Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 1 (47). С. 16–27

Т. С. Алероев, М. В. Гасанов

ВОЗМУЩЕНИЕ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация. В данной работе представлено исследование рассматриваемого класса нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками. Учитывая авторскую разработку теоремы существования и единственности решения построена структура аналитического приближенного решения, для которой, в данной работе, было установлено влияние возмущения подвижной особой точки. Представленные теоретические положения подтверждены с помощью численного эксперимента. Для оптимизации априорных оценок применялась апостериорная оценка.

Ключевые слова: волновые процессы, эластичная балка, нелинейные дифференциальные уравнения, подвижная особая точка, аналитическое приближенное решение, априорная оценка.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.002

УДК: 539.374

1. Введение. Потребность развития физических наук, к изучению меняющихся процессов привело к возникновению и формированию основных понятий дифференциального и интегрального исчисления. Большинство процессов носит сложный характер, для описания которых возникает необходимость применения нелинейных дифференциальных уравнений.

В работе [1] проводится исследование волновых процессов в балке на основе уравнения третьего порядка, заданного в неявном виде. При этом предлагается классическая теория, которая не работает для случая нелинейных дифференциальных уравнений. Существенной особенностью таких уравнений являются подвижные особые точки, что

Алероев Темирхан Султанович
`e-mail:` aleroevts@mgsu.ru, профессор, доктор физико-математических наук, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.
Гасанов Магомедюсуф Владимирович
`e-mail:` gasanovmv@mgsu.ru, преподаватель, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Поступила 10.10.2020

является препятствием для использования классической теории. Следует отметить, что нелинейные уравнения в данном случае относятся к категории, лишь в частном случае разрешимых в квадратурах. Это обстоятельство подчеркивает актуальность и новизну выполненных исследований в статье. В авторской публикации [2,3] приведено доказательство теоремы существования и единственности решения для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка. Получена структура аналитического приближенного решения с априорными оценками и представлены численные эксперименты.

На данный момент существующая теория позволяет определять подвижные особые точки лишь приближенно. Это обстоятельство ставит перед исследователем задачу исследования влияния возмущения подвижной особой точки на структуру аналитического приближенного решения. В данной публикации представлено теоретическое обоснование этой задачи.

Если в работах [2, 3] дается развитие теоретического обоснования представленного ранее в работах [4–8], то в публикациях [9–14] представлен вариант, имеющий приложения нелинейных уравнений с подвижными особенностями для строительных конструкций консольного типа.

2. Результаты исследования. Ранее в работе [2] для точного решения задачи Коши

$$y''' = y^2 + r(x), \tag{1}$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ y''(x_0) = y_2, \end{cases} \tag{2}$$

была получена структура аналитического приближенного решения:

$$y(x) = (x^* - x)^{-3} \sum_0^\infty C_n (x^* - x)^n. \tag{3}$$

Так как известные методы нахождения подвижных особых точек позволяют получить последние только приближенно, то возникает необходимость в решении задачи о влиянии погрешности подвижной особой точки на аналитическое приближенное решение (3). Поэтому получаем следующую структуру:

$$\tilde{y}(x) = (\tilde{x}^* - x)^{-3} \sum_0^\infty \tilde{C}_n (\tilde{x}^* - x)^n. \tag{4}$$

Следующая теорема позволяет обосновать влияние погрешности теоретически.

Теорема 1. *Требуем выполнения следующие условий:*

1) $r(x) \in C^\infty$ *в области* $|\tilde{x}^* - x| < \rho_1$*, где* $0 < \rho_1 = \mathrm{const}$*;*

2) $\exists M_i : \dfrac{|r^{(n)}(\tilde{x}^*)|}{n!} \leqslant M_i,\ M_i = \mathrm{const}$*;*

3) $\tilde{x}^* \leqslant x^*$*;*

4) известна оценка погрешности для значения $\tilde{x}^*$*:* $|\tilde{x}^* - x^*| \leqslant \Delta\tilde{x}^*$*;*

5) $\Delta\tilde{x}^* < 1/\sqrt[6]{M+1}$*.*

В этом случае приближенное решение (3) задачи (1)–(2) для любой из областей

$$\tilde{x}^* - \rho_2 < x < \tilde{x}^* - \Delta\tilde{x}^*, \tag{5}$$

$$\tilde{x}^* - \Delta\tilde{x}^* < x < \tilde{x}^* \tag{6}$$

будет иметь оценку погрешности

$$\Delta\tilde{y}_N \leqslant \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

