
$$w_0(n,p)=\frac{2}{3AD}\left\{D(B-Ap)z+E\right\}^{3/2}+\varphi_2(n), \tag{2.12}$$

где $\varphi_1(n)$, $\varphi_2(n)$ — неизвестные функции, которые находятся из краевых условий на фронте ударной волны (2.6). Положение переднего фронта возмущений определим из решения обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{dp_0}{dn} = \frac{\gamma_1}{2}(B - Ap_0)z^3, \quad p_0(0) = 0, \quad p_0(n) = \frac{B}{A}\left(1 - z^{-1}\right). \tag{2.13}$$

Подстановка (2.13) в условия на волне $v_0(n, p_0(n)) = 0$, $w_0(n, p_0(n)) = 0$ позволяет найти

$$\varphi_1(n) = -\frac{2}{3A(1-D)}\left\{B(1-D) - E\right\}^{3/2}, \quad \varphi_2(n) = -\frac{2}{3AD}\left\{DB + E\right\}^{3/2}. \tag{2.14}$$

Сопоставление внешнего (2.5) и внутреннего (2.12) решений с учетом (2.14) в нулевом приближении дает: $A = a_1^3 + a_2^3$, $B = a_2a_1^2 + a_4a_3^2$, $D = a_3^3/A$, $E = a_1^2a_3^2(a_4a_1 - a_2a_3)/A$. В данном разделе получено решение для первого шага метода возмущений. Если необходимо уточнить представленные формулы, то следующие приближения строятся по аналогии с нулевым приближением.

3. Решение одномерной плоской динамической задачи на основе метода лучевых рядов

В третьем разделе сохраним для функции $H(f)$ полное представление, так как в лучевом методе нет ограничения на малость перемещений и деформаций. Модификация метода лучевых рядов для нестационарных задач ударной деформации в твердом теле [16] связана с заменой точного решения на представление всех неизвестных функций в окрестности переднего фронта волнового процесса Σ в виде рядов по типу ряда Тейлора :

$$\begin{gathered} Y^{(I)}(x_1, t) = Y^{(0)}(x_1, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k Y}{\partial t^k}\right]\Bigg|_{t=t_\Sigma}(t - t_\Sigma)^k, \quad t \geq t_\Sigma, \\ t_\Sigma(x_1) = \int\limits_0^{x_1} G^{-1}(\zeta)d\zeta, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где $Y(x_1, t)$ — обобщенное обозначение для всех величин, которые на поверхности ударной волны Σ имеют разрыв в первой производной; $Y^{(0)}(x_1, t)$ и $Y^{(I)}(x_1, t)$ — значения функции $Y(x_1, t)$, вычисляемые перед ударной и сразу за ней. В качестве неизвестных выступают величины скачков $\left[\dfrac{\partial^k Y}{\partial t^k}\right]$. Для нашей задачи $u_2^{(0)}(x_1, t) = u_3^{(0)}(x_1, t) = 0$, а за основные неизвестные функции примем:

$$[\dot{u}_2] = \kappa_1, \quad [\ddot{u}_2] = \kappa_2, \ldots \quad [\dot{u}_3] = \theta_1, \quad [\ddot{u}_3] = \theta_2, \ldots \tag{3.2}$$

На основе геометрических и кинематических условий совместности [19] определим скачки в производных по координате и скачки вторых производных:

$$\begin{gathered} [u_{2,1}] = -\frac{\kappa_1}{G}, \quad [u_{3,1}] = -\frac{\theta_1}{G}, \quad [\dot{u}_{2,1}] = \frac{1}{G}\left(\frac{\delta\kappa_1}{\delta t} - \kappa_2\right), \quad [\dot{u}_{3,1}] = \frac{1}{G}\left(\frac{\delta\theta_1}{\delta t} - \theta_2\right), \\ [u_{2,11}] = \frac{1}{G}\left(-\frac{2}{G}\frac{\delta\kappa_1}{\delta t} + \frac{\kappa_2}{G} + \frac{\kappa_1}{G^2}\frac{\delta G}{\delta t}\right), \quad [u_{3,11}] = \frac{1}{G}\left(-\frac{2}{G}\frac{\delta\theta_1}{\delta t} + \frac{\theta_2}{G} + \frac{\theta_1}{G^2}\frac{\delta G}{\delta t}\right), \end{gathered} \tag{3.3}$$

где $\delta/\delta t$ — производная по Томасу [19].

