

Г. Т. Володин, Д. С. Кочергин

ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГО-ВЯЗКИХ БАЛОК ВЗРЫВНОЙ НАГРУЗКОЙ В ВОДЕ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Представлено аналитическое решение задачи о деформировании взрывом сосредоточенного заряда конденсированного взрывчатого вещества (ВВ) балки, материал которой чувствителен к скорости деформации. Влияние внешней среды (воды) на процесс и результаты деформирования учитывается введением присоединенной массы. Коэффициент вязкости и модуль упругости в фиксированных интервалах скоростей деформирования определяются из экспериментов. Для этих параметров, характеризующих материал балки при импульсном деформировании, получена аналитическая взаимосвязь и нижняя граница значений для коэффициента вязкости. Решение задачи найдено методом разделения переменных в определяющем уравнении движения. При этом форма упругой линии балки для каждого момента времени выбрана, исходя из требования выполнения граничных условий и принципа минимума работы деформирования.

Ключевые слова: балка, взрывная нагрузка, скорость деформации, присоединенная масса, вязкость, взрыв в воде, принцип наименьшего действия.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.005

УДК: 531/534

Введение

Известно [1], что при взрыве зарядов ВВ в воздухе на близких расстояниях от элементов конструкций основными носителями нагрузки являются продукты взрыва, а на более далеких расстояниях – воздушная ударная волна, то есть в обоих случаях нагрузка передается через среду, плотность которой существенно меньше плотности материала элемента конструкции.

При взрыве неконтактных зарядов в воде нагрузка на элементы передается через среду, плотность которой соизмерима с плотностью материала конструкции.

© Володин Г.Т., Кочергин Д.С., 2021

Володин Геннадий Тимофеевич

e-mail: g.volodin@yandex.ru, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Кочергин Денис Сергеевич

e-mail: sir.cod4@yandex.ru, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 20.03.2021

С началом деформации элемента в воде в движение приходит не только сам элемент, но и значительная часть частиц среды, находящихся с ним в непосредственном контакте, в результате этого движение элемента будет тормозиться [1]. Этот эффект сопротивления среды перемещению в ней твердого тела в гидродинамике, например [2], принято учитывать введением присоединенной массы, которая в общем случае зависит не только от размеров элемента, но и от направления движения.

Таким образом, при выводе уравнения движения балочной конструкции в воде необходимо учитывать эффект сопротивления среды, эквивалентный введению присоединенной массы.

Будем также учитывать увеличение модуля упругости материала балочной конструкции с увеличением скорости деформации, а также и вязкостные характеристики материала.

Постановка задачи

Физическая модель (основные допущения).

Рассматриваются балки, удовлетворяющие следующим ограничениям [3]:

- 1) сечение балки имеет хотя бы одну ось симметрии;
- 2) все внешние силы лежат в плоскости симметрии балки;
- 3) прогибы балки малы по сравнению с её длиной;
- 4) материал балки изотропный, чувствительный к скорости деформации, при этом зависимость между напряжением, деформацией и скоростью деформации принимается в виде [4]:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad (1)$$

где σ – нормальное напряжение в сечении балки, ε – относительная деформация, $\dot{\varepsilon}$ – скорость относительной деформации, E – модуль упругости материала балки, η – коэффициент вязкости;

5) используется классическая гипотеза плоских сечений. Внешняя динамическая нагрузка является импульсной, созданной взрывом сосредоточенного заряда ВВ в ближней области действия взрыва [1]. Деформирование балки вследствие весьма кратковременного действия нагрузки происходит уже после снятия нагрузки в период свободных колебаний балки.

Математическая модель.

Рассмотрим балку длиной l , свободно опирающуюся по концам на недеформируемые опоры. Начало прямоугольной декартовой системы координат поместим в середину длины балки. Пусть над серединой балки, находящейся в воде, на высоте a от её оси расположен заряд ВВ массы S .

В момент времени $t = 0$ происходит взрыв заряда над балкой, её деформирование при $t > 0$ и возможное разрушение. Под разрушением балки понимаем образование трещин, нарушающих несущую способность соответствующей балочной конструкции, разделение балки на фрагменты, соскакивание с опор.

Требуется, исходя из принятых гипотез, составить уравнение движения произвольного элемента балки, найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее краевым и начальным условиям; используя найденное решение определить условия гарантированного разрушения или гарантированной взрывостойкости рассматриваемой балочной конструкции.

