

Ю. В. Немировский

ПРЕДЕЛЬНО ДОПУСТИМЫЕ НЕУПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ ГИБРИДНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ИНТЕНСИВНЫХ ВЗРЫВАХ

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия

Аннотация. Для гибридных прямоугольных слоистых пластин из произвольных наборов изотропных конструкционных материалов с симметричной структурой расположения слоев относительно отчетной (нейтральной) поверхности получены аналитические формулы оценок допустимой остаточной повреждаемости при воздействии интенсивных нагрузок взрывного типа. Закрепления контура предусматривают любую комбинацию из жестких или шарнирных условий отдельных сторон прямоугольного контура. В основе рассмотренной модели использованы традиционные кинематические гипотезы Кирхгофа, деформационная теория А. А. Ильюшина, принцип слабейшего звена для используемых материалов и деформационный критерий предразрушения для всех используемых фазовых материалов. Использован наиболее распространенный в практике закон изменения во времени давления на фронте взрывной волны.

Ключевые слова: гибридные прямоугольные пластины, взрывные нагрузки, деформационная теория А. А. Ильюшина, принцип слабейшего звена.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.1.47.012

УДК: 539.374

В настоящее время в нашей стране и многих зарубежных странах в практику проектирования эффективных технических устройств в области судостроения, элементов авиационной и космической техники, а также ответственных объектов гражданского строительства внедряются полиметаллические гибридные конструкции различных геометрических форм из наборов различных фазовых материалов.

© Немировский Ю. В., 2021

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiruy@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00038.

Поступила 20.03.2021

К настоящему времени разработаны и успешно апробированы разнообразные технологические способы создания гибридных полиметаллических конструкций без каких либо серьезных ограничений по их фазовому составу и топологическому расположению в конструкциях. В качестве примеров таких технологий можно указать методы склеивания, сварок, холодного и плазменного напыления, электронной наплавки и других.

Наличие такого широкого спектра разработанных технологий возбуждает надежды на возможность разработки на их основе эффективных рациональных проектов, защитных гибридных конструкций для эффективного гашения энергии интенсивных воздействий воздушных, подземных и подводных взрывов. К сожалению, разработки аналитических и численных методов оценок степени повреждаемости гибридных конструкций при воздействии нагрузок взрывного типа значительно отстают от практических инженерных потребностей. В частности, автору не удалось найти в научной литературе каких-либо методов решения задач динамического деформирования гибридных прямоугольных пластин при учете реальных диаграмм деформирования фазовых материалов.

В данной работе сделана попытка в какой-то мере восполнить этот пробел.

Будем рассматривать такие слоистые пластинки из изотропных материалов, каждый из которых находится в обобщенном плоском напряженном состоянии и деформируется подчиняясь законам деформационной теории пластичности А.А. Ильюшина. Считаем, что слои деформируются при изгибе без проскальзываний и расположены попарно симметрично относительно отсчетной (нейтральной плоскости) $z = 0$ декартовой ортогональной системы координаты (x, y, z) .

Обозначим толщины фазовых слоев Δ_α , $(\alpha = 1, 2, \dots, \beta)$, а границы их раздела в направлении оси z через h_δ

$$h_\delta = \sum_{\alpha=1}^{\delta} \Delta_\alpha. \quad (1)$$

Тогда связь напряжений $\sigma_{x\alpha}$, $\sigma_{y\alpha}$, $\sigma_{xy\alpha}$ и деформаций $\varepsilon_{x\alpha}$, $\varepsilon_{y\alpha}$, $\varepsilon_{xy\alpha}$ в фазовом α -слое будет иметь вид

$$\sigma_{x\alpha} = \frac{\sigma_{u\alpha}}{\varepsilon_{u\alpha}} (2\varepsilon_{x\alpha} - \varepsilon_{y\alpha}), \quad \sigma_{y\alpha} = \frac{\sigma_{u\alpha}}{\varepsilon_{u\alpha}} (2\varepsilon_{y\alpha} - \varepsilon_{x\alpha}), \quad \sigma_{xy\alpha} = \frac{\sigma_{u\alpha}}{\varepsilon_{u\alpha}} \varepsilon_{xy\alpha}. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{u\alpha} &= [\sigma_{x\alpha}^2 - \sigma_{x\alpha}\sigma_{y\alpha} + \sigma_{y\alpha}^2 + 3\sigma_{xy\alpha}^2]^{1/2}, \\ \varepsilon_{u\alpha} &= \frac{2}{\sqrt{3}} [(\varepsilon_{x\alpha} + \varepsilon_{y\alpha})^2 - \varepsilon_{x\alpha}\varepsilon_{y\alpha} + \varepsilon_{xy\alpha}^2]^{1/2}, \end{aligned} \quad (3)$$

$\sigma_{u\alpha}$, $\varepsilon_{u\alpha}$ – соответственно интенсивность напряжений и деформаций в материале α – слоя рассматриваемой конструкции.