где

$$\Delta_0 \leqslant 60\frac{\Delta\tilde{x}^*\left(3\alpha^2 + \alpha\Delta\tilde{x}^* + (\Delta\tilde{x}^*)^2\right)}{\alpha^6},$$

$$\Delta_1 = \frac{\Delta\tilde{x}^*}{1-2^6(M+1)\alpha^6}\left(2^{-2}\alpha^{-2} + 2^{-1}\alpha^{-1} + 1 + 2\alpha + 2^2\alpha^2 + 2^3\alpha^3(M+1)\right),$$

$$\Delta_2 \leqslant \frac{\Delta\tilde{x}^*\Delta M}{1-2^6(M+\Delta M+1)\alpha^6}\left(2^{-2}\alpha^{-2} + 2^{-1}\alpha^{-1} + 1 + 2\alpha + 2^2\alpha^2 + 2^3\alpha^3(M+\Delta M+1)\right),$$

$$\Delta_3 \leqslant \frac{(M+1)^{\frac{N+1}{6}}\alpha^{N+1}}{1-(M+1)\alpha^6}\left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120} + \frac{\alpha}{(N-1)(N-2)(N-3)+120} + \right.$$
$$+ \frac{\alpha^2}{N(N-1)(N-2)+120} + \frac{\alpha^3}{(N+1)N(N-1)+120} +$$
$$\left. + \frac{\alpha^4}{(N+1)(N+2)N+120} + \frac{\alpha^5}{(N+1)(N+3)(N+2)+120}\right)$$

в случае $N+1 = 6n$,

$$\Delta_3 \leqslant \frac{(M+1)^{\frac{N}{6}}\alpha^{N+1}}{1-(M+1)\alpha^6}\left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120} + \frac{\alpha}{(N-1)(N-2)(N-3)+120} + \right.$$
$$+ \frac{\alpha^2}{N(N-1)(N-2)+120} + \frac{\alpha^3}{(N+1)N(N-1)+120} +$$
$$\left. + \frac{\alpha^4}{(N+1)(N+2)N+120} + \frac{\alpha^5}{(N+1)(N+3)(N+2)+120}\right)$$

для варианта $N+1 = 6n+1$,

$$\Delta_3 \leqslant \frac{(M+1)^{\frac{N-1}{6}}\alpha^{N+1}}{1-(M+1)\alpha^6}\left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120} + \frac{\alpha}{(N-1)(N-2)(N-3)+120} + \right.$$
$$+ \frac{\alpha^2}{N(N-1)(N-2)+120} + \frac{\alpha^3}{(N+1)N(N-1)+120} +$$
$$\left. + \frac{\alpha^4}{(N+1)(N+2)N+120} + \frac{\alpha^5}{(N+1)(N+3)(N+2)+120}\right)$$

при $N+1 = 6n+2$,

$$\Delta_3 \leqslant \frac{(M+1)^{\frac{N-2}{6}}\alpha^{N+1}}{1-(M+1)\alpha^6}\left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120} + \frac{\alpha}{(N-1)(N-2)(N-3)+120} + \right.$$
$$+ \frac{\alpha^2}{N(N-1)(N-2)+120} + \frac{\alpha^3}{(N+1)N(N-1)+120} +$$
$$\left. + \frac{\alpha^4}{(N+1)(N+2)N+120} + \frac{\alpha^5}{(N+1)(N+3)(N+2)+120}\right)$$

для случая $N+1 = 6n+3$,

$$\Delta_3 \leqslant \frac{(M+1)^{\frac{N-3}{6}}\alpha^{N+1}}{1-(M+1)\alpha^6}\left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120} + \frac{\alpha}{(N-1)(N-2)(N-3)+120} + \right.$$

$$+\frac{\alpha^2}{N(N-1)(N-2)+120}+\frac{\alpha^3}{(N+1)N(N-1)+120}+$$
$$+\frac{\alpha^4}{(N+1)(N+2)N+120}+\frac{\alpha^5}{(N+1)(N+3)(N+2)+120}\Bigg)$$

при условии, что $N+1=6n+4$, *и*

$$\Delta_3 \leqslant \frac{(M+1)^{\frac{N-4}{6}}\alpha^{N+1}}{1-(M+1)\alpha^6}\left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120}+\frac{\alpha}{(N-1)(N-2)(N-3)+120}+\right.$$
$$+\frac{\alpha^2}{N(N-1)(N-2)+120}+\frac{\alpha^3}{(N+1)N(N-1)+120}+$$
$$\left.+\frac{\alpha^4}{(N+1)(N+2)N+120}+\frac{\alpha^5}{(N+1)(N+3)(N+2)+120}\right)$$

для $N+1=6n+5$, *при этом*

$$\rho_2=\min\left\{\rho_1,\frac{1}{2\sqrt[6]{M+1}}\right\},\quad M=\max\left\{\sup_n\left\{\frac{|r^{(n)}(\tilde{x}^*)|}{n!}\right\},|y_0|,|y_1|,|y_2|\right\},$$

$$\Delta M=\left(\sup_n\left\{\frac{|r^{(n+1)}(\tilde{x}^*)|}{n!}\right\}\right)\Delta\tilde{x}^*,\ n=0,1,2,\dots,$$

$$\alpha=\begin{cases}|\tilde{x}^*-x| \text{ для } x \text{ из области } (5),\\ \Delta\tilde{x}^* \text{ для } x \text{ из области } (6).\end{cases}$$

Доказательство.

$$\Delta\tilde{y}_N(x)=|y(x)-\tilde{y}_N(x)|\leqslant|y(x)-\tilde{y}(x)|+|\tilde{y}(x)-\tilde{y}_N(x)|.$$