Совместим ось балки с осью абсцисс прямоугольной декартовой системы координат.

Выделим двумя сечениями, перпендикулярными оси, элемент балки длиной dx (Рис.1)

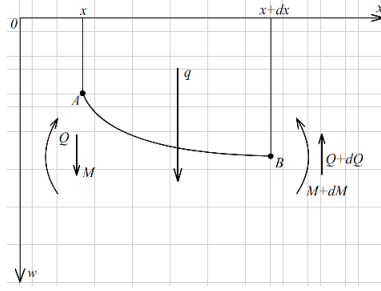


Рис. 1 Схема движения элемента балки под действием импульсной нагрузки

На рисунке 1 показан элемент балки в состоянии движения с указанием действующих на него сил и моментов. Уравнение движения элемента

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q - \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2)$$

дополняем уравнением баланса моментов

$$\frac{\partial M}{\partial x} + Q = 0. \quad (3)$$

Учитывая соотношения

$$M = \int_S \sigma z dS, \quad \sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad \int_S z^2 dS = J,$$

где S – площадь сечения балки, z – расстояние элемента площади до нейтральной оси, J – момент инерции площади, получим

$$M = \left(\frac{E}{r} - \frac{\eta}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} \right) \cdot J. \quad (4)$$

Учитывая равенство $\varepsilon = \frac{z}{r}$, где r – радиус кривизны упругой линии в соответствующей точке, а также соотношения

$$\frac{1}{r} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{z}{r} \right) = -z \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial t}$$

получим

$$\dot{\varepsilon} = -z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в соотношение (4), получим:

$$M = EJ \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \eta J \left(-\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right). \quad (6)$$

Уравнение движения (2) с учетом полученных соотношений (4) и (5) принимает вид

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \eta J \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} = q, \quad (7)$$

где q – интенсивность внешней нагрузки.

Отметим, что величина ρ , входящая в уравнения (2) и (7), в связи с расположением балки в воде, представлена суммой двух составляющих

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad (8)$$

где ρ_0 – погонная плотность материала балки, ρ_1 – погонная плотность присоединенной массы воды [1]; тем самым реализован эффект влияния присоединенной массы на процесс движения и деформирования балки, находящейся в воде.

Граничные условия для уравнения (7) определяются из способа закрепления концов балки. Если, как указывалось выше, начало введенной декартовой прямоугольной системы координат поместить в середине длины балки, ось которой совмещена с осью абсцисс, и рассматривать случай свободного опирания балки концами на неподвижные недеформируемые опоры, то для каждого конца балки его перемещение и изгибающий момент будут равны нулю, т.е.

$$w\left(-\frac{l}{2}, t\right) = w\left(\frac{l}{2}, t\right) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(-\frac{l}{2}, t\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{l}{2}, t\right) = 0. \quad (10)$$

Начальные условия для уравнения (7) соответствуют действующей внешней нагрузке. Взрывная нагрузка, как указывалось выше, является импульсной, которая действует в течение очень малого промежутка времени ($\tau \sim 10^{-6} - 10^{-4}$) с в зависимости от вида заряда ВВ. Поэтому деформирование балки происходит в период её свободных колебаний, описываемых однородным уравнением, соответствующим уравнению (7), т.е. уравнением

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \eta J \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} = 0. \quad (11)$$

Начальные условия, следовательно, можно записать в виде:

$$w(x, 0) = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = \frac{i_*(x)}{\rho}, \quad (13)$$

где i_* – погонный (на единицу длины) импульс, при этом,

$$i_*(x) = bi(x) \frac{K_1}{S}, \quad (14)$$

где

$$i = \frac{A_0 C}{a^2} \cos^4(\alpha) \quad (15)$$

$$i = \int_0^\tau P(x, t) dt \quad (16)$$

– удельный импульс, $a_0 = \arctg\left(\frac{l}{2a}\right)$, α – угол падения частиц возмущенной среды на балку (Рис.2).

A_0 – энергетическая характеристика ВВ, например для тротила $A_0 = 400 \frac{\text{М}}{\text{с}}$, K_1 – коэффициент формы [1], который учитывает расположение балки по отношению к заряду ВВ.

