Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 1 (47). С. 49–55

Т. С. Алероев, М. В. Гасанов

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается нелинейное уравнение третьего порядка с полиномом второй степени в правой части. Отличительной чертой этого класса уравнений является наличие подвижных особенностей, что делает эти уравнения неразрешимыми в квадратурах. В работе получены интервальные критерии существование подвижных особых точек. Представленная теория является подспорьем для написания различных алгоритмов в различных программных комплексах для нахождения подвижных особых точек.

Ключевые слова: волновые процессы, нелинейные дифференциальные уравнения, критерии существования подвижных особых точек.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.004

УДК: 539.374

Введение.

В работе [1] рассматриваются волновые процессы в стержне на основе обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \varphi(u)}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}, \quad m,\, \mu = const.$$

В случае стационарного процесса, когда время отсутствует, уравнение переходит в категорию обыкновенное дифференциальное уравнение. В зависимости от параметров уравнения переходим к исследуемому нами классу дифференциальных уравнений. В указанной публикации при рассмотрении исходного уравнения не была учтена специфика рассматриваемого уравнения, существование подвижной особой точки. Поэтому

Алероев Темирхан Султанович
`e-mail:` aleroevts@mgsu.ru, профессор, доктор физико-математических наук, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.
Гасанов Магомедюсуф Владимирович
`e-mail:` gasanovmv@mgsu.ru, преподаватель, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Поступила 10.01.2021

о строгом аналитическом решении не приходится, так как наличие подвижных особых точек является условием того, что уравнение является неразрешимым в квадратурах.

В публикации [2] так же проводится исследование волновых процессов, но уже в эластичных балках. Рассматривается данная задача в виде дифференциального уравнения третьего порядка, заданного неявно:

$$f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) = 0, \ 0 \leq t \leq 1$$

$$u(0) = u'(0) = u'(1) = 0.$$

Неявный случай подразумевает как линейный случай, так и нелинейный. Поэтому, аналогично, как и в случае с работой [1] не была учтена важная специфика нелинейных дифференциальных уравнений, существование подвижных особенностей.

Для реализации метода нахождения аналитического приближенного решения с подвижными особенностями необходимо строить алгоритмы для программного обеспечения, основой которого и является теоретический материал, представленный в данной работе. Реализация данного метода была рассмотрена в работах [3–5].

Если работах [6, 7] дается теоретическое обоснование учета особенностей, применяемого класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка для исследования волновых процессов в эластичных балках, то в статьях [6–9] дано развитие общих теоретических положений при исследовании нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особенностями. Отметим ряд работ последнего времени с приложением данной категорий уравнений для строительных конструкций [10–17].

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$y''' = a_1(x)y^2 + a_2(x)y + a_3(x), \tag{1}$$

которое путем некоторой замены переменной, показанной в работе [7], приводиться к нормальной форме

$$y''' = y^2 + r(x), \tag{2}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$y''' = y^2 + r(x), \tag{3}$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_1) = y_1, \\ y''(x_2) = y_2. \end{cases} \tag{4}$$

Далее, путем замены $y(x) = \frac{1}{u(x)}$ переходим к инверсному уравнению:

$$u''' \cdot u^2 = u^2 + 6u \cdot u' \cdot u'' - 6(u')^3 + u^2 \cdot r(x), \tag{5}$$

$$\begin{cases} u(x_0) = u_0, \\ u'(x_1) = u_1, \\ u''(x_2) = u_2. \end{cases} \tag{6}$$

Используя связь локальных экстремумов инверсионной и прямой функции, сформулируем следующую теорему:

Теорема 1. *Потребуем выполнение следующих условий:*

(1) $y(x)\,,\,u(x)\,\in C\,[a;b]$
(2) $\forall x\in[a;b]\;\;u(x)>0\;\,(u(x)<0)$.

Тогда необходимым и достаточным условием локального максимума $y(x)$ *в точке* c $\in(a;b)$ *является* $u(x)$ *имело в точке* c.

Доказательство данного факта основывается на использовании классического метода математического анализа, а именно применении необходимого и достаточного условия локального экстремума.