Оценим выражение:

$$|y(x)-\tilde{y}(x)|=\left|\sum_0^\infty C_n(x^*-x)^{n-3}-\sum_0^\infty\tilde{C}_n(\tilde{x}^*-x)^{n-3}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\sum_0^\infty C_n(x^*-x)^{n-3}-\sum_0^\infty\tilde{C}_n(x^*-x)^{n-3}\right|+\left|\sum_0^\infty\tilde{C}_n(x^*-x)^{n-3}-\sum_0^\infty\tilde{C}_n(\tilde{x}^*-x)^{n-3}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_0^\infty|C_n-\tilde{C}_n||x^*-x|^{n-3}+\sum_0^\infty|\tilde{C}_n|\left|(x^*-x)^{n-3}-(\tilde{x}^*-x)^{n-3}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_0^\infty|C_n-\tilde{C}_n||x^*-x|^{n-3}+\sum_0^\infty|\tilde{C}_n|\left|(\tilde{x}^*-x+\Delta\tilde{x}^*)^{n-3}-(\tilde{x}^*-x)^{n-3}\right|.$$

А так как

$$|\tilde{y}(x)-\tilde{y}_N(x)|=\left|\sum_0^\infty\tilde{C}_n(\tilde{x}^*-x)^{n-3}-\sum_0^N\tilde{C}_n(\tilde{x}^*-x)^{n-3}\right|=$$

$$=\left|\sum_{N+1}^\infty\tilde{C}_n(\tilde{x}^*-x)^{n-3}\right|\leqslant\sum_{N+1}^\infty|\tilde{C}_n||\tilde{x}^*-x|^{n-3},$$

то для $\Delta\tilde{y}_N(x)$ получаем

$$\Delta\tilde{y}_N(x) \leqslant \sum_0^\infty |C_n - \tilde{C}_n||x^* - x|^{n-3} +$$

$$+\sum_0^\infty |\tilde{C}_n| \left|(\tilde{x}^* - x + \Delta\tilde{x}^*)^{n-3} - (\tilde{x}^* - x)^{n-3}\right| + \sum_{N+1}^\infty |\tilde{C}_n||\tilde{x}^* - x|^{n-3}$$

или, с учетом того, что

$$C_0 = -60, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0, \quad C_5 = 0,$$

$$C_6 = \frac{A_0}{126}, \quad C_7 = \frac{A_1}{144}, \quad C_8 = \frac{A_2}{180}, \quad C_9 = \frac{A_3}{240}, \quad C_{10} = \frac{A_4}{330}, \quad C_{11} = \frac{A_5}{456}, \ \ldots,$$

имеем

$$\Delta\tilde{C}_0 = \Delta\tilde{C}_1 = \ldots = \Delta\tilde{C}_5 = 0,$$

следовательно,

$$\Delta\tilde{y}_N(x) \leqslant |\tilde{C}_0| \left| \frac{1}{((\tilde{x}^* - x) + \Delta\tilde{x}^*)^3} - \frac{1}{(\tilde{x}^* - x)^3} \right| +$$

$$+\sum_6^\infty |\tilde{C}_n| \left|(\tilde{x}^* - x + \Delta\tilde{x}^*)^{n-3} - (\tilde{x}^* - x)^{n-3}\right| + \sum_6^\infty |\Delta\tilde{C}_n||x^* - x|^{n-3} +$$

$$+\sum_{N+1}^\infty |\tilde{C}_n||\tilde{x}^* - x|^{n-3} = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3.$$

Далее

$$\Delta_0 = |\tilde{C}_0| \left| \frac{1}{((\tilde{x}^* - x) + \Delta\tilde{x}^*)^3} - \frac{1}{(\tilde{x}^* - x)^3} \right| = 60 \left| \frac{(\tilde{x}^* - x)^3 - ((\tilde{x}^* - x) + \Delta\tilde{x}^*)^3}{((\tilde{x}^* - x) + \Delta\tilde{x}^*)^3(\tilde{x}^* - x)^3} \right| \leqslant$$

$$\leqslant 60 \frac{\Delta\tilde{x}^* \left(3|\tilde{x}^* - x|^2 + |\tilde{x}^* - x|\Delta\tilde{x}^* + (\Delta\tilde{x}^*)^2\right)}{|\tilde{x}^* - x|^6} \leqslant 60 \frac{\Delta\tilde{x}^* \left(3\alpha^2 + \alpha\Delta\tilde{x}^* + (\Delta\tilde{x}^*)^2\right)}{\alpha^6},$$

где

$$\alpha = \begin{cases} |\tilde{x}^* - x| \text{ для } x \text{ из области (5)}, \\ \Delta\tilde{x}^* \text{ для } x \text{ из области (6)}. \end{cases}$$