Как видно из приведенных соотношений, определяющих начальные условия для уравнения (11), форма изменения действующего давления во времени не имеет существенного значения – важным является величина импульса, полученного за действующий малый промежуток времени τ .

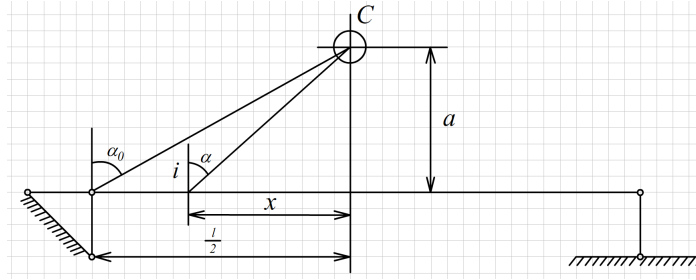


Рис. 2 Схема расположения заряда над балкой

Интегрирование определяющего уравнения (11) выполним методом разделения переменных, при этом, функцию распределения прогибов балки по её длине выберем, исходя из принципа выполнения для неё граничных условий и принципа наименьшего действия Остроградского-Гамильтона, согласно которому работа деформирования балки действующей внешней нагрузкой для выбранной функции должна быть минимальной.

Функцию времени найдём из обыкновенного дифференциального уравнения, которое получается после подстановки выбранной функции распределения прогибов в любой момент времени в уравнение движения (11).

Функцию прогибов возьмем аналогично работе [5] в виде

$$w = w_0(t) \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (17)$$

Отличие от работы [5] состоит в том, что в формуле (17) $w_0(t)$ является неизвестной и подлежащей определению функцией времени, а в работе [5] она является константой, определяющей максимальный прогиб в центре балки.

Исследование альтернативной формы упругой линии в виде неполного полинома 4-й степени выполнено в работе [5]; в результате принята функция вида (17), так как она приводит к меньшей чем для альтернативной функции работе деформирования.

Предполагая, что это соотношение сохраняется и для функции (17), принимаем форму упругой линии в любой момент времени в виде (17).

Запишем уравнение (11) в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} = 0, \quad (18)$$

где

$$\beta_1 = \frac{EJ}{\rho}, \quad \beta_2 = \frac{\eta J}{\rho}. \quad (19)$$

Функция (17) удовлетворяет граничным условиям (9), (10). Подставив её в уравнение (18), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $w_0(t)$:

$$w_0''(t) + \gamma_2 w_0'(t) + \gamma_1 w_0(t) = 0, \quad (20)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\pi^4}{l^4} \beta_1, \quad \gamma_2 = \frac{\pi^4}{l^4} \beta_2 \quad (21)$$

Характеристическое уравнение запишем в виде

$$\lambda^2 + \gamma_2 \lambda + \gamma_1 = 0. \quad (22)$$

Дискриминант этого уравнения

$$D = \gamma_2^2 - 4\gamma_1 \quad (23)$$

определяет не только форму решения уравнения (20), но и величины интервалов для параметра η , в каждом из которых представлена соответствующая форма решения. Действительно, пусть $D > 0$, тогда согласно соотношениям (19), (21) и (23) получим интервал значений

$$\eta > 2 \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E\rho}{J}} \quad (24)$$

в котором решение уравнения (20) можно записать в виде

$$w_0(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (25)$$

где $\lambda_1 = \frac{-\gamma_2 + \sqrt{D}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-\gamma_2 - \sqrt{D}}{2}$.

Коэффициенты C_1 и C_2 определим из начальных условий (12) и (13), которые приводят к системе уравнений

$$\left. \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 = \delta \end{array} \right\} \quad (26)$$

где $\delta = \frac{bK_1 A_0 C}{a^2 \rho}$. Решение системы (26) имеет вид

$$C_1 = \frac{\delta}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad C_2 = \frac{\delta}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (27)$$

Если $D = 0$, то $\eta = 2 \cdot \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E\rho}{J}}$ и решение примет вид

$$w_0(t) = C_3 e^{\lambda t} + C_4 t e^{\lambda t} = (C_3 + C_4 t) e^{\lambda t}, \quad (28)$$

где $\lambda = -\frac{\gamma_2}{2}$.