Теорема 2. *Пусть* $y(x)$ *определенна на полуинтервале* $[x_0;x^*)$, где $x_0<x^*,x^*-$ *подвижная особая точка задачи* (3)-(4). *Тогда найдется некоторая окрестность* $[a;x^*)$ точки $x^*,\;x^*>a,$ *в которой функция* $y(x)$, *ее первая и вторая производная имеют один знак* $y(x)>0\,,\;y'>0,\;y''>0,\;(y\,(x)<0,y'\,(x)<0,y''\,(x)<0)\,.$

Доказательство. Функцию $y(x)$можно представить в виде

$$y(x)=(x^*-x)^{-3}\sum_0^\infty C_n(x^*-x)^n. \tag{7}$$

Согласно теореме существования, найдется точка $x_1\in[x_0;x^*)$,для которой правильная часть ряда (7) сходится в области $[x_1;x^*)$. Расписывая правую часть (7) получаем:

$$y(x)=-60(x^*-x)^{-3}+\mathrm{C}_6(x^*-x)^3+\mathrm{C}_7(x^*-x)^4+... \tag{8}$$

Дифференцируя обе части равенства (8), имеем:

$$y'(x)=-240(x^*-x)^{-4}-3\mathrm{C}_6(x^*-x)^2-4\mathrm{C}_7(x^*-x)^3-... \tag{9}$$

Введем обозначения

$$y'(x)=g_1\,(x)+h_1\,(x)\,,$$
$$g_1\,(x)=-240(x^*-x)^{-4};\;h_1\,(x)=-3\mathrm{C}_6(x^*-x)^2-4\mathrm{C}_7(x^*-x)^3+...\,.$$

Учитывая, что $g_1\,(x)\to-\infty$, а так же $h_1\,(x)\to\;0$ при $x\to\;x^*-0$, то найдется точка $x_2:x_2\geq x_1$, и $\forall x\in[x_2;x^*)$ будет выполняться неравенство $g_1\,(x)<h_1\,(x)$, следовательно $y'(x)<0$.

Дифференцируем теперь выражение (9). Тогда имеем:

$$y''(x)=-960(x^*-x)^{-5}+6\mathrm{C}_6(x^*-x)+12\mathrm{C}_7(x^*-x)^2+... \tag{10}$$

Обозначим

$$y''(x)=g_2\,(x)+h_2\,(x)\,,$$
$$g_2\,(x)=-960(x^*-x)^{-5};\,h_2\,(x)=6\mathrm{C}_6(x^*-x)+12\mathrm{C}_7(x^*-x)^2+...\,.$$

Так как $g_2\,(x)\to-\infty$ и $h_2\,(x)\to\;0$ при $x\to\;x^*-0$, то существует такая точка $x_3:$ $x_3\geq x_1$, что для любого xиз полуинтервала $[x_3;x^*)$ будет выполняться неравенство $g_2\,(x)<h_2\,(x)$, следовательно $y''(x)<0$.

Теорема 3. *(точечный критерий существования подвижных особых точек) Чтобы* x^* *являлась подвижной особой точкой функции* $y(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы функция* $u(x)$ *удовлетворяла следующим условиям:*

$$u\,(x^*)=0,u'\,(x^*)=0,\quad u''\,(x^*)=0,\quad u'''\,(x^*)=-360. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость. Представим функцию $u(x)$ в виде регулярного ряда:

$$u(x) = D_0(x^* - x)^3 + D_6(x^* - x)^9 + D_7(x^* - x)^{10} + ... \tag{12}$$

Тогда

$$u'(x) = -3D_0(x^* - x)^2 - 9D_6(x^* - x)^8 - 10D_7(x^* - x)^9 + ... \tag{13}$$

и

$$u''(x) = 6D_0(x^* - x) + 72D_6(x^* - x)^7 + 90D_7(x^* - x)^8 + ...,$$

а также

$$u'''(x) = 6D_0 + 504D_6(x^* - x)^6 + 648D_7(x^* - x)^7 + ...$$

В итоге получаем требуемое

$$u\left(x^*\right) = 0, u'\left(x^*\right) = 0, u''\left(x^*\right) = 0, u'''\left(x^*\right) = -360. \tag{14}$$

где $D_0 = \mathrm{C}_0 = -60$.