Оценим Δ_1. С учетом структуры оценок C_n [2]

$$|C_{6n}| \leqslant \frac{1}{(6n-3)(6n-4)(6n-5) + 120}(M+1)^n = V_{6n},$$

$$|C_{6n+1}| \leqslant \frac{1}{(6n-2)(6n-3)(6n-4) + 120}(M+1)^n = V_{6n+1},$$

$$|C_{6n+2}| \leqslant \frac{1}{(6n-1)(6n-2)(6n-3) + 120}(M+1)^n = V_{6n+2},$$

$$|C_{6n+3}| \leqslant \frac{1}{6n(6n-1)(6n-2) + 120}(M+1)^n = V_{6n+3},$$

$$|C_{6n+4}| \leqslant \frac{1}{(6n+1)(6n-1)6n + 120}(M+1)^n = V_{6n+4},$$

$$|C_{6n+5}| \leqslant \frac{1}{(6n+2)(6n+1)6n + 120}(M+1)^n = V_{6n+5}$$

и ограниченности производных в силу пункта 2 настоящей теоремы, получаем

$$\Delta_1 = \sum_6^\infty |\tilde{C}_n| \left|(\tilde{x}^* - x + \Delta\tilde{x}^*)^{n-3} - (\tilde{x}^* - x)^{n-3}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_6^\infty |\tilde{C}_n| \left|\Delta\tilde{x}^*(n-3)(\tilde{x}^* - x + \Delta\tilde{x}^*)^{n-4}\right| = \sum_0^\infty 2^{6n-2}|\tilde{C}_{6n+1}| \left|\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n-2}\right| +$$

$$+ \sum_0^\infty 2^{6n-1}|\tilde{C}_{6n+2}| \left|\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n-1}\right| + \sum_0^\infty 2^{6n}|\tilde{C}_{6n+3}| \left|\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n}\right| +$$

$$+ \sum_0^\infty 2^{6n+1}|\tilde{C}_{6n+4}| \left|\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n+1}\right| + \sum_0^\infty 2^{6n+2}|\tilde{C}_{6n+5}| \left|\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n+2}\right| +$$

$$+ \sum_0^\infty 2^{6n+3}|\tilde{C}_{6n+6}| \left|\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n+3}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_0^\infty 2^{6n-2} \frac{(M+1)^n}{(6n-2)(6n-3)(6n-4)+120} |\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n-2}| +$$

$$+ \sum_0^\infty 2^{6n-1} \frac{(M+1)^n}{(6n-1)(6n-2)(6n-3)+120} |\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n-1}| +$$

$$+ \sum_0^\infty 2^{6n} \frac{(M+1)^n}{6n(6n-1)(6n-2)+120} |\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n}| +$$

$$+ \sum_0^\infty 2^{6n+1} \frac{(M+1)^n}{(6n+1)(6n-1)6n+120} |\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n+1}| +$$

$$+ \sum_0^\infty 2^{6n+2} \frac{(M+1)^n}{(6n+2)(6n+1)6n+120} |\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n+2}| +$$

$$+ \sum_0^\infty 2^{6n+3} \frac{(M+1)^{n+1}}{(6n+3)(6n+2)(6n+1)+120} |\Delta\tilde{x}^*(\tilde{x}^* - x)^{6n+3}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{-2}\Delta\tilde{x}^*|\tilde{x}^* - x|^{-2}}{1 - 2^6(M+1)|\tilde{x}^* - x|^6} + \frac{2^{-1}\Delta\tilde{x}^*|\tilde{x}^* - x|^{-1}}{1 - 2^6(M+1)|\tilde{x}^* - x|^6} + \frac{\Delta\tilde{x}^*}{1 - 2^6(M+1)|\tilde{x}^* - x|^6} +$$

$$+ \frac{2\Delta\tilde{x}^*|\tilde{x}^* - x|}{1 - 2^6(M+1)|\tilde{x}^* - x|^6} + \frac{2^2\Delta\tilde{x}^*|\tilde{x}^* - x|^2}{1 - 2^6(M+1)|\tilde{x}^* - x|^6} + \frac{2^3\Delta\tilde{x}^*|\tilde{x}^* - x|^3(M+1)}{1 - 2^6(M+1)|\tilde{x}^* - x|^6} =$$

$$= \frac{\Delta\tilde{x}^*}{1 - 2^6(M+1)|\tilde{x}^* - x|^6} \left(2^{-2}|\tilde{x}^* - x|^{-2} + 2^{-1}|\tilde{x}^* - x|^{-1} + \right.$$

$$\left. + 1 + 2|\tilde{x}^* - x| + 2^2|\tilde{x}^* - x|^2 + 2^3|\tilde{x}^* - x|^3(M+1)\right).$$

Окончательно получаем

$$\Delta_1 \leqslant \frac{\Delta\tilde{x}^*}{1 - 2^6(M+1)\alpha^6} \left(2^{-2}\alpha^{-2} + 2^{-1}\alpha^{-1} + 1 + 2\alpha + 2^2\alpha^2 + 2^3\alpha^3(M+1)\right)$$

в области $\alpha \leqslant 1/(2\sqrt[6]{M+1})$.