Из начальных условий (12), (13) найдем $C_3 = 0$, $C_4 = \delta$ и решение (27) примет вид

$$w_0(t) = \delta t e^{\lambda t}. \quad (29)$$

Если $D < 0$, то получаем для параметра η интервал

$$0 < \eta < 2 \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E\rho}{J}}. \quad (30)$$

Обозначим $D_1 = |D|$, тогда имеем комплексно-сопряженные корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = -\frac{\gamma_2}{2} + j \frac{\sqrt{D_1}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{\gamma_2}{2} - j \frac{\sqrt{D_1}}{2},$$

где $j = \sqrt{-1}$ и решение примет вид

$$w_0(t) = e^{-\frac{\gamma_2 t}{2}} \cdot \left(C_5 \cos\left(\frac{\sqrt{D_1}}{2} t\right) + C_6 \sin\left(\frac{\sqrt{D_1}}{2} t\right) \right). \quad (31)$$

Из начальных условий находим

$$C_5 = 0, \quad C_6 = \frac{2\delta}{\sqrt{D_1}}. \quad (32)$$

Следовательно, для рассматриваемого интервала η решение уравнения (20) запишем в виде

$$w_0(t) = \frac{2\delta}{\sqrt{D_1}} e^{\frac{-\gamma_2}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{D_1}}{2}t\right). \quad (33)$$

Таким образом, получив из экспериментов величину параметра η и располагая значениями модуля упругости E в диапазоне наблюдаемых в эксперименте скоростей деформаций, выбираем функцию $w_0(t)$ в зависимости от интервала для η . Полное решение задачи о свободных колебаниях балки получим после подстановки выбранной таким образом функции $w_0(t)$ в соотношение (17), определяющее распределение прогибов балки (её упругую линию) в любой момент времени в рассматриваемом временном диапазоне.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Т.М Саламахин. Разрушение взрывом элементов конструкций. Москва: ВИА, 1961. 275 с.
- [2] Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В Розе. Теоретическая гидромеханика, часть 1. Москва: ГИФМЛ, М, 1963. 584 с.
- [3] Н.М Беляев. Сопротивление материалов. Москва: Наука, 1976. 608 с.
- [4] Н.И Безухов. Основы теории упругости, пластичности, ползучести. Высшая школа, 1968. 612 с.
- [5] Г.Т Володин. Действие взрыва зарядов конденсированных ВВ в газовой и жидкой среде. Часть 2. Взрывостойкость и гарантированное разрушение элементов конструкций. – Тула: «Левша». 2005. 160 с.

G. T. Volodin, D. S. Kochergin

DEFORMATION OF ELASTIC-VISCOUS BEAMS BY EXPLOSIVE LOAD IN WATER

Tula State University, Tula, Russia.

Abstract. An analytical solution to the problem of deformation by an explosion of a concentrated charge of a condensed explosive (HE) of a beam, the material of which is sensitive to the rate of deformation, is presented. The influence of the external environment (water) on the process and the results of deformation is taken into account by introducing the added mass. The viscosity coefficient and the modulus of elasticity in fixed intervals of strain rates are determined from experiments. For these parameters, which characterize the material of the beam under impulse deformation, an analytical relationship and a lower limit of values for the viscosity coefficient are obtained. The solution to the problem is found by the method of separation of variables in the governing equation of motion. In this case, the shape of the elastic line of the beam for each moment of time is selected based on the requirement to fulfill the boundary conditions and the principle of minimum deformation work.

Keywords: beam, explosive load, strain rate, added mass, viscosity, explosion in water, principle of least action.

REFERENCES

- [1] Salamakhin T. M. Explosion destruction of structural elements. Moscow: VIA, 1961. 275 p. (in Russian).
- [2] Kochin N. E., Kibel I. A., Rose N. V. Theoretical hydromechanics, part 1. Moscow: GIFML, 1963. 584 p. (in Russian).
- [3] Belyaev N. M. Strength of materials. Moscow, 1976. 608 p. (in Russian).
- [4] Bezukhov N. I. Fundamentals of the theory of elasticity, plasticity, creep. Moscow: Higher school, 1968. 512 p. (in Russian).
- [5] Volodin G. T. The effect of the explosion of charges of condensed explosives in a gas and liquid medium. Part 2. Explosion resistance and guaranteed destruction of structural elements. Tula: Lefty, 2005. 160 p. (in Russian).

Volodin Gennady Timofeevich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Tula State University, Tula, Russia,

Kochergin Denis Sergeevich, postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia.