

О. П. Ткаченко

УСЛОВИЯ СОПРЯЖЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТРУБОПРОВОДА С ИЗЛОМОМ ПРОФИЛЯ

Вычислительный центр ДВО РАН, г. Хабаровск, Россия

Аннотация. Сформулирована замкнутая краевая задача расчета напряженно-деформированного состояния трубопровода как оболочки Власова с линией излома поверхности. Выведены разрешающие уравнения оболочки в перемещениях в избранной криволинейной системе координат; в локальных координатах, связанных с линией излома, выведены кинематические условия сопряжения; на линии излома поверхности наложены и доказаны условия сопряжения для моментов и усилий в оболочке. Условия сопряжения выведены в перемещениях оболочки на линии излома, не являющейся координатной линией. Доказано наличие сингулярности в условиях сопряжения. Установлена согласованность результатов численного анализа с известными результатами.

Ключевые слова: оболочка, линия излома, сингулярность, трубопровод, напряженно-деформированное состояние.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.003

УДК: 539.384

Введение

Современные трубопроводы содержат системы труб, соединенные между собой многочисленными стыками и врезками. Расчет напряжений в этих соединениях, а также при их ослаблении, представляет собой сложную научно-техническую задачу [1]. Изломы профиля трубопровода происходят и под действием смещения грунта вследствие землетрясения, см., например [2].

Таким образом, задачи расчета напряженно-деформированного состояния трубы в окрестности мест излома профиля трубопровода актуальны.

Вопрос о целесообразности рассмотрения труб как оболочек был поднят в статье [3]. Были установлены пределы применимости стержневой и оболочечной моделей для одного класса задач о трубопроводах, а именно, проблеме туннелирования, когда труба непосредственно укладывается в грунт. Было указано на ограничения стержневой

© Ткаченко О. П., 2020

Ткаченко Олег Павлович

e-mail: olegt1964@gmail.com, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Вычислительный центр ДВО РАН, г. Хабаровск, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 21-11-00039.

Поступила 06.05.2020

модели для рассмотренного круга задач, так как в сущности трубопровод представляет собой трехмерную структуру, со всех сторон окруженную внешней средой.

Эта дискуссия о пределах применимости различных математических моделей для подземных трубопроводов была продолжена в статье [2]. В этой работе был исследован излом трубопровода при обратном сдвиге грунта, его пределы прочности и закритическое поведение, что невозможно было бы сделать по стержневой модели.

При наличии в оболочке линий излома возникают области концентрации напряжений. Одним из первых проблему корректного наложения условий сопряжения на линии излома исследовал А.Л. Гольденвейзер, см. монографию [4]. В этом труде рассматривается соединение двух оболочек по острому углу, в отличие от плавно сопряженных оболочек, рассмотренных в [5]. В труде [4] установлено, что задача формулировки корректных условий сопряжения на линиях излома поверхностей оболочек не является тривиальной, и развиваются асимптотические методы ее решения.

Позднее были предприняты многочисленные попытки улучшить теорию врезки труб в рамках теории пологих оболочек для различных соотношений r/R . Например, в работе [6] выполнен анализ напряжений для цилиндрических оболочек с нормально пересекающимися соплами, подвергающихся моментным нагрузкам на концах оболочек с соотношением диаметров $r/R \leq 0.8$. Решение в терминах функции перемещений основано на уравнениях Гольденвейзера, это решение в главном компоненте основано на мембранной теории оболочек.

Современным направлением является развитие математических моделей труб, содержащих жидкость, как оболочек Коитера слабой регулярности. Это направление развито в работе J. Тамбаца [7]. Поверхность оболочки в этом случае параметризована функцией из $W^{1,\infty}$. В недеформированной геометрии моделируемого объекта углы содержатся в постановке задачи. Эта новая модель связана с известными моделями оболочки двумя способами. В первом показано, что асимптотически модель ведет себя как модель мембраны или модель изгибающей оболочки в соответствующем режиме. Во втором способе члены в слабой формулировке модели связываются с членами в классической модели оболочки Нагди для достаточно гладких участков средней поверхности. Здесь возможно использовать идею А.Л. Гольденвейзера [4] о суммировании напряженно-деформированного состояния оболочки из мембранного и изгибающего напряженного состояния, так как имеем оболочку Коитера [8].

Идеи теории оболочек Коитера и Нагди слабой регулярности применены в статье [9]. Эта работа посвящена взаимодействию жидкости со структурой (FSI) между изогнутой коронарной артерией с имплантированным стентом, пульсирующим кровотоком и сокращением сердца. Это вычислительное исследование, в котором поведение различных геометрий стентов, имплантированных в изогнутые коронарные артерии, изучается с использованием полного FSI.

Как правило, публикации по тематике врезки в трубопроводах развивают смешанный подход к исследованию стыковых соединений оболочек. При этом подходе уравнения и условия сопряжения содержат как перемещения, так и силовые факторы. Это позволяет не исследовать особенности напряжений, возникающие в местах стыка, не сталкиваясь с трудностями, описанными в [7, 9]. Но, как известно из теории упругости [10], в вершинах входящих углов функции, описывающие напряжения и деформации, имеют особенности. Очевидно, что эти особенности должны присутствовать и в математической модели металлической трубы как оболочки. Для построения такой модели

необходимо придерживаться единого подхода к выводу уравнений и условий сопряжения, при котором они будут содержать в качестве неизвестных функций либо только напряжения, либо перемещения. Подход, при котором неизвестными функциями являются перемещения, развит в работах W.T. Koiter [8] и В.З. Власова [11].

Ранее была построена и численно проанализирована математическая модель трубопровода как полубезмоментной цилиндрической оболочки, изогнутой по своей образующей [12]. Помимо этого, изучены колебания различных изогнутых трубопроводов, рассматриваемых как оболочки [13, 14]. Построена математическая модель трубопровода как моментной оболочки с плавным изгибом осевой линии [15]. Там же предложен алгоритм поиска приближенных решений уравнений этой модели, позволяющий свести задачу к одномерной постановке.

Заметим, что в ранее созданной модели [15] параметр кривизны осевой линии был малым параметром, и по нему проводилось разложение решения в асимптотический ряд. Сейчас этот параметр, напротив, стремится к бесконечности в окрестности линии излома, что дает особенность в самой постановке задачи.

Целью данной работы является построение математической модели трубопровода как полностью моментной оболочки Коитера-Власова с линиями излома поверхности в местах контакта сегментов трубопровода. Главная проблема — нахождение условий сопряжения на линии излома, при условии, что эти линии не совпадают с координатными линиями.

Были поставлены задачи:

1. Вывести уравнения равновесия системы труб как пересекающихся по линии излома моментных оболочек Власова.
2. Выразить усилия на косых сечениях трубы как функции перемещений оболочки.
3. Наложить условия сопряжения на линии стыка труб для перемещений и угла поворота нормали.
4. Наложить условия сопряжения для изгибающих моментов, сдвиговых усилий, поперечных и нормальных усилий.

Также было показано наличие точек особенности решения на линии соединения сегментов трубопровода, как теоретически, так и на численном примере.

1. Геометрические свойства системы

Моделируемый объект представляет собой две цилиндрические металлические трубы, соединенные под прямым углом. Обе трубы имеют одинаковые радиусы и толщину стенки.

Обозначим:

h — толщина стенки трубы; R_i — внутренний радиус трубы; R_e — внешний радиус трубы; L_1, L_2 — длины первого и второго участков труб вдоль осевой линии, соответственно; $R_0 = 0.5(R_e + R_i)$ — радиус срединной поверхности трубы; \mathcal{L} — линия пересечения срединных поверхностей двух труб.

Под пересечением труб далее понимается поверхность стыкового соединения двух цилиндрических труб, или линия стыкового соединения их срединных поверхностей, в зависимости от контекста.

Соединенные участки трубопровода ниже называются сегментами ① и ②.

Введем декартову систему координат $(O; x, y, z)$, начало O которой совместим с одним из торцев соединенных труб. При этом плоскость (y, O, z) совпадает с плоскостью торца, которому принадлежит начало координат, рис. 4(а).

Следовательно, ось (Ox) совпадает с осевой линией сегмента ①. Уравнение осевой линии сегмента ② следует из элементарной геометрии:

$$x = L_1 \quad (1)$$

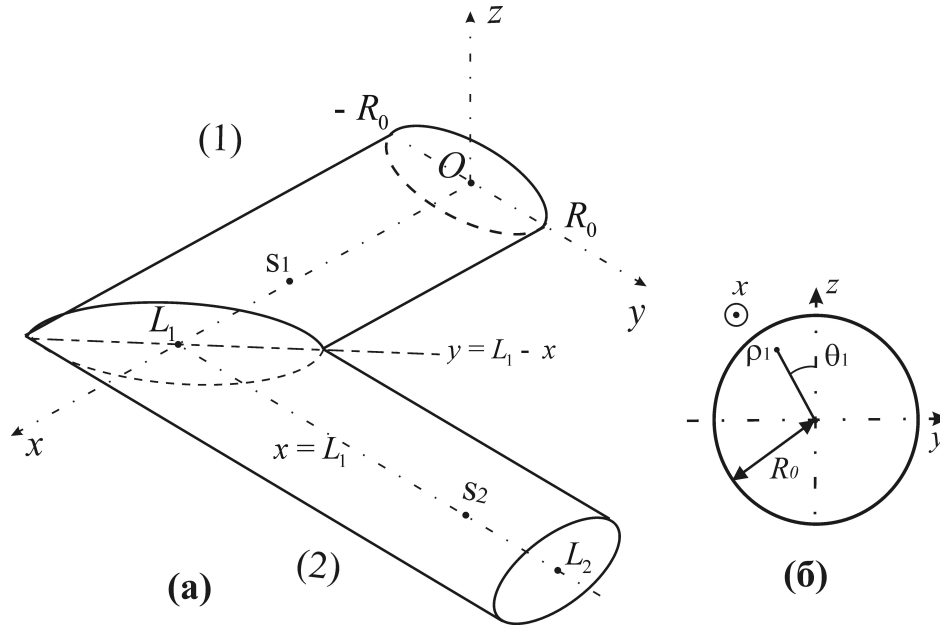


Рис. 1. Глобальные декартовы координаты для трубы со стыком. Две системы цилиндрических координат и полярные координаты в поперечном сечении трубы.

Для каждого сегмента мы введем отдельную цилиндрическую систему координат, рис. 4(б).

Очевидно, что в декартовых координатах уравнение плоскости пересечения сегментов имеет вид:

$$x + y - L_1 = 0. \quad (2)$$

Из (1), (2) и формул связи цилиндрических и декартовых координат [16] последовательно получим следующие геометрические соотношения.

Формулы связи декартовых и цилиндрических координат:

Сегмент ①, рис. 4(б):

$$x = s_1, \quad y = -\rho_1 \sin \theta_1, \quad z = \rho_1 \cos \theta_1; \quad x \leq L_1 - y, \quad s_1 \leq L_1 + \rho_1 \sin \theta_1. \quad (3)$$

Сегмент ②:

$$x = L_1 + \rho_2 \sin \theta_2, \quad y = s_2, \quad z = \rho_2 \cos \theta_2; \quad y \geq L_1 - x, \quad s_2 \geq -\rho_2 \sin \theta_2. \quad (4)$$

Заметим, что (3), (4) включают ограничения на декартовы координаты срединной поверхности. На срединной поверхности выполнены соотношения: $\rho_i = R_0$, где $i = 1, 2$.

Отсюда следуют выражения для радиус-векторов точек трубы:

Сегмент ①:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{i}s_1 - \mathbf{j}\rho_1 \sin \theta_1 + \mathbf{k}\rho_1 \cos \theta_1.$$

Сегмент ②:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{i}(L_1 + \rho_2 \sin \theta_2) + \mathbf{j}s_2 + \mathbf{k}\rho_2 \cos \theta_2.$$

Фиксируя нумерацию криволинейных координат:

$$x_1 = s, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \rho, \quad (5)$$

и находя единичные векторы базиса криволинейной системы координат по формулам [17], получим единичные векторы базиса:

Сегмент ②:

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{i} \cos \theta_2 - \mathbf{k} \sin \theta_2, \quad \mathbf{e}_3^2 = \mathbf{i} \sin \theta_2 + \mathbf{k} \cos \theta_2. \quad (6)$$

Сегмент ①:

$$\mathbf{e}_1^1 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{e}_2^1 = -\mathbf{j} \cos \theta_1 - \mathbf{k} \sin \theta_1, \quad \mathbf{e}_3^1 = -\mathbf{j} \sin \theta_1 + \mathbf{k} \cos \theta_1. \quad (7)$$

Компоненты метрического тензора и коэффициенты Ламе равны [11, 17]:

$$\begin{aligned} g_{11}^{(i)} &= 1, & g_{22}^{(i)} &= \rho_i^2, & g_{33}^{(i)} &= 1; \\ g^{11(i)} &= 1, & g^{22(i)} &= \frac{1}{\rho_i^2}, & g^{33(i)} &= 1; \end{aligned} \quad (8)$$

$$H_1^{(i)} = 1, \quad H_2^{(i)} = \rho_i, \quad H_3^{(i)} = 1; \quad i = 1, 2.$$

Из (8) при $\rho_i = R_0$ следуют формулы для коэффициентов первой квадратичной формы срединных поверхностей $A^{(i)}$, $B^{(i)}$ и кривизн срединных поверхностей $k_1^{(i)}$, $k_2^{(i)}$ цилиндрических труб:

$$\begin{aligned} A^{(i)} &= 1, & B^{(i)} &= R_0; \\ k_1^{(i)} &= 0, & k_2^{(i)} &= R_0; \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (9)$$

В формулах (6)–(9) верхним индексом обозначен номер сегмента.

Известно, что пересечением двух цилиндров с круглым поперечным сечением является эллипс [16]. Проекция этого эллипса изображена на рис. 4(а), в плоскости контакта срединных поверхностей цилиндров $y = L_1 - x$. Рассмотрим линию пересечения срединных поверхностей труб \mathcal{L} .

Отметим условие единственности точки на линии пересечения:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta. \quad (10)$$

Из уравнения плоскости сечения (2), уравнений для координаты z (3), (4), уравнения для координаты y (3) и условия (10) следует

Предложение 1. *Параметрические уравнения линии пересечения срединных поверхностей труб с параметром θ в выбранной декартовой системе отсчета имеют вид:*

$$x = L_1 + R_0 \sin \theta, \quad y = -R_0 \sin \theta, \quad z = R_0 \cos \theta. \quad (11)$$

Из условия (10), уравнения (2) и соотношений (3), (4) следует

Предложение 2. *Параметрические уравнения линии пересечения срединных поверхностей труб с параметром θ в предложенных цилиндрических системах координат имеют вид:*

$$\begin{aligned} \rho_1 &= R_0, & \rho_2 &= R_0; \\ \theta_1 &= \theta, & \theta_2 &= \theta; \\ s_1 &= L_1 + R_0 \sin \theta, & s_2 &= -R_0 \sin \theta. \end{aligned} \quad (12)$$

Из геометрических свойств поверхности стыка труб следует, что единичные векторы внешней нормали к i -му сегменту, $i = 1, 2$, на этой поверхности выражаются формулами:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}, \\ \vec{v}_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.\end{aligned}\tag{13}$$

Для линии \mathcal{L} по правилам аналитической геометрии [16] и по формулам (10)–(12) найдены три взаимно перпендикулярных характеристических вектора. Это векторы касательной \mathbf{t} , нормали \mathbf{n} и бинормали \mathbf{b} к линии соединения \mathcal{L} , здесь они определяются по формулам:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}} (\cos \theta \mathbf{i} - \cos \theta \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}),\tag{14}$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \cos^2 \theta}} (\sin \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} + 2 \cos \theta \mathbf{k}),\tag{15}$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.\tag{16}$$

2. Математическая модель трубы как оболочки

В разделе выведены уравнения математической модели распределения перемещений и деформаций в окрестности стыка двух труб. Каждая труба рассматривается как моментная цилиндрическая оболочка Власова [11], разрешающие уравнения которой записаны в перемещениях.

Предполагается, что $h/R_0 \leq 1/20$; и величины $\sim O(h^3/R_0^3)$ пренебрежимо малы.

Алгоритм построения математической модели изложен в [11, 12].

Введем обозначения:

ε^{ij} — контравариантные компоненты тензора деформаций;

x_i — координаты, введенные равенствами (5);

∇_i — оператор ковариантного дифференцирования;

w^i — контравариантные компоненты вектора перемещения материальной точки;

ε_p^{ij} , w_p^i — физические компоненты тензора деформаций и вектора перемещений в смысле [17];

σ_{ij} — физические компоненты тензора напряжений;

Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля [17];

X_i , Y_i , Z_i — компоненты внешней силы, действующей на оболочку;

u_i , v_i , w_i — компоненты вектора перемещения срединной поверхности i -того сегмента.

Для i -того сегмента трубопровода обозначим:

$$\begin{aligned}\gamma^{(i)} &= \rho_i - R_0, \quad -h/2 \leq \gamma^{(i)} \leq h/2; \\ u_i &= w_p^{1(i)}(\gamma^{(i)} = 0), \quad v_i = w_p^{2(i)}(\gamma^{(i)} = 0); \\ w_i &= w_p^{3(i)}(\gamma^{(i)} = 0); \quad i = 1, 2.\end{aligned}\tag{17}$$

Равенствами (17) определяются перемещения срединной поверхности трубы и координата отсчета по толщине трубы γ .

Выражения для компонент тензора деформаций через перемещения во введенных системах координат найдены по формулам (5.47), (5.58) главы II, (3.9) главы IV из монографии [17]:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ij} &= \frac{1}{2} (g^{ii} \nabla_i w^j + g^{jj} \nabla_j w^i); \\ \nabla_i w^k &= \frac{\partial w^k}{\partial x_i} + w^j \Gamma_{ji}^k; \\ \varepsilon_p^{ij} &= \varepsilon^{ij} \sqrt{g_{ii} g_{jj}}, \quad w_p^i = w^i \sqrt{g_{ii}}.\end{aligned}\tag{18}$$

В последней строке отсутствует суммирование по i, j .

Из (18) получены формулы для физических компонент тензора деформаций:

$$\begin{aligned}\varepsilon_p^{11} &= \frac{\partial w_p^1}{\partial s_i}; \quad \varepsilon_p^{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_p^2}{\partial s_i} + \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial w_p^1}{\partial \theta_i} \right); \quad \varepsilon_p^{21} = \varepsilon_p^{12}; \\ \varepsilon_p^{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_p^3}{\partial s_i} + \frac{\partial w_p^1}{\partial \rho_i} \right); \quad \varepsilon_p^{31} = \varepsilon_p^{13}; \quad \varepsilon_p^{22} = \frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial w_p^2}{\partial \theta_i} + w_p^3 \right); \\ \varepsilon_p^{23} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial w_p^3}{\partial \theta_i} - w_p^2 \right) + \frac{\partial w_p^2}{\partial \rho_i} \right]; \quad \varepsilon_p^{32} = \varepsilon_p^{23}; \quad \varepsilon_p^{33} = \frac{\partial w_p^3}{\partial \rho_i}.\end{aligned}\tag{19}$$

Для обоих сегментов трубопровода формулы (19) идентичны.

Раскладывая деформации в ряды по γ [11]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_p^{11} &= \varepsilon_1 + \kappa_1 \gamma + \varphi_1 \gamma^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \kappa_{1n} \gamma^n, \\ \varepsilon_p^{22} &= \varepsilon_2 + \kappa_2 \gamma + \varphi_2 \gamma^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \kappa_{2n} \gamma^n, \\ \varepsilon_p^{12} &= \omega + \tau \gamma + \psi \gamma^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \tau_n \gamma^n,\end{aligned}$$

получим выражения для коэффициентов разложений, которые приведены в Ч. II монографии [11], формулы (7.11'), (7.11'').

В аналогичные ряды разложим первый инвариант тензора деформаций:

$$I(\varepsilon) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial s} (H_2 H_3 w_p^1) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H_3 H_1 w_p^2) + \frac{\partial}{\partial \rho} (H_1 H_2 w_p^3) \right]$$

и линейное кручение стенки:

$$\mathcal{X} = \frac{1}{2H_1 H_2} \left(\frac{\partial}{\partial s} (H_2 w_p^2) - \frac{\partial}{\partial \theta} (H_1 w_p^1) \right).$$

Эти ряды имеют вид:

$$\begin{aligned}I(\varepsilon) &= I_1 + I_1 \gamma + I_2 \gamma^2 + \sum_{n=3}^{\infty} I_n \gamma^n, \\ \mathcal{X} &= \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_1 \gamma + \mathcal{X}_2 \gamma^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \mathcal{X}_n \gamma^n.\end{aligned}$$

Аналогично предыдущему, получим формулы (7.13'), (7.13'') Ч. II монографии [11].

Не переписывая уравнений, известных из литературы, отметим, что далее следует выписать уравнения (10.4), (10.5) из [11], которые являются полной математической моделью для произвольной оболочки.

Затем следует учесть значения величин $A^{(i)}$, $B^{(i)}$ (9) в общих уравнениях оболочки, выполняя подстановку величин I , \mathcal{X} , и приводя подобные относительно физических компонент вектора перемещения оболочки. Тем самым докажем следующее

Предложение 3. *Разрешающие уравнения математической модели напряженно-деформированного состояния стенки трубы как моментной оболочки в предложенных координатах (5) имеют вид:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i}{\partial s_i^2} + \frac{1-\nu}{2R_0^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta_i^2} + \frac{1+\nu}{2R_0} \frac{\partial^2 v_i}{\partial s_i \partial \theta_i} + \frac{\nu}{R_0} \frac{\partial w_i}{\partial s_i} - \frac{h^2}{12R_0} \frac{\partial^3 w_i}{\partial s_i^3} + \frac{(1-\nu)h^2}{24R_0^3} \frac{\partial^3 w_i}{\partial s_i \partial \theta_i^2} + \frac{1-\nu^2}{Eh} X_i = 0, \\ \frac{1+\nu}{2R_0} \frac{\partial^2 u_i}{\partial s_i \partial \theta_i} + \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial \theta_i^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial s_i^2} + \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial w_i}{\partial \theta_i} - \\ - \frac{3-\nu}{2} \frac{h^2}{12R_0^2} \frac{\partial^3 w_i}{\partial \theta_i \partial s_i^2} + \frac{1-\nu^2}{Eh} Y_i = 0, \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\nu \frac{\partial u_i}{\partial s_i} - \frac{1}{R_0} \frac{\partial v_i}{\partial \theta_i} - \frac{w_i}{R_0} + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial s_i^3} - \frac{2}{R_0^3} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta_i^2} + \frac{3-\nu}{2R_0} \frac{\partial^3 v_i}{\partial \theta_i \partial s_i^2} - \right. \\ \left. - \frac{1-\nu}{2R_0^2} \frac{\partial^3 u_i}{\partial s_i \partial \theta_i^2} \right) - \frac{h^2}{12} R_0 \left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial s_i^4} + \frac{2}{R_0^2} \frac{\partial^4 w_i}{\partial s_i^2 \partial \theta_i^2} + \frac{1}{R_0^4} \frac{\partial^4 w_i}{\partial \theta_i^4} \right) + R_0 \frac{1-\nu^2}{Eh} Z_i = 0. \end{aligned}$$

Количество краевых условий на каждом торце трубы как моментной оболочки равно четырем, как показано в [5]. Например, в [12] использованы условия жесткого закрепления:

$$\begin{aligned} u_2 = v_2 = w_2 = 0; \quad \frac{\partial w_2}{\partial s_2} = 0, \quad \text{при } s_2 = L_2; \\ u_1 = v_1 = w_1 = 0; \quad \frac{\partial w_1}{\partial s_1} = 0, \quad \text{при } s_1 = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Система шести уравнений в частных производных (20) с восемью краевыми условиями (21) не является замкнутой краевой задачей. Для замыкания задачи необходимо наложить условия сопряжения на линии соединения оболочек.

Как следует из теории моментных оболочек [4], этих условий должно быть восемь. Далее мы получим четыре кинематических (или геометрических) условия для перемещений, и четыре силовых условия для усилий и моментов на линии соединения оболочек.

3. Кинематические условия сопряжения

Обозначим \mathbf{u}_i — вектор перемещения срединной поверхности i -того сегмента, $i = 1, 2$. Эти векторы разложим по единичным векторам базиса (6), (7):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= u_1 \mathbf{e}_1^1 + v_1 \mathbf{e}_2^1 + w_1 \mathbf{e}_3^1, \\ \mathbf{u}_2 &= u_2 \mathbf{e}_1^2 + v_2 \mathbf{e}_2^2 + w_2 \mathbf{e}_3^2. \end{aligned}$$

Из этих выражений и формул (6), (7) следуют выражения для разложения перемещений сегментов оболочки по векторам глобальной декартовой системы отсчета:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_2 &= (v_2 \cos \theta_2 + w_2 \sin \theta_2) \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + (w_2 \cos \theta_2 - v_2 \sin \theta_2) \mathbf{k}, \\ \mathbf{u}_1 &= u_1 \mathbf{i} - (v_1 \cos \theta_1 + w_1 \sin \theta_1) \mathbf{j} + (w_1 \cos \theta_1 - v_1 \sin \theta_1) \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Геометрическое условие неразрывности перемещений на линии \mathcal{L} имеет вид:

$$(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{t}) = (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{t}), \quad (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}), \quad (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{b}). \quad (22)$$

Векторы \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} определены равенствами (14)–(16). Раскрывая скалярные произведения (22), докажем следующее предложение.

Предложение 4. *На линии пересечения \mathcal{L} двух срединных поверхностей цилиндрических труб, координаты точек которой описываются формулами (11), (12), выполнены следующие соотношения между компонентами векторов перемещений в криволинейных координатах (3), (4):*

$$\begin{aligned}v_2 - u_2 \cos \theta &= v_1 + u_1 \cos \theta, \\ -u_2 \sin \theta - v_2 \sin \theta \cos \theta + w_2 (1 + \cos^2 \theta) &= \\ &= u_1 \sin \theta - v_1 \sin \theta \cos \theta + w_1 (1 + \cos^2 \theta), \quad (23) \\ u_2 + v_2 \cos \theta + w_2 \sin \theta &= u_1 - v_1 \cos \theta - w_1 \sin \theta.\end{aligned}$$

Тем самым получены три из восьми условий сопряжения на линии соединения \mathcal{L} .

Замечание 1. Уравнения (22) можно переписать в проекциях на декартовы координаты. Это равносильно покомпонентному приравнению векторов перемещения:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2,$$

примененному совместно с условием (10). Форма записи (22) фактически означает переход от декартовых координат к координатам, связанным с тройкой сопровождающих векторов $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ кривой \mathcal{L} . Вид (22) представляется более предпочтительным, поскольку все изложение ведется в координатах, связанных с трубой. В распоряжении автора имеется доказательство эквивалентности обоих подходов.

Угол поворота нормали к срединной поверхности трубы определяется формулой [5]:

$$\vartheta^{(i)} = k_1^{(i)} u_i - \frac{\partial w_i}{\partial s_i}, \quad \text{где } i = 1, 2. \quad (24)$$

Здесь, как и ранее, через i обозначен номер сегмента трубопровода.

С разных сторон линии соединения оболочек знак углового параметра ϑ разный [5], поэтому условие сопряжения углов поворота нормали имеет вид:

$$\vartheta^{(1)} = -\vartheta^{(2)}. \quad (a)$$

Из условий на линии контакта (12) следуют формулы:

$$\begin{aligned}s_2 &= -R_0 \sin \theta, \quad s_1 = L_1 + R_0 \sin \theta; \\ \frac{\partial w_2}{\partial s_2} &= -\frac{\partial w_2}{\partial \theta} \frac{1}{R_0 \cos \theta}; \quad \frac{\partial w_1}{\partial s_1} = \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \frac{1}{R_0 \cos \theta}.\end{aligned} \quad (b)$$

Подставляя (24) в (a) и используя (b), докажем следующее положение.

Предложение 5. На линии пересечения \mathcal{L} (11) двух срединных поверхностей цилиндрических труб выполнено следующее соотношение в криволинейных координатах:

$$\frac{\partial w_1}{\partial \theta} = \frac{\partial w_2}{\partial \theta}. \quad (25)$$

Равенства (23), (25) из предложений 4, 5 содержат полный набор кинематических (геометрических) условий сопряжения на линии соединения срединных поверхностей цилиндрических труб с кольцевым поперечным сечением.

4. Силовые условия сопряжения

В данном разделе получено четыре условия сопряжения для силовых факторов в оболочке. Линия \mathcal{L} не совпадает с координатной линией, поэтому ниже используются понятия силовых факторов на косых сечениях [4]. Эти условия включают:

- (1) соотношение для изгибающих моментов M ;
- (2) соотношение для сдвигающих усилий S ;
- (3) два соотношения, связывающие нормальные N и перерезывающие Q усилия.

4.1. Силовые факторы на косых сечениях

Силовые факторы на нормальных сечениях (координатных площадках) определяются по формулам (11.1'), (11.1'') из монографии [11].

Замечание 2. Для понимания связи с [11] необходимо установить соответствия в обозначениях: M_1, M_2 – изгибающие моменты; M_{12}, M_{21} – крутящие моменты; N_1, N_2 – нормальные усилия; S_1, S_2 – сдвигающие усилия; Q_1, Q_2 – поперечные (перерезывающие) усилия.

Соответствие в обозначениях компонент тензора напряжений: $\sigma_{11} = \sigma_\alpha, \sigma_{22} = \sigma_\beta, \sigma_{12} = \tau_{\alpha\beta}, \sigma_{21} = \tau_{\beta\alpha}, \sigma_{31} = \tau_{\gamma\alpha}, \sigma_{32} = \tau_{\gamma\beta}$.

Физические компоненты тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_p^{ij} связаны законом Гука [17]. Выполняя переход к перемещениям оболочки, получим закон Гука для внутренних силовых факторов оболочки на нормальных сечениях в координатах (5):

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\nu}{R_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\nu}{R_0} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right]; \\ M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{R_0^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right]; \\ M_{12} &= \frac{Eh^3}{12R_0(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} \right); \\ M_{21} &= -\frac{Eh^3}{12R_0(1+\nu)} \left(\frac{1}{R_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{R_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{h^2}{12R_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} \right); \\
S_2 &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{R_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{h^2}{12R_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} \right); \\
N_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\nu}{R_0} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu \frac{w}{R_0} - \frac{h^2}{12R_0} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right); \\
N_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{R_0} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_0} + \frac{h^2}{12R_0^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right). \\
Q_1 &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{R_0^2} \left(\frac{1-\nu}{2R_0} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - R_0 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} + \frac{\partial^3 w}{\partial s \partial \theta^2} + R_0^2 \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \right); \\
Q_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{R_0^2} \left[(1-\nu)R_0 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - R_0 \frac{\partial^3 w}{\partial s^2 \partial \theta} - \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right].
\end{aligned} \tag{26}$$

