Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 1 (47). С. 114–121

Е. В. Мурашкин

О ФОРМУЛИРОВКАХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА ТКАНЫХ 3D МАТЕРИАЛОВ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В статье обсуждаются формулировки определяющих дифференциальных ограничений на поверхности наращивания на случай моделирования процессов формирования 3D материала, характеризующегося дополнительными характерными директорами (направлениями выкладки волокон в тканых материалах, арматуры в бетонных конструкциях). Выведена общая форма тензорного соотношения на поверхности наращивания, при учете дополнительных выделенных направлений. Определить набор совместных рациональных инвариантов тензора напряжений и характерных директоров. Дана инвариантно–полная формулировка определяющих соотношений на поверхности наращивания. Полученные результаты могут быть использованы для постановки и решения краевых задач, моделирующих процессы синтеза тканых 3D материалов.

Ключевые слова: псевдотензор, поверхность наращивания,тканый 3D-материал, микрополярная среда, рациональный инвариант

DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.010

УДК: 539.374

Вводные замечания. Современные методы проектирования и изготовления изделий и конструкций сложной формы основаны на различных технологических процессах обработки материалов (ламинирование, фотополимеризация, стереолитография, намотка, наплавка, замораживание, абляция, сегментация, фронтальное и послойное отверждение). [1]. Эти производственные процессы аддитивных технологий связаны с синтезом изделий путем последовательного добавления материала на поверхность произвольной (часто ненормальной) формы. При этом следует отметить, что рассматриваемые ростовые процессы не включают процессы так называемого объемного роста. [2,3]: образование твердого компонента в процессе химической реакции, рост биологических тканей, костей, естественные образования фруктов [4]. В то же

Мурашкин Евгений Валерьевич
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.02.2021

время процедура выбора адекватных граничных условий на растущей поверхности является актуальной фундаментальной проблемой современной механики сплошных сред и прикладной математики. Граничные условия играют важную роль в математических моделях растущих твердых тел. Кроме того, трехмерные материалы, используемые в аддитивном производстве, а также конечные продукты, обладают микроструктурными особенностями и механическими свойствами, которые лучше всего описываются асимметричными теориями механики сплошных сред. Следовательно, для разработки математических моделей таких технологических процессов обработки 3D-материалов и изготовления 3D-изделий необходимо использовать механику роста твердого тела и формализм неравновесной термодинамики в сочетании с подходами асимметричных теорий.

Относительные тензоры естественным образом возникают в математических моделях микрополярного материала. В частности, это: вектор микровращения, тензор кривизны, вектор и тензор напряжений пар, микроинерция, пары тел. Литературный поиск показывает, что применение относительных тензоров в теориях механики сплошных сред не имеет широкого распространения, несмотря на глубокие математические исследования (алгебра, теория инвариантов и дифференцирование относительных тензоров). [5–13].

Решение прикладной задачи механики роста твердого тела иногда является сложной и трудоемкой процедурой. [14, 15]. Существенной особенностью постановки краевых задач в рамках механики роста является постановка граничных условий на границе раздела между исходным материалом и добавляемой частью. [16].

1. Краевые условия растущей поверхности в микрополярном материале. Уравнение в эйлеровых координатах можно применять для описания поведения растущих твердых тел. Здесь мы используем обозначения и терминологию принятую в исследованиях [17–19], где получены дифференциальные связи для тензора силовых напряжений. Аналитически определим распространяющуюся растущую поверхность Σ в трехмерном пространстве уравнением

$$t = \underset{*}{\tau}(x^i). \tag{1}$$

Тогда единичный вектор нормали n_i на распространяющейся растущей поверхности Σ направленный в сторону ее распространения, связан с пространственным градиентом (1)

$$n_i = c\,\partial_i \underset{*}{\tau}, \quad c = |\boldsymbol{\nabla} \underset{*}{\tau}|^{-1} \quad (t = \underset{*}{\tau}), \tag{2}$$

где c — линейная скорость распространения растущей поверхности в нормальном направлении n_k.