Запишем второе и третье уравнения движения системы (1.3) в перемещениях:

$$\begin{gathered} u_{2,11}(1+Q)+2Q'(u_{2,1}^2u_{2,11}+u_{2,1}u_{3,1}u_{3,11})=\frac{\ddot{u}_2}{C^2},\\ u_{3,11}(1+Q)+2Q'(u_{3,1}^2u_{3,11}+u_{2,1}u_{3,1}u_{2,11})=\frac{\ddot{u}_3}{C^2},\\ Q=H(f)-1=\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i f^i,\quad Q'=\frac{dQ}{df}. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Пусть для решаемой системы уравнений (3.4) краевое условие (1.2) имеет вид:

$$u_2\big|_{x_1=0,\,t\geq 0}=A_1t+\frac{A_2}{2}t^2,\quad u_3\big|_{x_1=0,\,t\geq 0}=B_1t+\frac{B_2}{2}t^2, \tag{3.5}$$

где $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2$ — известные константы.

Технология применения метода лучевых рядов включает в себя k – кратное частное дифференцирование ($k=0,1,2,\ldots$) по времени уравнений движения (3.4) и запись полученных соотношений в разрывах. Для нашей задачи ограничимся значением $k=0$. Тогда основные уравнения затухания [14] будут иметь вид:

$$\begin{gathered} \frac{1}{G}\left(\frac{\kappa_2}{G}-\frac{2}{G}\frac{\delta\kappa_1}{\delta t}+\frac{\kappa_1}{G^2}\frac{\delta G}{\delta t}\right)\left\{1-[Q]+2(\gamma_1-[Q'])\frac{\kappa_1^2}{G^2}\right\}+\\ +\frac{2\kappa_1\theta_1}{G^3}\left(\frac{\theta_2}{G}-\frac{2}{G}\frac{\delta\theta_1}{\delta t}+\frac{\theta_1}{G^2}\frac{\delta G}{\delta t}\right)\big(\gamma_1-[Q']\big)=\frac{\kappa_2}{C^2},\\ \frac{1}{G}\left(\frac{\theta_2}{G}-\frac{2}{G}\frac{\delta\theta_1}{\delta t}+\frac{\theta_1}{G^2}\frac{\delta G}{\delta t}\right)\left\{1-[Q]+2(\gamma_1-[Q'])\frac{\theta_1^2}{G^2}\right\}+\\ +\frac{2\kappa_1\theta_1}{G^3}\left(\frac{\kappa_2}{G}-\frac{2}{G}\frac{\delta\kappa_1}{\delta t}+\frac{\kappa_1}{G^2}\frac{\delta G}{\delta t}\right)\big(\gamma_1-[Q']\big)=\frac{\theta_2}{C^2},\\ \Phi(p)=[Q]=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\gamma_i p^i,\quad p=[f]=-\frac{\theta_1^2+\kappa_1^2}{G^2},\\ [Q']=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}(i+1)\gamma_{i+1}p^i,\quad G=C\sqrt{1-\Phi(p)},\\ \frac{\delta G}{\delta t}=\frac{\Phi'(p)}{1-\Phi(p)-\Phi'(p)p}\left\{\frac{\theta_1}{G}\frac{\delta\theta_1}{\delta t}+\frac{\kappa_1}{G}\frac{\delta\kappa_1}{\delta t}\right\},\quad \Phi'(p)=\frac{d\Phi}{dp}=\gamma_1-[Q']. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Подставив в первые два соотношения (3.6) $[Q]$, $[Q']$, $\delta G/\delta t$, выразим величины:

$$\begin{gathered} \frac{\delta\kappa_1}{\delta t}=\frac{\Phi'(\kappa_2\kappa_1^2+\kappa_1\theta_1\theta_2)}{P},\quad \frac{\delta\theta_1}{\delta t}=\frac{\Phi'(\theta_2\theta_1^2+\theta_1\kappa_1\kappa_2)}{P},\\ P(p)=G^2\left\{1-\Phi+\frac{p\Phi'(-3+3\Phi+2\Phi'p)}{2(1-\Phi-\Phi'p)}\right\}. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Преобразуем систему уравнений затухания (3.7). Для этого домножим первое уравнение на $-\theta_1$, а второе — на κ_1 и сложим. В итоге получим уравнение

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\theta_1}{\kappa_1}\right)=0\quad \text{т.е.}\quad \frac{\theta_1}{\kappa_1}\bigg|_{\Sigma}=const. \tag{3.8}$$