Достаточность. Подвижная особая точка задачи (3)-(4) является регулярной точкой для задачи (5)-(6), следовательно, $u(x)$ можно представить в виде:

$$u(x) = \sum_0^\infty C_n(x^* - x)^n.$$

Из условия теоремы получаем значения коэффициентов разложения $C_0 = C_1 = C_2 = 0$, $C_3 = -360$. С учетом коэффициентов для $u(x)$получаем:

$$u(x) = -360(x^* - x)^3 + \mathrm{C}_4(x^* - x)^4 + \mathrm{C}_5(x^* - x)^5 + ...$$

или

$$u(x) = (x^* - x)^3\left(-360 + \mathrm{C}_4(x^* - x) + \mathrm{C}_5(x^* - x)^2 + ...\right).$$

В силу используемой замены $y(x) = \frac{1}{u(x)}$, x^* является полюсом 3-го порядка для $y(x)$.

Теорема 4 *(интервальный критерий существования подвижной особой точки). x^* является подвижной особой точкой решения задачи* (3)-(4) *тогда и только тогда, когда существует некоторая окрестность подвижной особой точки* $[x_1; x_2]$, $x^* \in [x_1; x_2]$, *для которой функция* $u(x)$ *являлась бы непрерывной, и выполнялось условие:*

$$u(x_1) > 0,\ u(x_2) < 0.$$

Доказательство. Необходимость. Так как уравнение было переведено в инверсное, то точка x^* для функции $u(x)$ переходит в класс регулярных. На отрезке $[x_1; x_2]$, $y\left(x\right)$ имеет значение разных знаков на концах отрезка $y(x_1) > 0$, $y(x_2) < 0$. В силу зависимости $y\left(x\right)$ и $u(x)$ функция $u(x)$ так же принимает значения разных знаков на концах отрезка, а ввиду того что точка x^*является регулярной для функции $u(x)$, то в окрестности точки x^* функция является непрерывной.

Достаточность. Так как функция $u(x)$непрерывна и имеет различные знаки на концах отрезка $u(x_1) > 0$, $u(x_2) < 0$, то существует точка $x_3 \in [x_1; x_2]$ в которой функция $u(x)$ равна нулю. Тогда в силу инверсии x_3 является подвижной особой точкой для решения задачи Коши (3)-(4).

Вывод. В данной статье решена задача о нахождении точных критериев существования подвижных особенностей, что может позволить разрабатывать различные алгоритмы в программных комплексах для нахождения подвижных особых точек с любой наперед заданной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чугайнова А.П. Нестационарные решения обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2013. Т. 281. с. 204–212.

[2] Yuqiang F. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. Vol. 56. p. 2507–2514.

[3] Леонтьева Т. Ю. Об одном обобщении точных критериев существования подвижных особых точек одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2017. № 13 (262).

[4] Орлов В. Н., Гузь М. П. Точные критерии существования подвижных особых точек решения одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2013. Т. 4, № 80.

[5] Орлов В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. М.: МПГУ, 2013. 174 с.

[6] Orlov V. N., Gasanov M. V. Study of wave processes in elastic beams and nonlinear differential equations with moving singular points // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2021. jan. Vol. 1030. p. 012081.

[7] Орлов В.Н., Гасанов М.В. Теорема существования решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка с полиномиальной правой частью седьмой степени в окрестности подвижной особой точки // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 1(43). с. 92–99.

[8] Орлов В. Н. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2009. № 4(35). с. 23–32.

[9] Орлов В.Н., Леонтьева Т. Ю. О расширении области для аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2020. Т. 2.

[10] Орлов В. Н., Ив Б. Б. Теорема существования решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка с полиномиальной правой частью второй степени в окрестности подвижной особой точки // Вестник Башкирского университета. 2018. Т. 23, № 4. с. 980–986.