Как показано ранее (см., Например, [17–19]), преобразование уравнений равновесия используя формулу для актуальных компонент тензора силовых напряжений σ^{ij}

$$\sigma^{ij} = \int\limits_{\underset{*}{\tau}+0}^{t} [\partial.\sigma^{ij}(x^s, t')]dt' + \mathcal{S}^{ji} + \underset{*}{\sigma}^{ij}(x^s), \tag{3}$$

$$\mathcal{S}^{ij} = \int\limits_{\underset{*}{\tau}-0}^{\underset{*}{\tau}+0} [\partial.\sigma^{ij}(x^s, t')]dt', \tag{4}$$

позволяет вывести уравнение на движущейся растущей поверхности в виде следующих дифференциальных ограничений

$$c[\nabla_j \underset{*}{\sigma}^{ji}(x^s) + \nabla_j \mathcal{S}^{ji} + \underset{*}{X}^i(x^s)] - n_j \partial.\sigma^{ji}(x^s, t) = 0 \quad (t = \underset{*}{\tau} + 0). \tag{5}$$

В уравнениях (3)–(5) мы используем обозначения, принятые в [17–19]: $\mathcal{S}^{ji}$ — интеграл, связанный со скачком напряжений, $\underset{*}{\sigma}^{ij}(x^s) = \sigma^{ij}(x^s, t)|_{t=\underset{*}{\tau}(x^s)-0}$ — компоненты тензора напряжений, соответственно, вычисленные в момент $t = \underset{*}{\tau}(x^s) - 0$ прямо перед включением элемента в основное твердое тело, $\underset{*}{X}^i(x^s) = X^i(x^s, t)\big|_{t=\underset{*}{\tau}(x^s)+0}$. Момент $t = \underset{*}{\tau}(x^s) + 0$ соответствует моменту сразу после прикрепления элемента к растущей поверхности.

Формулы для компонент тензора парных напряжений по аналогии с уравнениями (3) можно принять в следующем виде

$$\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k} = \int\limits_{\underset{*}{\tau}+0}^{t} [\partial.\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(x^s, t')]dt' + \overset{[-1]}{\mathcal{M}}{}^{i\cdot}_{\cdot k} + \underset{*}{\overset{[-1]}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(x^s), \tag{6}$$

$$\overset{[-1]}{\mathcal{M}}{}^{i\cdot}_{\cdot k} = \int\limits_{\underset{*}{\tau}-0}^{\underset{*}{\tau}+0} [\partial.\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(x^s, t')]dt', \tag{7}$$

где $\overset{[-1]}{\mathcal{M}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ — интеграл, связанный со скачком моментных напряжений, $\underset{*}{\overset{[-1]}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(x^s) = \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(x^s, t)|_{t=\underset{*}{\tau}(x^s)-0}$ компоненты тензора моментных напряжений, вычисленные во время $t = \underset{*}{\tau}(x^s) - 0$.

Следуя процедуре, описанной в работах [17–19], для моментных напряжений получим

$$c[\nabla_i \underset{*}{\overset{[-1]}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(x^s) + \nabla_i \overset{[-1]}{\mathcal{M}}{}^{i\cdot}_{\cdot k} - 2\underset{*}{\overset{[-1]}{\tau}}_k + \underset{*}{\overset{[-1]}{Y}}_k] - n_i \partial.\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(x^s, t) = 0 \quad (t = \underset{*}{\tau} + 0). \tag{8}$$

В общем случае силовых $\underset{*}{\sigma}^{ij}$ и моментных напряжений $\underset{*}{\overset{[-1]}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ выражаются через актуальными напряжения и пары на растущей поверхности с помощью тензорных материальных уравнений следующим образом

$$\underset{*}{\sigma}^{ij} = \mathfrak{F}^{ij}(\sigma^{ij}, \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot j}, n_i, \ldots), \quad \underset{*}{\overset{[-1]}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot k} = \overset{[-1]}{\mathfrak{Z}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(\sigma^{ik}, \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}, n_k, \ldots), \tag{9}$$

Функции $\mathfrak{F}_{ij}$ и $\overset{[-1]}{\mathfrak{Z}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ могут быть определены методом черного ящика, характеризующим параметры оценки во временном интервале $\underset{*}{\tau} - 0 \leq t \leq \underset{*}{\tau} + 0$ прямо перед прикреплением элементов к растущему телу. “Черный ящик” может быть связан с различными физическими явлениями. В частности, функции $\mathfrak{F}_{ij}$ и $\overset{[-1]}{\mathfrak{Z}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ может зависеть от микроструктурных управляющих и теплофизических скрытых переменных, связанных с распространяющейся растущей поверхностью. Физический смысл дополнительных направляющих может быть связан с характерными направлениями укладки волокон в тканые композитные материалы, армирования в бетонных конструкциях, наматывания нитей в бобину и т. д. $\mathfrak{F}_{ij}$ and $\overset{[-1]}{\mathfrak{Z}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$, фактически, должен зависеть от комбинаций аргументов, которые инвариантны относительно поворотов системы координат вокруг единичного вектора нормали n_k.

2. Система совместных алгебраических относительных инвариантов аргументов тензорной функции Как видно из обсуждения в предыдущем разделе, относительные тензоры, связанные с растущим твердым телом и распространяющейся растущей поверхностью, являются единичным вектором нормали, тензорами силы и связующих напряжений. Именно тензорные объекты определяют напряженно-деформированное состояние микрополярного материала, нарастающего на растущей поверхности. В дальнейшем разумно учесть единичный вектор нормали n_i, который определяет локальную геометрию растущей поверхности, и ввести базовые векторы локальной ортонормированной системы координат, включающие единичный вектор нормали n_i и два независимых касательные векторы $\underset{1}{\tau}_i$ и $\underset{2}{\tau}_i$ в касательной плоскости к растущей поверхности.

На протяжении всей статьи мы имеем дело с тензорами и векторами второго ранга. Рассмотрим системы независимых инвариантов исследуемых тензорных объектов. Проблема полноты системы инвариантов подробно исследуется в [8]. Полная система этих инвариантов тензора второго ранга $T^{i\cdot}_{\cdot j}$, взаимно ортогональный единичный контравариантный вектор p^k и единичный ковариантный вектор q_k в трехмерном пространстве состоит из

$$I_1, \quad I_2, \quad I_3, \quad \mathbf{q}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{p}, \quad \mathbf{q}\cdot\mathbf{T}^2\cdot\mathbf{p}. \tag{10}$$

Теорема Гамильтона–Кэли остается справедливой и для псевдотензоров. В рассматриваемом случае получаем

$$t^i = n_j\sigma^{ji}, \quad \overset{[-1]}{m}_s = n_k \overset{[-1]}{\mu}{}^{k\cdot}_{\cdot s}, \quad \underset{2}{t}_s = n_j\sigma^{ji}\sigma_{is}, \quad \underset{2}{\overset{[-2]}{m}}_i = n_k \overset{[-1]}{\mu}{}^{k\cdot}_{\cdot s} \overset{[-1]}{\mu}{}^{s\cdot}_{\cdot i}. \tag{11}$$

Полная система совместных алгебраических рациональных относительных инвариантов может быть разработана согласно списку инвариантов (10) за счет совместных внутренних произведений рассматриваемых векторов (11). Таким образом, рациональная система алгебраических рациональных относительных инвариантов тензора

σ^{ij} и векторов n_k и $\underset{1}{\tau}_i$

$$
\begin{gathered}
\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n},\quad \underset{2}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}^2\cdot\mathbf{n},\quad \mathbf{t}\cdot\mathbf{t},\quad \mathbf{t}_\perp\cdot\mathbf{t}_\perp,\\
\mathbf{t}\cdot\underset{2}{\mathbf{t}},\quad \mathbf{t}_\perp\cdot\underset{2}{\mathbf{t}}_\perp,\quad \underset{2}{\mathbf{t}}\cdot\underset{2}{\mathbf{t}},\quad \underset{2}{\mathbf{t}}_\perp\cdot\underset{2}{\mathbf{t}}_\perp.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Аналогичная система для тензора $\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ и векторов n_k и $\underset{1}{\tau}_i$ записывается в виде