Рассмотрим линию \mathcal{L} с касательным вектором \mathbf{t} , составляющим угол γ_i с координатной линией s_i . Углы между вектором \mathbf{t} (14) и координатными векторами \mathbf{e}_1^i (6), (7) можно вычислить по определению:

$$\begin{aligned}
\cos \gamma_2 &= (\mathbf{t}, \mathbf{e}_1^2) = -\frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}}; \\
\cos \gamma_1 &= (\mathbf{t}, \mathbf{e}_1^1) = \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}}; \\
\sin \gamma_1 &= \sin \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}}.
\end{aligned}$$

Силовые факторы на косом сечении, касательная линия которого составляет угол γ_i с вектором \mathbf{e}_1^i , можно найти по формулам, приведенным в [4] (в обозначениях (26)):

$$\begin{aligned}
S^{(i)} &= \left(N_1^{(i)} - N_2^{(i)} \right) \sin \gamma_i \cos \gamma_i - S_1^{(i)} \sin^2 \gamma_i + S_2^{(i)} \cos^2 \gamma_i; \\
N^{(i)} &= -N_1^{(i)} \sin^2 \gamma_i - N_2^{(i)} \cos^2 \gamma_i - \left(S_1^{(i)} + S_2^{(i)} \right) \sin \gamma_i \cos \gamma_i; \\
Q^{(i)} &= Q_1^{(i)} \sin \gamma_i + Q_2^{(i)} \cos \gamma_i; \\
H^{(i)} &= M_{12}^{(i)} \sin^2 \gamma_i - M_{21}^{(i)} \cos^2 \gamma_i + \left(M_1^{(i)} - M_2^{(i)} \right) \sin \gamma_i \cos \gamma_i; \\
M^{(i)} &= \left(M_{12}^{(i)} + M_{21}^{(i)} \right) \sin \gamma_i \cos \gamma_i - M_1^{(i)} \sin^2 \gamma_i - M_2^{(i)} \cos^2 \gamma_i.
\end{aligned} \tag{27}$$

Индекс i различает сегменты трубопровода. Через $M^{(i)}$, $S^{(i)}$, $N^{(i)}$, $H^{(i)}$, $Q^{(i)}$ обозначены изгибающий момент, сдвигающее усилие, нормальное усилие, крутящий момент и перерезывающее усилие, соответственно, на площадке с нормалью $\vec{\nu}_i$, которая определяется формулами (13).

4.2. Условия сопряжения для силовых факторов

Линия соединения \mathcal{L} определяется уравнениями (11) и векторами (14)–(16). Согласно [5], для изгибающих моментов и сдвигающих усилий условия сопряжения имеют вид:

$$M^{(1)} = M^{(2)}; \quad S^{(1)} = -S^{(2)}. \tag{28}$$

Выведем условия сопряжения для перерезывающих усилий $Q^{(i)}$ и нормальных усилий $N^{(i)}$.

Предложение 6. *Условие сопряжения на линии соединения \mathcal{L} для нормальных и поперечных усилий имеет вид:*

$$\begin{cases} -Q^{(2)}\sqrt{1+3\cos^2\theta} + N^{(2)}\sin\theta = N^{(1)}\sin\theta + Q^{(1)}\sqrt{1+3\cos^2\theta}; \\ -Q^{(2)}\sin\theta - N^{(2)}\sqrt{1+3\cos^2\theta} = N^{(1)}\sqrt{1+3\cos^2\theta} - Q^{(1)}\sin\theta. \end{cases} \quad (29)$$

Доказательство.

Представим, что поверхность оболочки рассечена по линии \mathcal{L} . В каждой точке кривой \mathcal{L} можно построить векторы \mathbf{n} , \mathbf{b} (15), (16) и координатные векторы \mathbf{e}_1^1 , \mathbf{e}_1^2 (6), (7) (см. рис. 2).

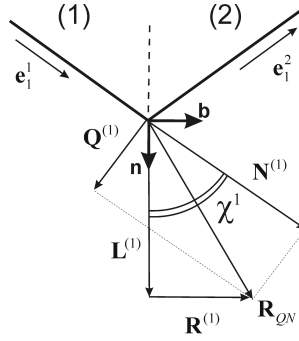


Рис. 2. Усилия в точке соединения сегментов трубопровода

Углы между векторами вычислены по определению:

$$\cos \mathcal{X}^i = (\mathbf{e}_1^i \cdot \mathbf{n}), \quad i = 1, 2.$$

Получим:

$$\begin{aligned} \cos \mathcal{X}^2 &= -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2\theta}}, & \sin \mathcal{X}^2 &= \sqrt{\frac{1+3\cos^2\theta}{2(1+\cos^2\theta)}}; \\ \cos \mathcal{X}^1 &= \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2\theta}}, & \sin \mathcal{X}^1 &= \sqrt{\frac{1+3\cos^2\theta}{2(1+\cos^2\theta)}}. \end{aligned} \quad (30)$$

На рис. 2 изображены внутренние силовые факторы $\mathbf{N}^{(1)}$, $\mathbf{Q}^{(1)}$, которые получены методом, известным из теории сопротивления материалов [18]. Эти усилия дают в сумме результирующую силу \mathbf{R}_{QN} . Сила \mathbf{R}_{QN} может быть разложена на компоненты вдоль направлений \mathbf{n} , \mathbf{b} . Эти компоненты разложения обозначены $\mathbf{L}^{(1)}$, $\mathbf{R}^{(1)}$, соответственно. Аналогично внутренние силовые факторы $\mathbf{L}^{(2)}$, $\mathbf{R}^{(2)}$ выделены справа от сечения линией \mathcal{L} .

Поскольку сила \mathbf{R}_{QN} на рис. 2 для сегментов слева и справа от сечения плоскостью кривой \mathcal{L} одна и та же, то и ее компоненты по направлениям \mathbf{n} , \mathbf{b} совпадают слева и справа:

$$L^{(1)} = L^{(2)}, \quad R^{(1)} = R^{(2)}. \quad (c)$$

Учитывая положительные и отрицательные направления силовых факторов $\mathbf{N}^{(i)}$, $\mathbf{Q}^{(i)}$, которые изображены на рис. 2 в соответствии с правилами знаков [18], получим скалярные выражения $L^{(i)}$, $R^{(i)}$ через $N^{(i)}$, $Q^{(i)}$:

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= N^{(1)} \cos \mathcal{X}^1 + Q^{(1)} \sin \mathcal{X}^1; \\ R^{(1)} &= N^{(1)} \sin \mathcal{X}^1 - Q^{(1)} \cos \mathcal{X}^1; \\ L^{(2)} &= -Q^{(2)} \sin \mathcal{X}^2 - N^{(2)} \cos \mathcal{X}^2; \\ R^{(2)} &= Q^{(2)} \cos \mathcal{X}^2 - N^{(2)} \sin \mathcal{X}^2. \end{aligned} \tag{d}$$

Подставим (d) в (c) и используем (30). В результате получим равенства (29).

Предложение доказано.

Замечание 3. Равенства (28), (29) являются полным набором силовых условий сопряжения на линии соединения оболочек \mathcal{L} . Формулы (27) выражают силовые факторы (28), (29) на косом сечении \mathcal{L} через силовые факторы на нормальных сечениях. Косое сечение \mathcal{L} определено вектором бинормали $\mathbf{b} = \vec{v}_1$ (13), (16). Силовые факторы на нормальных сечениях в правых частях (27) связаны с перемещениями оболочки законом Гука (26).