Это означает, что для величин θ_1, κ_1 выполняется

$$\frac{\theta_1}{\kappa_1} = \frac{\delta\theta_1}{\delta t} \Big/ \frac{\delta\kappa_1}{\delta t} = \frac{\delta^2\theta_1}{\delta t^2} \Big/ \frac{\delta^2\kappa_1}{\delta t^2} = \ldots = const. \tag{3.9}$$

Примем, что $\theta_1 = \xi\kappa_1$, $\xi = const$, поэтому вместо системы уравнений затухания (3.7) далее будет решаться единственное уравнение с основной неизвестной $\delta\kappa_1/\delta t$. Отметим, что соотношения (3.8), (3.9) согласуются с результатом (1.12), полученным в разделе 1 для плоскополяризованной ударной волны, распространяющейся по предварительно недеформированной среде. Следствием того, что решается задача с наличием ударной волны, является нарушение рекуррентности уравнений затухания, то есть в формулах (3.7) присутствуют слагаемые, содержащие θ_2, κ_2. В работах [16, 20] был предложен вариант лучевого метода, позволяющий учесть данные слагаемые. Он заключается во введении в соотношение (3.1) дополнительных рядов по дельта—производным для функций $[\partial^k Y/\partial t^k]\big|_\Sigma$ в окрестности $t = 0$. Представим неизвестные функции нашей задачи, как

$$\begin{gathered}\kappa_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left.\frac{\delta^k\kappa_1}{\delta t^k}\right|_{t=0} t^k = \kappa_{10} + \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} t + \ldots, \quad \kappa_2 = \kappa_{20} + \ldots, \\ \theta_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left.\frac{\delta^k\theta_1}{\delta t^k}\right|_{t=0} t^k = \theta_{10} + \frac{\delta\theta_{10}}{\delta t} t + + \ldots, \quad \theta_2 = \theta_{20} + \ldots,\end{gathered} \tag{3.10}$$

где κ_{10}, κ_{20}, θ_{10}, θ_{20}, $\delta\kappa_{10}/\delta t$, $\delta\theta_{10}/\delta t$ — константы, подлежащие определению, и подставим в (3.1):

$$\begin{gathered}u_2 = -\left(\kappa_{10} + \frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t} t_\Sigma\right)(t - t_\Sigma) - \frac{\kappa_{20}}{2}(t - t_\Sigma)^2 + \ldots, \\ u_3 = -\left(\theta_{10} + \frac{\delta\theta_{10}}{\delta t} t_\Sigma\right)(t - t_\Sigma) - \frac{\theta_{20}}{2}(t - t_\Sigma)^2 + \ldots, \\ t_\Sigma = \int_0^{x_1} G^{-1}(\zeta)d\zeta = R_1 x_1 + R_2 x_1^2 + \ldots, \quad R_1 = \frac{1}{C}\left\{1 + \frac{\gamma_1(1+\xi^2)}{2}\frac{\kappa_{10}^2}{C^2}\right\}^{-1}, \\ R_2 = -\frac{\gamma_1(1+\xi^2)\kappa_{10}}{2C^4}\frac{\delta\kappa_{10}}{\delta t}\left\{1 + \frac{\gamma_1(1+\xi^2)}{2}\frac{\kappa_{10}^2}{C^2}\right\}^{-3}.\end{gathered} \tag{3.11}$$

Подставляя (3.11) в (3.5) с учетом, что $t_\Sigma(0) = 0$, найдем $\kappa_{10} = -A_1$, $\kappa_{20} = -A_2$, $\theta_{10} = -B_1$, $\theta_{20} = -B_2$, $\xi = B_1/A_1$. Записывая первое уравнение системы (3.7) в момент времени $t = 0$, определим оставшиеся константы: $\delta\kappa_{10}/\delta t = -\gamma_1 C^{-2}\left(A_1^2 A_2 + B_1 B_2 A_1\right)$, $\delta\theta_{10}/\delta t = \xi\delta\kappa_{10}/\delta t$. Полученное решение можно уточнить, если в формулах (3.10) оставить слагаемые с более высокими степенями по t. Отметим, что предварительный анализ характеристических направлений для исходной системы уравнений движения позволил получить дополнительную связь между неизвестными функциям: $\theta_1 = \xi\kappa_1$. Что значительно упростило решение задачи, сведя систему из двух уравнений затухания к одному, и исключило возможность нахождения неверного решения без учета условия (3.9).