Переходим к оценке Δ_2. Необходимо доказать справедливость оценок для $\Delta\tilde{C}_{6n}$, $\Delta\tilde{C}_{6n+1}$, $\Delta\tilde{C}_{6n+2}$, $\Delta\tilde{C}_{6n+3}$, $\Delta\tilde{C}_{6n+4}$, $\Delta\tilde{C}_{6n+5}$:

$$|\Delta C_{6n}| \leqslant \frac{\Delta M}{(6n-3)(6n-4)(6n-5)+120}(M+\Delta M+1)^n = V_{6n},$$

$$|\Delta C_{6n+1}| \leqslant \frac{\Delta M}{(6n-2)(6n-3)(6n-4)+120}(M+\Delta M+1)^n = V_{6n+1},$$

$$|\Delta C_{6n+2}| \leqslant \frac{\Delta M}{(6n-1)(6n-2)(6n-3)+120}(M+\Delta M+1)^n = V_{6n+2},$$

$$|\Delta C_{6n+3}| \leqslant \frac{\Delta M}{6n(6n-1)(6n-2)+120}(M+\Delta M+1)^n = V_{6n+3},$$

$$|\Delta C_{6n+4}| \leqslant \frac{\Delta M}{(6n+1)(6n-1)6n+120}(M+\Delta M+1)^n = V_{6n+4},$$

$$|\Delta C_{6n+5}| \leqslant \frac{\Delta M}{(6n+2)(6n+1)6n+120}(M+\Delta M+1)^n = V_{6n+5},$$

где

$$\Delta M = \left(\sup_n \left\{\frac{|r^{(n+1)}(\tilde{x}^*)|}{n!}\right\}\right)\Delta\tilde{x}^*, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

С учетом доказанной ранее теоремы существования и единственности решения имеем рекуррентное соотношение:

1) $n+\rho-3 = n+2\rho$;

2) $(n-3)(n-4)(n-5)C_n = C_n^* + A_{n-6}$, где $C_n^* = \sum\limits_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$.

Докажем справедливость оценок для случая $\Delta\tilde{C}_{6n+6}$:

$$\Delta\tilde{C}_{6n+6} = |\tilde{C}_{6n+6} - C_{6n+6}| = \left|\frac{1}{(6n+3)(6n+2)(6n+1)+120}(\tilde{C}^*_{6n+6} + A_{n-6}) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(6n+3)(6n+2)(6n+1)+120}(C^*_{6n+6} + A_{n-6})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(6n+3)(6n+2)(6n+1)+120}\left|\sum_{i=0}^{6n+6}\tilde{C}_i\tilde{C}_{6n+6-i} - \sum_{i=0}^{6n+6} C_i C_{6n+6-i}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(6n+3)(6n+2)(6n+1)+120} \times$$

$$\times \left|\sum_{i=0}^{6n+6}(C_i + \Delta\tilde{C}_i)(C_{6n+6-i} + \Delta\tilde{C}_{6n+6-i}) - \sum_{i=0}^{6n+6} C_i C_{6n+6-i}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(6n+3)(6n+2)(6n+1)+120} \times$$

$$\times \left|\sum_{i=0}^{6n+6}\Big(C_i C_{6n+6-i} + C_i\Delta\tilde{C}_{6n+6-i} + \Delta\tilde{C}_i C_{6n+6-i} + \Delta\tilde{C}_i\Delta\tilde{C}_{6n+6-i}\Big) - \sum_{i=0}^{6n+6} C_i C_{6n+6-i}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(6n+3)(6n+2)(6n+1)+120} \times$$

$$\times\left|\sum_{i=0}^{6n+6}\left(C_i\Delta\tilde{C}_{6n+6-i}+\Delta\tilde{C}_iC_{6n+6-i}+\Delta\tilde{C}_i\Delta\tilde{C}_{6n+6-i}\right)\right|.$$

После ряда преобразований получаем оценку для $\Delta\tilde{C}_{6n+6}$:

$$\Delta\tilde{C}_{6n+6}\leqslant\frac{\Delta M}{(6n+2)(6n+2)(6n+1)+120}(M+\Delta M+1)^{n+1}.$$

Таким же образом показываем справедливость оценок для $\Delta\tilde{C}_{6n+1}$, $\Delta\tilde{C}_{6n+2}$, $\Delta\tilde{C}_{6n+3}$, $\Delta\tilde{C}_{6n+4}$, $\Delta\tilde{C}_{6n+5}$.

Переходим к оценке для Δ_2:

$$\sum_6^\infty|\Delta\tilde{C}_n|\,|\tilde{x}^*-x+\Delta\tilde{x}^*|^{n-3}=\sum_0^\infty 2^{6n-2}|\Delta\tilde{C}_{6n+1}|\,\left|(\tilde{x}^*-x)^{6n-2}\right|+$$

$$+\sum_0^\infty 2^{6n-1}|\Delta\tilde{C}_{6n+2}|\,\left|(\tilde{x}^*-x)^{6n-1}\right|+\sum_0^\infty 2^{6n}|\Delta\tilde{C}_{6n+3}|\,\left|(\tilde{x}^*-x)^{6n}\right|+$$

$$+\sum_0^\infty 2^{6n+1}|\Delta\tilde{C}_{6n+4}|\,\left|(\tilde{x}^*-x)^{6n+1}\right|+\sum_0^\infty 2^{6n+2}|\Delta\tilde{C}_{6n+5}|\,\left|(\tilde{x}^*-x)^{6n+2}\right|+$$

$$+\sum_0^\infty 2^{6n+3}|\Delta\tilde{C}_{6n+6}|\,\left|(\tilde{x}^*-x)^{6n+3}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_0^\infty 2^{6n-2}\frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^n}{(6n-2)(6n-3)(6n-4)+120}|(\tilde{x}^*-x)^{6n-2}|+$$

$$+\sum_0^\infty 2^{6n-1}\frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^n}{(6n-1)(6n-2)(6n-3)+120}|(\tilde{x}^*-x)^{6n-1}|+$$

$$+\sum_0^\infty 2^{6n}\frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^n}{6n(6n-1)(6n-2)+120}|(\tilde{x}^*-x)^{6n}|+$$

$$+\sum_0^\infty 2^{6n+1}\frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^n}{(6n+1)6n(6n-1)+120}|(\tilde{x}^*-x)^{6n+1}|+$$

$$+\sum_0^\infty 2^{6n+2}\frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^n}{(6n+2)(6n+1)6n+120}|(\tilde{x}^*-x)^{6n+2}|+$$

$$+\sum_0^\infty 2^{6n+3}\frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^{n+1}}{(6n+3)(6n+2)(6n+1)+120}|(\tilde{x}^*-x)^{6n+3}|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^{-2}\Delta M|\tilde{x}^*-x|^{-2}}{1-2^6(M+\Delta M+1)|\tilde{x}^*-x|^6}+\frac{2^{-1}\Delta M|\tilde{x}^*-x|^{-1}}{1-2^6(M+\Delta M+1)|\tilde{x}^*-x|^6}+$$

$$+\frac{\Delta M}{1-2^6(M+\Delta M+1)|\tilde{x}^*-x|^6}+\frac{2\Delta M|\tilde{x}^*-x|}{1-2^6(M+\Delta M+1)|\tilde{x}^*-x|^6}+$$

$$+\frac{2^2\Delta M|\tilde{x}^*-x|^2}{1-2^6(M+\Delta M+1)|\tilde{x}^*-x|^6}+\frac{2^3\Delta M|\tilde{x}^*-x|^3(M+\Delta M+1)}{1-2^6(M+\Delta M+1)|\tilde{x}^*-x|^6}=$$

$$=\frac{\Delta\tilde{x}^*\Delta M}{1-2^6(M+\Delta M+1)|\tilde{x}^*-x|^6}\left(2^{-2}|\tilde{x}^*-x|^{-2}+2^{-1}|\tilde{x}^*-x|^{-1}+\right.$$

$$+1+2|\tilde{x}^*-x|+2^2|\tilde{x}^*-x|^2+2^3|\tilde{x}^*-x|^3(M+\Delta M+1)\big).$$

Окончательно для Δ_2 получаем оценку

$$\Delta_2 \leqslant \frac{\Delta\tilde{x}^*\Delta M}{1-2^6(M+\Delta M+1)\alpha^6}\left(2^{-2}\alpha^{-2}+2^{-1}\alpha^{-1}+1+2\alpha+2^2\alpha^2+2^3\alpha^3(M+\Delta M+1)\right).$$

При оценке Δ_3 воспользуемся результатом доказанной теоремы об априорной погрешности аналитического приближенного решения [2], на основании которого в случае $N+1=6n$ имеем

$$\Delta_3 \leqslant \frac{(M+1)^{\frac{N+1}{6}}\alpha^{N-1}}{1-(M+1)\alpha^6}\left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120}+\right.$$
$$+\frac{\alpha}{(N-1)(N-2)(N-3)+120}+\frac{\alpha^2}{N(N-1)(N-2)+120}+\frac{\alpha^3}{(N+1)N(N-1)+120}+$$
$$\left.+\frac{\alpha^4}{(N+1)(N+2)N+120}+\frac{\alpha^5}{(N+1)(N+3)(N+2)+120}\right),$$

а так же для случая $N+1=6n+1$:

$$\Delta_3 \leqslant \frac{(M+1)^{\frac{N}{6}}\alpha^{N+1}}{1-(M+1)\alpha^6}\left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120}+\right.$$
$$+\frac{\alpha}{(N-1)(N-2)(N-3)+120}+\frac{\alpha^2}{N(N-1)(N-2)+120}+\frac{\alpha^3}{(N+1)N(N-1)+120}+$$
$$\left.+\frac{\alpha^4}{(N+1)(N+2)N+120}+\frac{\alpha^5}{(N+1)(N+3)(N+2)+120}\right),$$

для варианта $N+1=6n+2$ следует

$$\Delta_3 \leqslant \frac{(M+1)^{\frac{N-1}{6}}\alpha^{N+1}}{1-(M+1)\alpha^6}\left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120}+\right.$$
$$+\frac{\alpha}{(N-1)(N-2)(N-3)+120}+\frac{\alpha^2}{N(N-1)(N-2)+120}+\frac{\alpha^3}{(N+1)N(N-1)+120}+$$
$$\left.+\frac{\alpha^4}{(N+1)(N+2)N+120}+\frac{\alpha^5}{(N+1)(N+3)(N+2)+120}\right),$$

при $N+1=6n+3$ будем иметь

$$\Delta_3 \leqslant \frac{(M+1)^{\frac{N-2}{6}}\alpha^{N+1}}{1-(M+1)\alpha^6}\left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120}+\right.$$
$$+\frac{\alpha}{(N-1)(N-2)(N-3)+120}+\frac{\alpha^2}{N(N-1)(N-2)+120}+\frac{\alpha^3}{(N+1)N(N-1)+120}+$$
$$\left.+\frac{\alpha^4}{(N+1)(N+2)N+120}+\frac{\alpha^5}{(N+1)(N+3)(N+2)+120}\right),$$

для случая $N+1=6n+4$ получаем

$$\Delta_3 \leqslant \frac{(M+1)^{\frac{N-3}{6}}\alpha^{N+1}}{1-(M+1)\alpha^6}\left(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120}+\right.$$
$$+\frac{\alpha}{(N-1)(N-2)(N-3)+120}+\frac{\alpha^2}{N(N-1)(N-2)+120}+\frac{\alpha^3}{(N+1)N(N-1)+120}+$$

$$+\frac{\alpha^4}{(N+1)(N+2)N+120}+\frac{\alpha^5}{(N+1)(N+3)(N+2)+120}\Bigg),$$

а при условии, что $N+1=6n+5$ справедлива оценка

$$\Delta_3 \leqslant \frac{(M+1)^{\frac{N-4}{6}}\alpha^{N+1}}{1-(M+1)\alpha^6}\Bigg(\frac{1}{(N-2)(N-3)(N-4)+120}+$$

$$+\frac{\alpha}{(N-1)(N-2)(N-3)+120}+\frac{\alpha^2}{N(N-1)(N-2)+120}+\frac{\alpha^3}{(N+1)N(N-1)+120}+$$

$$+\frac{\alpha^4}{(N+1)(N+2)N+120}+\frac{\alpha^5}{(N+1)(N+3)(N+2)+120}\Bigg),$$

при этом

$$\rho_2=\min\left\{\rho_1,\frac{1}{\sqrt[6]{M+1}}\right\},\quad M=\max\left\{\sup_n\left\{\frac{|r^{(n)}(\tilde{x}^*)|}{n!}\right\},|y_0|,|y_1|,|y_2|\right\}.$$

Теорема доказана. $\square$

3. Численный эксперимент. Рассмотрим задачу Коши (1)–(2): $r(x)\equiv 0$, $y(0)=$ $=100$, $y'(0)=75$, $y''(0)=90$, с приближенным значением возмущенной подвижной особой точки $\tilde{x}^*=0{,}9962$, $\Delta\tilde{x}^*=0{,}0002$. Рассматривается структура приближенного решения (4) $\tilde{y}_N$, где x_1 соответствует области указанной в теореме при $\rho_2=0{,}354$. Значения численного расчета задачи Коши (1)–(2) приведены в табл. 1, где $\tilde{y}_9(x_1)$ — аналитически приближенное решение (4); Δ — априорная оценка погрешности, полученная по теореме 1; Δ_1 — апостериорная оценка.

Таблица 1. Результаты численного расчета для аналитически приближенного решения

x_1	$\tilde{y}_9(x_1)$	Δ	Δ_1
0,7	2306,98928	0,0007	0,00005

Для $\Delta_1=0{,}00005$ в структуре приближенного решения (4) требуется $N=12$. Так как слагаемые с 10 по 12 в структуре приближенного решения не превышают $\varepsilon=$ $0{,}00005$, то можно утверждать, что значение аналитического приближенного решения $\tilde{y}_9(x_1)$ имеет точность $\varepsilon=0{,}00005$.

4. Заключение. В статье дано развитие теории нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особенностями. Представлено исследование задачи о влиянии погрешности подвижной особой точки на структуру аналитического приближенного решения. Полученные результаты подтверждены численными расчетами и оптимизированы с помощью апостериорной оценки. Представленные исследования являются одним из этапов в развитии теории нелинейных дифференциальных уравнений и их приложений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Feng Y. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. no. 56. P. 2507–2514.

[2] Орлов В. Н., Гасанов М. В. Теорема существования решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка с полиномиальной правой частью седьмой степени в окрестности подвижной особой точки // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 1(43). С. 92–99. doi: 10.37972/chg.pu.2020.43.1.011 18.