$$
\begin{gathered}
\overset{[-1]}{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{n}\cdot\overset{[-1]}{\boldsymbol{\mu}}\cdot\mathbf{n},\quad \underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{n}\cdot\overset{[-1]}{\boldsymbol{\mu}}\cdot\overset{[-1]}{\boldsymbol{\mu}}\cdot\mathbf{n},\quad \overset{[-1]}{\mathbf{m}}\cdot\overset{[-1]}{\mathbf{m}},\quad \overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp\cdot\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp,\\
\overset{[-1]}{\mathbf{m}}\cdot\underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}},\quad \overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp\cdot\underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}}_\perp,\quad \underset{2}{\mathbf{m}}\cdot\underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}},\quad \underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}}_\perp\cdot\underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}}_\perp.
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Совместные инварианты тензоров σ^{ij} и $\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ определяются согласно

$$
\begin{gathered}
\mathbf{t}\cdot\overset{[-1]}{\mathbf{m}},\quad \mathbf{t}_\perp\cdot\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp\quad \mathbf{t}\cdot\underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}},\quad \mathbf{t}_\perp\cdot\underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}}_\perp,\\
\overset{[-1]}{\mathbf{m}}\cdot\underset{2}{\mathbf{t}},\quad \overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp\cdot\underset{2}{\mathbf{t}}_\perp,\quad \underset{2}{\mathbf{t}}\cdot\underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}},\quad \underset{2}{\mathbf{t}}_\perp\cdot\underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}}_\perp.
\end{gathered}
\tag{14}
$$

Как видим, система совместных алгебраических рациональных относительных инвариантов, представленная уравнениями (12)–(14) является полной, но приводимой. Инварианты не являются независимыми и могут быть исключены из рассмотрения в силу очевидных рациональных сизигий (например, по теореме Пифагора).Более того, совместные алгебраические рациональные относительные инварианты высшего порядка, включающие кубы и биквадраты силовых и моментных напряжений следует исключить из рассмотрения согласно теореме Гамильтона–Кэли [8].

Таким образом, неприводимая полная система совместных алгебраических рациональных относительных инвариантов тензора силовых напряжений σ^{ij}, моментных напряжений $\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ и векторов n_k и $\underset{k}{\tau}_i$ может быть сведена к

$$
\mathbf{t}\cdot\mathbf{n},\quad \underset{2}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{n},\quad \mathbf{t}\cdot\mathbf{t},\quad \overset{[-1]}{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{n},\quad \underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}}\cdot\mathbf{n},\quad \overset{[-1]}{\mathbf{m}}\cdot\overset{[-1]}{\mathbf{m}},\quad \mathbf{t}\cdot\overset{[-1]}{\mathbf{m}},\quad \mathbf{t}_\perp\cdot\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp.
\tag{15}
$$

Такая система инвариантов будет нечувствительна к повороту локальной сети координат $(n_i,\ \underset{1}{\tau}_i,\ \underset{2}{\tau}_i)$ вокруг единичного вектора нормали n_i к распространяющейся поверхности наращивания Σ.

ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Berman. 3-D printing: The new industrial revolution // Business Horizons. 2012. Т. 55. С. 155–162.

[2] Epstein M. Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // International Journal of Plasticity. 2000. Т. 16. С. 951–978.

[3] A. Maugin G. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials // Journal of Mechanics of Materials and Structures. 2009. с. 731–741.

[4] A. Goriely. The mathematics and mechanics of biological growth. New York: Springer, 2017. xxii + 646 с.

[5] Veblen O. Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Т. 26. С. 373–377.

[6] O. Veblen. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: Cambridge University Press, 1927. 102 с.

[7] T. Levi-Civita. The absolute differential calculus (calculus of tensors). London & Glasgow: Blackie & Son Limited, 1927. 450 с.

[8] B. Gurevich G. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen: P. Noordhoff, 1964.
[9] A. Einstein. General Relativity; an Einstein Centenary Survey. Cambridge: Cambridge University Press, 1979. 937 c.
[10] A. Schouten J. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1951. 434 c.
[11] S. Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 c.
[12] Synge J. L. Schild A. Tensor calculus. New York: Courier Corporation, 1978. T. 5. 334 c.
[13] J. Das A. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Springer Science & Business Media, 2007. xii+290 c.
[14] V. Southwell R. An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists. London: Oxford Univ. Press, 1936.
[15] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2014. T. 14. C. 199–209.
[16] Arutyunyan N. Kh. Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // J. Appl. Math. Mech. 1984. T. 48. C. 1–10.
[17] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. 2019. T. 23. C. 646–656.
[18] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a Class of Constitutive Equations on Propagating Growing Surface // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. I.Ya. Yakovlev. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2019. C. 11–29.
[19] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids // Mechanics of Solids. 2019. T. 54. C. 1157–1164.