Заключение

В настоящей статье для одномерной плоской деформации нелинейноупругого несжимаемого полупространства представлены анализ краевых условий на ударных волнах и количество ударных волн, необходимое для решения, в случае отсутствия

предварительных статических деформаций. Совместный анализ углов наклона характеристик задачи и скоростей ударных волн позволяет утверждать, что по среде движется единственная ударная волна плоскополяризованного типа, которая одновременно входит в число характеристик, определяющих изменение направления сдвига. Отсюда следует постоянство направления сдвига на переднем фронте ударной волны. Данное условие использовано в двух процедурах получения приближенного теоретического решения: методе сращиваемых асимптотических разложений и лучевом методе, что позволило существенно упростить эти методики. Одновременно показано, что среда в окрестности ударной волны деформируется в соответствии с поведением решения системы двух эволюционных уравнений, для которых получено общее решение в виде инвариантов Римана. Для лучевого метода полученное условие позволяет перейти от решения системы уравнений затухания к решению единственного уравнения затухания. Проведенный анализ без существенных сложностей распространяется на решение задач ударной деформации предварительно ненапряженной несжимаемой среды для ударных волн ненулевой кривизны. Он может найти практическое применение при разработке и верификации результатов в процедурах численного счета.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bland D. R. Nonlinear Dynamic Elasticity. London: Blaisdell, 1969. 93 p.

[2] Whitham G. B. Linear and Nonlinear Waves. New York: Wiley, 1974. 636 p.

[3] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. Москва: Московский лицей, 1998. 412 с.

[4] Kobayashi A. S. Handbook on Experimental Mechanics. New York: Wiley, 1993. 1074 p.

[5] Порубов А. В. Локализация нелинейных волн деформации. Москва: Физматлит, 2009. 207 с.

[6] Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. Москва: Физматлит, 2001. 608 с.

[7] Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. Москва: Физматлит, 2000. 272 с.

[8] Nayfeh A. H. Introduction to Perturbation Techniques. New York: Wiley-VCH, 1993. 536 p.

[9] Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Ray method for solving dynamic problems connected with the propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // Appl. Mech. Reviews. 1995. Vol. 48, no. 1. P. 1–39.

[10] Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. Об эволюционных уравнениях задач ударного деформирования с плоскими поверхностями разрывов // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2, № 3. С. 82–95.

[11] Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. Об ударной деформации несжимаемого полупространства под действием сдвигающей нагрузки переменного направления // Сибирский журнал индустриальной математики. 2014. Т. 17, № 2(58). С. 87–96.

[12] Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. Об асимптотическом представлении решений многомерных задач ударной динамики нелинейно-упругих сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 3(21). С. 131–143.

[13] Буренин А. А., Россихин Ю. А. О влиянии вязкости на характер распространения плоской продольной волны // ПМТФ. 1990. № 6. С. 13–17.

[14] Бабичева Л. А., Быковцев Г .И., Вервейко Н. Д. Лучевой метод решения динамических задач в упруговязкопластических средах // ПММ. 1973. Т. 37, № 1. с. 145–155.

[15] Achenbach J. D., Reddy D. P. Note of wave propagation in lineary viscoelastic media // ZAMP. 1967. Vol. 18, no. 1. p. 141–144.

[16] Буренин А. А., Россихин Ю. А. Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями сильных разрывов // Прикладные задачи механики деформируемых сред. Владивосток: ДВО АН СССР, 1991. с. 129–137.

[17] Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. Решение одной многомерной задачи ударной деформации упругого полупространства с искривленной границей на основе модифицированного лучевого метода // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 4. С. 132–143.
[18] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. 512 с.
[19] Thomas T. Y. Plastic flow and fracture in solids. New York: Academic Press, 1961. 267 p.
[20] Буренин А. А. Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях // Дальневосточный мат. сб. 1999. Т. 8. С. 49–72.

V. E. Ragozina, Yu. E. Ivanova

THE PLANE PROBLEM SOLUTION OF IMPACT DEFORMATION IN A PRELIMINARY UNSTRESSED INCOMPRESSIBLE ELASTIC MEDIUM

Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia

Abstract. The problem of one-dimensional plane deformation of a nonlinear elastic incompressible half-space under the impact load action on its boundary is solved. The half-space is in a free state until the moment of impact action. This condition leads to the discontinuity in the boundary conditions at the half-space boundary moves as the only plane-polarized shock wave, on which the direction of the preliminary shear remains unchanged. The pointed out properties of the leading edge of the shock action follow from the joint analysis of the characteristic directions of the problem and the shock waves types for a one-dimensional plane problem in an incompressible medium with arbitrary preliminary deformations. Two versions of the problem approximate solution based on the method of matched asymptotic expansions and on the basis of the ray series method are presented.

Keywords: nonlinear elastic medium, incompressibility, shock wave, plane strain, characteristics of hyperbolic systems, perturbation method, ray series.

REFERENCES

[1] Bland D. R. Nonlinear Dynamic Elasticity. London: Blaisdell, 1969. 93 p.
[2] Whitham G. B. Linear and Nonlinear Waves. New York: Wiley, 1974. 636 p.
[3] Kulikovskii A. G., Sveshnikova E. I. Nonlinear Waves in Elastic Media. US: CRC PR INC, 1995. 256 p.
[4] Kobayashi A. S. Handbook on Experimental Mechanics. New York: Wiley, 1993. 1074 p.
[5] Porubov A. V. Localization of nonlinear deformation waves. Moscow: Fizmatlit, 2009. 207 p. (in Russian).
[6] Lurie A. I. Nonlinear theory of elasticity. Amsterdam: Elsevier, 2012. 617 p.
[7] Kulikovskii A. G., ang A. Yu. Semenov N. V. P. Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems. Boca Raton: CRC Press, 2000. 560 p.
[8] Ryskin N. M., Trubetskov D. I. Nonlinear Waves. Moscow: Fizmatlit, 2000. 272 p. (in Russian).
[9] Nayfeh A. H. Introduction to Perturbation Techniques. New York: Wiley-VCH, 1993. 536 p.
[10] Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Ray method for solving dynamic problems connected with the propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // Appl. Mech. Reviews. 1995. Vol. 48, no. 1. P. 1–39.
[11] Ragozina V. E., Ivanova J. E. On evolution equations for impact deformation problems with consideration of plane discontinuity surfaces // Computational Mechanics of Continuous Media. 2009. Vol. 2, no. 3. P. 82–95. (in Russian).

Ragozina Victoria Evgenievna, Cand. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia.
Ivanova Yulia Evgenievna, Cand. Sci. Phys. & Math., Researcher, Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia.

[12] Ragozina V. E., Ivanova Y. E. On the Impact Deformation of an Incompressible Half-Space under Action of a Shear Load of Variable Direction // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2014. Vol. 8, no. 3. P. 1–10.

[13] Ragozina V. E., Ivanova Y. E. On the Asymptotic Representation of Multidimensional Problems Solutions of Shock Dynamics of Nonlinear Elastic Medium // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Series: Mechanics of a limit state. 2014. no. 3(21). P. 131–143. (in Russian).

[14] Burenin A. A., Rossikhin Y. A. The Effect of Viscosity on the Character of the Propagation of a Plane Longitudinal Shock Wave // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1990. Vol. 31, no. 6. P. 807–810.

[15] Babicheva L. A., Bykovtsev G. I., Verveiko N. D. Ray method for solving dynamic problems in elastic-viscoplastic media // Applied Mathematics and Mechanics. 1973. Vol. 37, no. 1. P. 145–155. (in Russian).

[16] Achenbach J. D., Reddy D. P. Note of wave propagation in lineary viscoelastic media // ZAMP. 1967. Vol. 18, no. 1. p. 141–144.

[17] Thomas T. Y. Plastic flow and fracture in solids. New York: Academic Press, 1961. 267 p.

[18] Burenin A. A., Rossikhin Y. A. Ray method for solving one-dimensional problems of nonlinear dynamic theory of elasticity with flat surfaces of strong discontinuities // Applied problems of the mechanics of deformable media. Vladivostok: FEB USSR Academy of Sciences, 1991. P. 129–137. (in Russian).

[19] Ivanova Y. E., Ragozina V. E. Solution of a Multidimensional Impact Deformation Problem for an Elastic Half-Space with Curved Boundary on the Basis of a Modified Ray Method // Mech. Solids. 2016. Vol. 51, no. 4. P. 484–493.

[20] Burenin A. A. On one possibility of constructing approximate solutions of non-stationary problems of dynamics of elastic media under shock effects // Far Eastern Mathematical Collection. 1999. Vol. 8. P. 49–72. (in Russian).