Выполним последовательную подстановку (27) \rightarrow (28), (29), затем в результат вычислений подставим (26), и получим силовые условия сопряжения в перемещениях оболочки. Таким образом, доказано

Предложение 7. При введенных предположениях о механической системе силовые условия сопряжения двух цилиндрических оболочек на линии соединения \mathcal{L} выражаются формулами:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} \left(2 + \frac{1}{\cos^2 \theta} + \cos^2 \theta \right) + \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \left((2 - \nu) \operatorname{tg} \theta + \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} \right) + \\ & + w_2 \cos^2 \theta - \frac{3 - \nu}{2} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{1 - \nu}{2} \cos \theta \right) = \\ & = \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} \left(2 + \frac{1}{\cos^2 \theta} + \cos^2 \theta \right) + \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \left((2 - \nu) \operatorname{tg} \theta + \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} \right) + \\ & + w_1 \cos^2 \theta - \frac{3 - \nu}{2} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \left(\frac{1 - \nu}{2} \cos \theta - \frac{1}{\cos \theta} \right). \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) - \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \left(\cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{2 \cos \theta} \right) - \frac{h^2}{24R_0^2} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} \left(\cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right) + \\ & + \frac{h^2}{24R_0^2} \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \left(\cos^2 \theta - \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right) - w_2 \cos \theta = \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) - \\ & - \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \left(\cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{2 \cos \theta} \right) - \frac{h^2}{24R_0^2} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} \left(\cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right) + \\ & + \frac{h^2}{24R_0^2} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \left(\cos^2 \theta - \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right) - w_1 \cos \theta. \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h^2}{12R_0^2} \left\{ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} \left(\frac{1-\nu}{2} - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) - \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{3-\nu}{2 \cos \theta} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \operatorname{tg} \theta \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial^3 w_2}{\partial \theta^3} \left(\frac{2}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos^3 \theta} + \cos \theta \right) - \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \left(5 + \frac{3}{\cos^2 \theta} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \left(\frac{2+3 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{1+2 \sin^2 \theta}{\cos^5 \theta} + \cos \theta \right) \right\} (1 + \cos^2 \theta) = \\
& \quad = - \left[\frac{\partial u_1}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\cos \theta} + \cos \theta \right) + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} (1 + \cos^2 \theta) + w_1 (\nu + \cos^2 \theta) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{h^2}{12R_0^2} \left\{ \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) - \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} \right\} \right] \sin \theta \sqrt{\frac{1+3 \cos^2 \theta}{1+\cos^2 \theta}} + \\
& + \frac{h^2}{6R_0^2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{1-\nu}{2} \right) + \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \operatorname{tg} \theta \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial^3 w_1}{\partial \theta^3} \left(\frac{2}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos^3 \theta} + \cos \theta \right) - \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \left(5 + \frac{3}{\cos^2 \theta} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \left(\frac{2+3 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{1+2 \sin^2 \theta}{\cos^5 \theta} + \cos \theta \right) \right] \cos^2 \theta. \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h^2}{6R_0^2} \left\{ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} \left(\frac{1-\nu}{2} - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) - \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{3-\nu}{2 \cos \theta} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \operatorname{tg} \theta \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial^3 w_2}{\partial \theta^3} \left(\frac{2}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos^3 \theta} + \cos \theta \right) - \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \left(5 + \frac{3}{\cos^2 \theta} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \left(\frac{2+3 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{1+2 \sin^2 \theta}{\cos^5 \theta} + \cos \theta \right) \right\} \cos^2 \theta + \\
& + \left[\frac{\partial u_2}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\cos \theta} + \cos \theta \right) - \frac{\partial v_2}{\partial \theta} (1 + \cos^2 \theta) - w_2 (\nu + \cos^2 \theta) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{h^2}{12R_0^2} \left\{ \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - \cos^2 \theta \right) + \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} \right\} \right] \sin \theta \sqrt{\frac{1+3 \cos^2 \theta}{1+\cos^2 \theta}} = \\
& = \frac{h^2}{12R_0^2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{1-\nu}{2} \right) + \frac{3-\nu}{2 \cos \theta} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \operatorname{tg} \theta \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial^3 w_1}{\partial \theta^3} \left(\frac{2}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos^3 \theta} + \cos \theta \right) - \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \left(5 + \frac{3}{\cos^2 \theta} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \left(\frac{2+3 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{1+2 \sin^2 \theta}{\cos^5 \theta} + \cos \theta \right) \right] (1 + \cos^2 \theta). \quad (34)
\end{aligned}$$

Вывод полного набора силовых условий сопряжения закончен.

5. Полная математическая модель трубопровода и ее сингулярность

Математическая модель соединенных труб как моментной оболочки Власова состоит из следующих компонент:

- (1) Система уравнений равновесия (20) с краевыми условиями (21).

(2) Кинематические (геометрические) условия сопряжения на линии соединения \mathcal{L} (23), (25).

(3) Условия сопряжения для силовых факторов на линии соединения \mathcal{L} (31)–(34).

Эта математическая модель содержит сингулярность в силовых условиях сопряжения (31)–(34). Каждое из этих условий содержит функции $\cos^k \theta$, $k = 2, 3$ в знаменателе в левой и правой частях, обращающуюся в ноль при $\theta = n\pi/2$. Эта сингулярность является неустранимой, что можно увидеть на следующем рассуждении.

Замечание 4. Умножим левую и правую часть равенства (31) на $\cos^3 \theta$. Положим $\theta = n\pi/2$. Тогда это условие совпадет с условием (25). Следовательно, во всех точках $\theta = n\pi/2$ условий сопряжения будет недостаточно для нахождения решения краевой задачи (20), (21), (23), (25), (31)–(34). Поэтому рассмотренный метод устранения сингулярности некорректен.

5.1 Пример расчета напряжений на линии излома

Для численной иллюстрации наличия особенности в решении был использован свободно распространяемый пакет прикладных программ FreeCAD со встроенной программой расчета по методу конечных элементов CalculiX. Возможности пакетов позволяют увидеть рост напряжения в окрестности линии стыка, как показано далее.

Пакет прикладных программ FreeCAD сначала тестировался на примере задачи Ламе для толстостенной трубы, находящейся под внутренним давлением. Точное решение этой задачи приведено в [17]. Тестовый расчет показал согласование приближенного решения, полученного FreeCAD, и точного решения.

Были найдены численные решения МКЭ для нескольких тестовых задач. Ниже представлены две из них.

Задача 1.

3D-модель соединения цилиндрических труб под прямым углом. Выбраны параметры: $h = 20$ мм, $R_e = 100$ мм, $L_1 = 500$ мм, $L_2 = 400$ мм. Материал: сталь S335JO, параметры материала: $\rho_t = 7800$ кг/м³, $E = 210$ ГПа, $\nu = 0.3$. Закрепление полагалось жестким по внешним торцам труб, что соответствует краевым условиям (21). Наложено равномерно распределенное давление на всю внутреннюю поверхность труб величиной $p = 100$ МПа.

Сетка, построенная встроенным во FreeCAD генератором сеток NetGen <https://sourceforge.net/projects/netgen-mesher/> и предельные значения напряжений по Мизесу показаны на рис. 3.

На рис. 3 слева видно слабое сгущение сетки в окрестности линии стыка труб. Это вызвано настройкой точности как средней при построении сетки.

На рис. 3 справа виден значительный разброс величин напряжений по Мизесу между максимальным, средним и минимальным напряжением. Это иллюстрирует то, что напряжения имеют участки быстрого роста, иными словами, поле напряжений имеет особенности. Максимальное напряжение достигает величины 2098 МПа, что значительно превышает предел прочности стали S335JO. Это значение достигается на внутренней стороне стенки трубы во входящем угле области при $\theta = 3\pi/2$, на линии стыка. В то же время далеко от линии особенности напряжение падает до 25 МПа.

Задача 2.

3D-модель врезки трубы меньшего диаметра в трубу большего диаметра под прямым углом.

Параметры трубы большего диаметра: $h = 5$ мм, $R_{e1} = 20$ мм, $L_1 = 100$ мм.