[11] Orlov V. N., Zheglova Y. G. Mathematical modeling of building structures and nonlinear differential equations // International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. 2020. Vol. 11, no. 3. p. 2050026.

[12] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modelling the complex structures // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. jun. Vol. 365. p. 042045.

[13] Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk, E. P. Linnik et al. // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences. 2018. aug. no. 79.

[14] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. dec. Vol. 456. p. 012122.

[15] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions // E3S Web of Conferences. 2019. Vol. 97. p. 03031.

[16] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // Journal of Physics: Conference Series. 2019. dec. Vol. 1425. p. 012127.

[17] Orlov V. N., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order // Journal of Physics: Conference Series. 2019. dec. Vol. 1425. p. 012129.

T. S. Aleroev, M. V. Gasanov

A NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION FOR THE EXISTENCE OF A MOBILE SINGULAR POINTS FOR A THIRD-ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract. A nonlinear third-order equation with second degree polynomial on the right. The hallmark of this class equations is the presence of movable singularities, which makes these equations undecidable in quadratures. The work obtained interval criteria the existence of movable singular points. The theory presented is help for writing various algorithms in various software complexes for finding movable singular points.

Keywords: wave processes, nonlinear differential equations, criteria for the existence of movable singular points.

REFERENCES

[1] Chugainova A. Nonstationary solutions of the generalized Korteweg – de Vries – Burgers equation // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2013. Vol. 281. P. 204–212.
[2] Yuqiang F. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. Vol. 56. p. 2507–2514.
[3] Leont'eva T. Y. On a generalization of exact criteria for the existence of movable singular points of one class of nonlinear ordinary differential equations in a complex domain // Scientific Vestniks of Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics. 2017. no. 13 (262).
[4] Orlov V., Guz M. Exact criteria for the existence of movable singular points of the solution of one nonlinear ordinary differential equation // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2013. Vol. 4, no. 80.
[5] Orlov V. Method of approximate solution of the first, second differential equations of Painlevé and Abel. M.: MPGU, 2013. 174 p.
[6] Orlov V. N., Gasanov M. V. Study of wave processes in elastic beams and nonlinear differential equations with moving singular points // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2021. jan. Vol. 1030. p. 012081.
[7] Orlov V., Hasanov M. Existence theorem for a solution of one class of nonlinear differential equations of the third order with a polynomial right-hand side of the seventh degree in a neighborhood of a moving singular point // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2020. no. 1 (43). p. 92–99.
[8] Orlov V. Investigation of the approximate solution of the Abel differential equation in the vicinity of a moving singular point // Vestnik of MSTU im. N.E.Bauman. Series: Natural Sciences. 2009. no. 4 (35). p. 23–32.
[9] Orlov V., Leont'eva T. Y. On the extension of the domain for the analytical approximate solution of one class of nonlinear differential equations of the second order in the complex domain // Vestnik of the Samara State Technical University. Series: Physics and Mathematics. 2020. Vol. 2.

Aleroev Temirkhan Sultanovich, Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.
Gasanov Magomedyusuf Vladimirovich, Teacher, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

[10] Orlov V. N., Yves B. B. Existence theorem for a solution of one class of nonlinear differential equations of the fourth order with polynomial right-hand side of the second degree in a neighborhood of a moving singular point // Vestnik of the Bashkir University. 2018. Vol. 23, no. 4. p. 980–986.
[11] Orlov V. N., Zheglova Y. G. Mathematical modeling of building structures and nonlinear differential equations // International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. 2020. Vol. 11, no. 3. p. 2050026.
[12] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modeling the complex structures // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. jun. Vol. 365. p. 042045.
[13] Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk, E. P. Linnik et al. // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences. 2018. aug. no. 79. URL: https://doi.org/10.18698
[14] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. dec. Vol. 456. p. 012122.
[15] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions // E3S Web of Conferences. 2019. Vol. 97. p. 03031.
[16] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // Journal of Physics: Conference Series. 2019. dec. Vol. 1425. p. 012127.
[17] Orlov V. N., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order // Journal of Physics: Conference Series. 2019. dec. Vol. 1425. p. 012129.