[3] Гасанов М. В. Тестирование одного класса нелинейного дифференциального уравнений в окрестности подвижной особой точки // Сб. науч. тр. по мат. XXVII Междунар. науч. конф. “Научные тенденции: вопросы точных и технических наук” (2020 г.). doi: 10.18411/sciencepublic-12-05-2020-06, idsp: sciencepublic-12-05-2020-06.
[4] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modelling the complex structures // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. no. 365. doi: 10.1088/1757-899X/365/4/042045.
[5] Orlov V. N., Zheglova Y. G. Mathematical modeling of building structures and nonlinear differential equations // Int. J. of Modeling, Simulation and Scientific Computing. 2020. Vol. 11, no. 3, 2050026. World Scientific Publishing Company. doi: 10.1142/S1793962320500269.
[6] Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk, E. P. Linnik et al. // Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. nauki [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.]. 2018. no. 4. P. 24–35. (in Russ.) doi: 10.18698/1812-3368-2018-4-24-35.
[7] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2018. no. 456. 012122 IOP Publishing. doi: 10.1088/1757-899X/456/1/012122.
[8] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions // E3S Web Conf. 2019. no. 97. 03031. XXII Int. Sci. Conf. “Construction the Formation of Living Environment” (FORM-2019). doi: https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199703031.
[9] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // IOP Conf. Series: Journal of Physics. 2020. Conf. Series 1425 012127. IOP Publishing. doi: https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199703036.
[10] Orlov V. N., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order // IOP Conf. Series: Journal of Physics. 2020. Conf. Series 1425 012129. IOP Publishing. doi: 10.1088/1742-6596/1425/1/012129.
[11] Орлов В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. Москва: МПГУ, 2013. 174 с.
[12] Орлов В. Н. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2009. № 4(35). С. 23–32.
[13] Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. О расширении области для аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2020. Т. 2. doi:10.14498/vsgtu1727.
[14] Ив Б. Б. Теорема существования решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка с полиномиальной правой частью второй степени в окрестности подвижной особой точки // Вестник Башкирского университета. 2018. Т. 23, № 4. С. 980–986. doi: https://doi.org/10.33184/bulletin-bsu-2018.4.6.

T. S. Aleroev, M. V. Gasanov

INDIGNATION MOVING SINGULARITY AND ANALYTICAL APPROXIMATE SOLUTION OF A NONLINEAR THIRD-ORDER EQUATIONS

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract. This paper presents a study of one class of nonlinear differential equations with movable singular points. On the basis of the previously proved theorem of existence and uniqueness of the solution, the structure of the analytical approximate solution was obtained, for which, in this work, the influence of the perturbation of a moving singular point was established. Results are tested using a numerical experiment. To optimize the prior estimates, the posterior estimate was used.

Keywords: wave processes, elastic beam, nonlinear differential equations, moving singular point, analytical approximate solution, a priori estimate.

REFERENCES

[1] Feng Y. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. no. 56. P. 2507–2514.

[2] Orlov V. N., Gasanov M. V. Existence theorem for a solution of a class of nonlinear differential equations of the third order with a polynomial right-hand side of the seventh degree in a neighborhood of a moving singular point // Bulletin of ChGPU im. I. Ya. Yakovleva. Series: Limit State Mechanics. 2020. no. 1(43). P. 92–99. (in Russian). doi: 10.37972/chg.pu.2020.43.1.011 18.

[3] Gasanov M. V. Testing one class of nonlinear differential equations in the vicinity of a moving singular point // Collection of scientific papers based on the materials of the XXVII international scientific conference "Scientific trends: Questions of exact and technical sciences" (2020). (in Russian). doi: 10.18411/sciencepublic-12-05-2020-06, idsp: sciencepublic-12-05-2020-06.

[4] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modelling the complex structures // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. no. 365. doi: 10.1088/1757-899X/365/4/042045.

[5] Orlov V. N., Zheglova Y. G. Mathematical modeling of building structures and nonlinear differential equations // Int. J. of Modeling, Simulation and Scientific Computing. 2020. Vol. 11, no. 3, 2050026. World Scientific Publishing Company. doi: 10.1142/S1793962320500269.

[6] Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk, E. P. Linnik et al. // Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. nauki [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.]. 2018. no. 4. P. 24–35. (in Russian). doi: 10.18698/1812-3368-2018-4-24-35.

[7] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2018. no. 456. 012122 IOP Publishing. doi: 10.1088/1757-899X/456/1/012122.

[8] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions // E3S Web Conf. 2019. no. 97. 03031. XXII Int. Sci. Conf. "Construction the Formation of Living Environment" (FORM-2019). doi: https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199703031.

[9] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // IOP Conf. Series: Journal of Physics. 2020. Conf. Series 1425 012127. IOP Publishing. doi: https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199703036.

[10] Orlov V. N., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order // IOP Conf. Series: Journal of Physics. 2020. Conf. Series 1425 012129. IOP Publishing. doi: 10.1088/1742-6596/1425/1/012129.

[11] Orlov V. N. Method of approximate solution of the first, second differential equations of Painlevé and Abel. Moscow: MPGU, 2013. 174 p. (in Russian).

[12] Orlov V. N. Investigation of the approximate solution of the differential Abel equation in the vicinity of a moving singular point // Vestnik MGTU im. N. E. Bauman. Series: Natural Sciences. 2009. no. 4(35). P. 23–32. (in Russian).

[13] Orlov V. N., Leontyeva T. Y. On the expansion of the domain for the analytical approximate solution of one class of nonlinear differential equations of the second order in the complex domain // Bulletin of the Samara State tech. university. Ser.: Phys.-mat. Science. 2020. Vol. 2. (in Russian). doi:10.14498/vsgtu1727.

[14] Yves B. B. Existence theorem for a solution of one class of nonlinear differential equations of the fourth order with polynomial right-hand side of the second degree in the vicinity of a moving singular point // Bulletin of the Bashkir University. 2018. Vol. 23, no. 4. P. 980–986. (in Russian). doi: https://doi.org/10.33184/bulletin-bsu-2018.4.6.

Aleroev Temirkhan Sultanovich, Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

Gasanov Magomedyusuf Vladimirovich, Teacher, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.