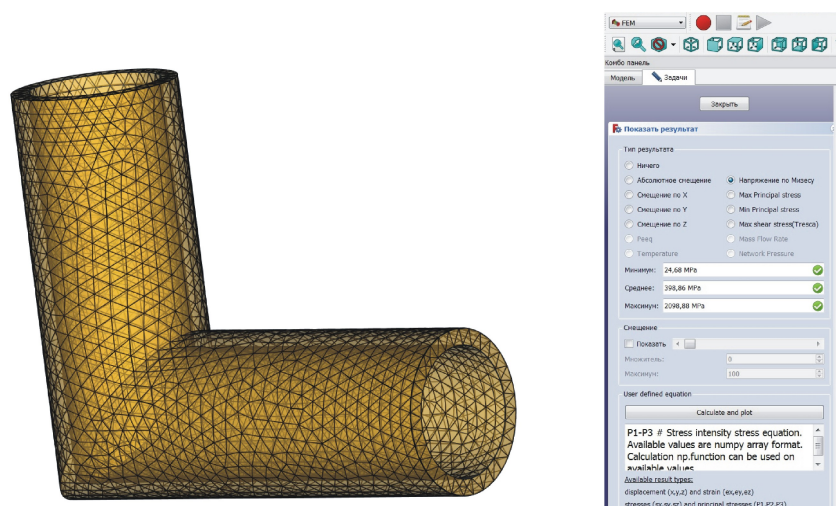


Рис. 3. Сетка метода конечных элементов и значения напряжений по Мизесу в Задаче 1.

Параметры трубы меньшего диаметра: $h = 2$ мм, $R_{e2} = 10$ мм, $L_2 = 100$ мм.

Материал обеих труб — сталь S335JO, параметры материала указаны в Задаче 1.

Закрепление полагалось жестким по внешним торцам труб, что соответствует крайним условиям (21). Наложено равномерно распределенное давление на всю внутреннюю поверхность труб величиной $p = 100$ МПа.

Сетка, построенная встроенным генератором сеток NetGen и предельные значения напряжений по Мизесу показаны на рис. 4.

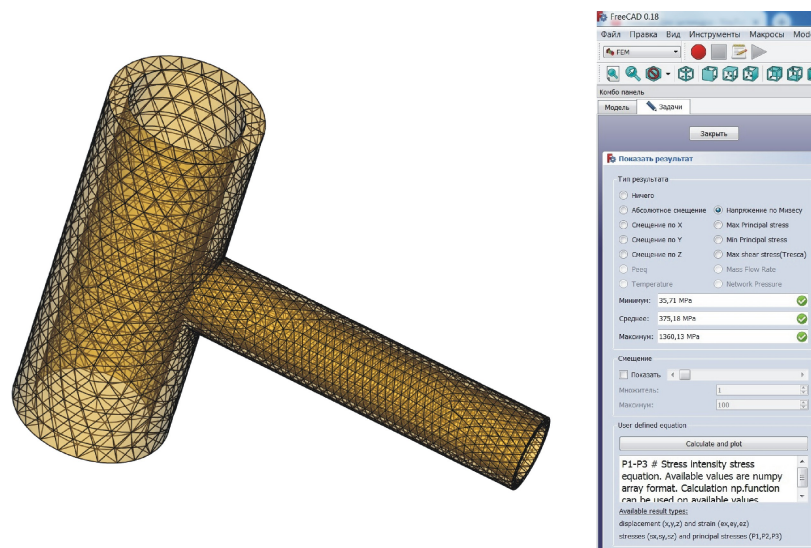


Рис. 4. Сетка метода конечных элементов и значения напряжений по Мизесу в Задаче 2.

В целом, результаты расчета Задачи 2 эквивалентны результатам расчета Задачи 1. Поэтому сосредоточимся на их отличиях.

На рис. 4 слева видно более сильное сгущение сетки в окрестности линии стыка труб. Это вызвано настройкой точности как высокой при построении сетки. Подробности метода построения сеток можно найти на официальном сайте проекта NetGen <https://ngsolve.org/docu/latest/>

На рис. 4 справа видно, что разброс величин напряжений по Мизесу между максимальным, средним и минимальным напряжением меньше, чем в Задаче 1. Это означает, что особенности поля напряжений выражены в этой задаче меньше. Но по-прежнему максимальное напряжение достигает величины 1360 МПа, что превышает предел прочности стали S335JO. Это значение достигается на внутренней стороне стенки трубы при симметричных значениях $\theta_2 = \pi/2$, $\theta_2 = 3\pi/2$ на линии стыка, если рассматривать трубу меньшего диаметра.

Эти результаты соответствуют известным данным о том, что при небольших соотношениях $\alpha = R_{e2}/R_{e1}$ влияние особенности уменьшается, см. [6]. Здесь, как легко увидеть, $\alpha = 0.5$.

Далеко от линии особенности напряжение падает до 36 МПа.

Замечание 5. Результаты расчета тестовых задач стандартным пакетом прикладных программ не проясняют многие вопросы об особенностях поля напряжений в окрестности линии стыка. Является ли рост напряжений по Мизесу проявлением недостатков численного метода, или же он вызван присутствием особенности в точном решении? Как модифицировать численный метод, чтобы найти более точное поле напряжений? Если по результатам расчета напряжение превышает предел прочности, должна ли быть изменена физическая модель (например, учетом пластических деформаций), или же необходимо улучшить численный метод? Таким образом, наряду с несомненным существованием особенности, показана недостаточность применения пакетов прикладных программ FreeCAD и CalculiX для численного анализа задач с особенностями. Вопрос о применимости коммерческих пакетов прикладных программ остается открытым. Предположительно ответ будет тем же, но это нуждается в доказательстве.

Заключение

Построена и обоснована математическая модель трубопровода как полностью моментной оболочки Власова с линиями излома поверхности в местах соединения сегментов трубопровода.

Решены задачи: (1) выведены уравнения равновесия трубы как моментной оболочки Власова с изломом; (2) усилия на косых сечениях выражены как функции перемещений оболочки; (3) наложены и обоснованы условия сопряжения на линии стыка труб для перемещений и угла поворота нормали; (3) наложены и обоснованы условия сопряжения для изгибающих моментов, сдвиговых усилий, поперечных и нормальных усилий; (4) доказано наличие особенности в условиях сопряжения на линии соединения оболочек.

На численных примерах проиллюстрировано наличие особенности решения уравнений математической модели в точках на линии соединения сегментов трубопровода.

Отмечены недостатки существующих комплексов программ с точки зрения проведения численных экспериментов по задачам теории упругости с особенностями. Установлена согласованность результатов численного анализа задачи о врезке трубы с известными результатами.

Рассматриваемая задача о соединении цилиндрических оболочек по своему смыслу близка к задаче теории упругости с входящим углом на границе (см. [10]), поэтому в дальнейшем для ее численного решения предполагается использовать методика, предложенную в работе [19].

Возникла новая задача исследования вида особенности в зависимости от угла стыка трубопроводов. Как показали численные эксперименты, не включенные в данную статью, сингулярность выражается слабее, если угол раствора труб приближается к 180° .

Численные эксперименты были проведены на вычислительном кластере ЦКП «Центр данных ДВО РАН».