E. V. Murashkin

ON THE BOUNDARY CONDITIONS FORMULATION IN THE PROBLEMS OF SYNTHESIS OF WOVEN 3D MATERIALS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The article discusses the formulation of the defining differential constraints on the build-up surface in the case of modeling the processes of forming a 3D material characterized by additional characteristic directors (directions of laying fibers in woven materials, reinforcement in concrete structures). The general form of the tensor relation on the growing surface is derived, taking into account the additional selected directions. Determine the set of joint rational invariants of the stress tensor and characteristic directors. An invariant-complete formulation of the constitutive relations on the surface of the build-up is given. The results obtained can be used to formulate and solve boundary value problems that simulate the processes of synthesis of woven 3D materials.

Keywords: pseudotensor, growing surface, 3D woven material, micropolar medium, rational invariant

REFERENCES

[1] B. Berman. 3-D printing: The new industrial revolution // Business Horizons. 2012. T. 55. C. 155–162.
[2] Epstein M. Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // International Journal of Plasticity. 2000. T. 16. C. 951–978.
[3] A. Maugin G. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials // Journal of Mechanics of Materials and Structures. 2009. c. 731–741.
[4] A. Goriely. The mathematics and mechanics of biological growth. New York: Springer, 2017. xxii + 646 c.
[5] Veblen O. Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. T. 26. C. 373–377.
[6] O. Veblen. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: Cambridge University Press, 1927. 102 c.
[7] T. Levi-Civita. The absolute differential calculus (calculus of tensors). London & Glasgow: Blackie & Son Limited, 1927. 450 c.
[8] A. Einstein. General Relativity; an Einstein Centenary Survey. Cambridge: Cambridge University Press, 1979. 937 c.
[9] A. Schouten J. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1951. 434 c.
[10] S. Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 c.
[11]
[12] Synge J. L. Schild A. Tensor calculus. New York: Courier Corporation, 1978. T. 5. 334 c.
[13] J. Das A. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Springer Science & Business Media, 2007. xii+290 c.
[14] V. Southwell R. An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists. London: Oxford Univ. Press, 1936.
[15] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2014. T. 14. C. 199–209.
[16] Arutyunyan N. Kh. Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // J. Appl. Math. Mech. 1984. T. 48. C. 1–10.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

[17] N. Radayev Yu. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2018. T. 22. C. 504–517.
[18] Courant R. Gilbert D. Methods of Mathematical Physics. Moscow, Leningrad: Gostekhteoretizdat, 1933. 528 c.
[19] Gelfand I. M. Fomin S. V. Calculus of Variations. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 228 c.
[20] M. Gunter N. A Cours of the Calculus of Variations. Moscow, Leningrad: Gostekhteoretizdat, 1941. 308 c.
[21] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On wave solutions of dynamic equations of hemitropic micropolar thermoelasticity // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2019. T. 19. C. 454–463.
[22] Radayev Yu. N. Kovalev V. A. On plane thermoelastic waves in hemitropic micropolar continua // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2019. T. 23. C. 464–474.
[23] A. Rosenfeld B. A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space. New York, 1988. ix + 471 c.
[24] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids // Mechanics of Solids. 2019. T. 54. C. 1157–1164.
[25] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. 2019. T. 23. C. 646–656.
[26] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a Class of Constitutive Equations on Propagating Growing Surface // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. I.Ya. Yakovlev. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2019. C. 11–29.
[27] R. Hamilton W. Lectures on Quaternions. Dublin, 1853. 736 c.
[28] A. Cayley. A memoir on the theory of matrices // Philosophical transactions of the Royal society of London. 1858. C. 17–37.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research projects nos. 19-51-60001, 20-01-00666.