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Geon H. L., Jung K. S., Jeom K. P. Condition assessment of damaged elbow in subsea pipelines // *Ships and Offshore Structures*. 2017. Vol. 12, no. 1. P. 135–151. <https://doi.org/10.1080/17445302.2015.1116245>.
- [2] Effects of steel properties on the local buckling response of high strength pipelines subjected to reverse faulting / X. Liu, H. Zhang, M. Li et al. // *Journal of Natural Gas Science and Engineering*. 2016. Vol. 33. P. 378–387. <https://doi.org/10.1016/j.jngse.2016.05.036>.
- [3] Klar A., Marshall A. M. Shell versus beam representation of pipes in the evaluation of tunneling effects on pipelines // *Tunnelling and Underground Space Technology*. 2008. Vol. 23. P. 431–437. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2007.07.003>.
- [4] Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Москва: Наука, 1976. 512 с.
- [5] Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Санкт-Петербург: С.-Петербургский университет, 2010. 380 с.
- [6] Analytical solution for cylindrical thin shells with normally intersecting nozzles due to external moments on the ends of shells. / M. Xue, H. Wang, W. Chen et al. // *Science in China Series A: Mathematics*. 1999. Vol. 42, no. 3. P. 293–304. <https://doi.org/10.1007/BF02879064>.
- [7] Tambača J., Tutek Z. A new linear Naghdi type shell model for shells with little regularity // *Applied Mathematical Modelling*. 2016. Vol. 40. P. 10549–10562. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.07.007>.
- [8] Koiter W. T. On the Mathematical Foundation of Shell Theory. Actes du Congrès international des mathématiciens, 3. Mathématiques appliquées. Nice, France: 1–10 September, 1970. P. 123–130. <https://pdfs.semanticscholar.org/152e/e2e52a03aa65682be3e90ad8cd78274a940e.pdf>.
- [9] Fluid–structure interaction between pulsatile blood flow and a curved stented coronary artery on a beating heart: A four stent computational study / M. Bukač, S. Čanić, J. Tambača et al. // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2019. Vol. 350. P. 679–700. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.03.034>.
- [10] Timoshenko S. P., Goodier J. N. *Theory of Elasticity*. New York: McGraw-Hill, 1987. 608 p.
- [11] Власов В.З. Избранные труды. Т.1. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. Москва: Академия наук СССР, 1962. 528 с.
- [12] Rukavishnikov V. A., Tkachenko O. P. Dynamics of a fluid-filled curvilinear pipeline // *Applied Mathematics and Mechanics*. 2018. Jun. Vol. 39, no. 6. P. 905–922. <https://doi.org/10.1007/s10483-018-2338-9>.
- [13] Rukavishnikov V. A., Tkachenko O. P. Numerical and Asymptotic Solution of the Equations of Propagation of Hydroelastic Vibrations in a Curved Pipe // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2000. Nov. Vol. 41, no. 6. P. 1102–1110. <https://doi.org/10.1023/A:1026619009228>.

-
- [14] Rukavishnikov V. A., Tkachenko O. P. Numerical analysis of the mathematical model of hydroelastic oscillations in a curved pipeline // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2011. Aug. Vol. 3, no. 4. P. 508–516. <https://doi.org/10.1134/S2070048211040090>.
- [15] Ткаченко О. П. Разрешающие уравнения математической модели изогнутого трубопровода // *Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2017. Т. 34, № 4. С. 114–124.
- [16] Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов*. Москва: Наука, 1980. 976 с.
- [17] Седов Л. И. *Механика сплошной среды*. Москва: Лань, 2004. Т. 1. 528 с.
- [18] Timoshenko S. P. *Strength of materials*. Huntington, New York: R.E. Krieger Pub. Co., 1976. 1010 p.
- [19] Rukavishnikov V. A. Weighted FEM for two-dimensional elasticity problem with corner singularity // *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. 2016. Vol. 112. P. 411–419. https://doi.org/10.1007/978-3-319-39929-4_39.

O. P. Tkachenko

INTERFACING CONDITIONS IN THE PIPELINE MATHEMATICAL MODEL WITH A KINK OF PROFILE

Computing Center of Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russia

Abstract. A closed-ended formulation of the boundary-value problem of calculating the pipeline stress-strain state as a Vlasov shell with a kink line of surface was given. The resolving equations of the shell in displacements in the chosen curvilinear coordinate system were derived; in the local coordinates associated with the kink line, the kinematic conjugation conditions on this line were derived; conjugation conditions for moments and forces in the shell on the surface kink line were stated and proved. All conjugation conditions were deduced in the displacements of the shell on the kink line, which is not a coordinate line. The presence of a singularity in the obtained conjugation conditions was proved. The consistency of the numerical analysis results with known results was established.

Keywords: shell, kink line, singularity, pipeline, stress-strain state.

REFERENCES

- [1] Geon H. L., Jung K. S., Jeom K. P. Condition assessment of damaged elbow in subsea pipelines // *Ships and Offshore Structures*. 2017. Vol. 12, no. 1. P. 135–151. <https://doi.org/10.1080/17445302.2015.1116245>.
- [2] Effects of steel properties on the local buckling response of high strength pipelines subjected to reverse faulting / X. Liu, H. Zhang, M. Li et al. // *Journal of Natural Gas Science and Engineering*. 2016. Vol. 33. P. 378–387. <https://doi.org/10.1016/j.jngse.2016.05.036>.
- [3] Klar A., Marshall A. M. Shell versus beam representation of pipes in the evaluation of tunneling effects on pipelines // *Tunnelling and Underground Space Technology*. 2008. Vol. 23. P. 431–437. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2007.07.003>.
- [4] Gol'Denveizer A. L. *Theory of Elastic Thin Shells*. Moscow: Nauka, 1976. 512 p. (in Russian).
- [5] Novozhilov V. V. *Thin Shell Theory*. St. Petersburg: St. Petersburg University, 2010. 380 p. (in Russian).
- [6] Analytical solution for cylindrical thin shells with normally intersecting nozzles due to external moments on the ends of shells. / M. Xue, H. Wang, W. Chen et al. // *Science in China Series A: Mathematics*. 1999. Vol. 42, no. 3. P. 293–304. <https://doi.org/10.1007/BF02879064>.
- [7] Tambača J., Tutek Z. A new linear Naghdi type shell model for shells with little regularity // *Applied Mathematical Modelling*. 2016. Vol. 40. P. 10549–10562. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.07.007>.
- [8] Koiter W. T. On the Mathematical Foundation of Shell Theory. *Actes du Congrès international des mathématiciens, 3. Mathématiques appliquées*. Nice, France: 1–10 September, 1970. P. 123–130. <https://pdfs.semanticscholar.org/152e/e2e52a03aa65682be3e90ad8cd78274a940e.pdf>.
- [9] Fluid–structure interaction between pulsatile blood flow and a curved stented coronary artery on a beating heart: A four stent computational study / M. Bukač, S. Čanić, J. Tambača et al. // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2019. Vol. 350. P. 679–700. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.03.034>.
- [10] Timoshenko S. P., Goodier J. N. *Theory of Elasticity*. New York: McGraw-Hill, 1987. 608 p.
- [11] Vlasov V. S. *Selected Works. Vol.1. General theory of shells and its applications in technology*. Moscow: USSR Academy of Sciences, 1962. 528 p. (in Russian).

Tkachenko Oleg Pavlovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Ass. Professor, Leading Research Worker, Computing Center of Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russia.

-
- [12] Rukavishnikov V. A., Tkachenko O. P. Dynamics of a fluid-filled curvilinear pipeline // *Applied Mathematics and Mechanics*. 2018. Jun. Vol. 39, no. 6. P. 905–922. <https://doi.org/10.1007/s10483-018-2338-9>.
- [13] Rukavishnikov V. A., Tkachenko O. P. Numerical and Asymptotic Solution of the Equations of Propagation of Hydroelastic Vibrations in a Curved Pipe // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2000. Nov. Vol. 41, no. 6. P. 1102–1110. <https://doi.org/10.1023/A:1026619009228>.
- [14] Rukavishnikov V. A., Tkachenko O. P. Numerical analysis of the mathematical model of hydroelastic oscillations in a curved pipeline // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2011. Aug. Vol. 3, no. 4. P. 508–516. <https://doi.org/10.1134/S2070048211040090>.
- [15] Tkachenko O. P. The resolving equations of the mathematical model of curved pipeline // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 2017. no. 4 (34). P. 114–124. (in Russian).
- [16] Bronstein I. N., Semendyayev K. A. *Maths Guide for Engineers and University Students*. Moscow: Nauka, 1980. 976 p. (in Russian).
- [17] Sedov L. I. *Mechanics of Continuous Media*. Moscow: Lan', 2004. Vol. 1. 528 p.
- [18] Timoshenko S. P. *Strength of materials*. Huntington, New York: R.E. Krieger Pub. Co., 1976. 1010 p.
- [19] Rukavishnikov V. A. Weighted FEM for two-dimensional elasticity problem with corner singularity // *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. 2016. Vol. 112. P. 411–419. https://doi.org/10.1007/978-3-319-39929-4_39.