Для удобства выполнения конкретных расчетов необходимо использовать однотипные в математической формулировке аппроксимации реальных диаграмм деформирования. В частности, можно использовать зависимости

$$\sigma_{u\alpha} = E_\alpha \varepsilon_{u\alpha} + B_\alpha \varepsilon_{u\alpha}^3, \quad (4)$$

в которых [2], E_α – модуль упругости, а

$$B_\alpha = \frac{4E_\alpha^3}{27(\sigma_\alpha^*)^2} = -\frac{E_\alpha}{3(\varepsilon_\alpha^*)^2}, \quad \varepsilon_\alpha^* = \frac{3\sigma_\alpha^*}{2E_\alpha}, \quad (5)$$

здесь σ_α^* – предел прочности, ε_α^* – предельно допустимая деформация (начала разупрочнения) на диаграмме растяжения образца материала α -слоя.

В соответствии с известными гипотезами Кирхгофа связь деформаций $\varepsilon_{x\alpha}$, $\varepsilon_{y\alpha}$, $\varepsilon_{xy\alpha}$ с прогибом $w(x, y, t)$ отсчетной поверхности пластинки определяется формулами

$$\varepsilon_{x\alpha} = z\kappa_x, \quad \varepsilon_{y\alpha} = z\kappa_y, \quad \varepsilon_{xy\alpha} = z\kappa_{xy}, \quad h_{\alpha=1} \leq z \leq h_\alpha, \quad h_0 = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \beta, \quad (6)$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (7)$$

w – прогиб, t – время, κ_x , κ_y , κ_{xy} – изменение кривизны и кручения отсчетной плоскости в процессе динамического деформирования.

Возникающие при изгибе моменты будут связаны с напряжениями следующими зависимостями

$$M_x = \sum_{\alpha=1}^{\beta} \left(\int_{h_{\alpha-1}}^{h_\alpha} \sigma_{x\alpha} z dz \right), \quad M_y = \sum_{\alpha=1}^{\beta} \left(\int_{h_{\alpha-1}}^{h_\alpha} \sigma_{y\alpha} z dz \right), \quad (8)$$

$$M_{xy} = \sum_{\alpha=1}^{\beta} \left(\int_{h_{\alpha-1}}^{h_\alpha} \sigma_{xy\alpha} z dz \right)$$

и при учете соотношений (1)-(7) могут быть представлены в форме

$$M_x = C(1 + R\kappa_u)(2\kappa_x - \kappa_y), \quad M_y = C(1 + R\kappa_u)(2\kappa_y - \kappa_x), \quad (9)$$

$$M_{xy} = C(1 + R\kappa_u)\kappa_{xy},$$

$$\kappa_u = (\kappa_x^2 + \kappa_x\kappa_y + \kappa_y^2 + \kappa_{xy}^2)^{1/2}, \quad (10)$$

$$C = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^{\beta} E_\alpha (h_\alpha^3 - h_{\alpha-1}^3), \quad R = \frac{3 \sum_{\alpha=1}^{\beta} B_\alpha (h_\alpha^5 - h_{\alpha-1}^5)}{5 \sum_{\alpha=1}^{\beta} E_\alpha (h_\alpha^3 - h_{\alpha-1}^3)}. \quad (11)$$

Формулы (9)-(11) позволяют описать зависимости обобщенных моментов M_x , M_y , M_{xy} от прогибов для любых структурных пакетов гибридных пластин с любыми условиями закрепления на контуре.

Для получения разрешающего уравнения для функции прогиба далее необходимо использовать известное уравнение динамического изгиба

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t), \quad (12)$$

где $q(x, y, t)$ – распределенная динамическая поверхностная нагрузка и m – поверхностная масса гибридной пластины

$$m = \frac{1}{g} \left(\sum_{\alpha=1}^{\beta} \rho_\alpha \delta_\alpha \right), \quad (13)$$

где g – ускорение силы тяжести, ρ_α – плотность материала α -слоя.

Традиционные динамические нагрузки взрывного типа, действующие на плоские преграды, равномерно распределяются по поверхности преграды и во времени развиваются в виде двух характерных участков (рис. 2)

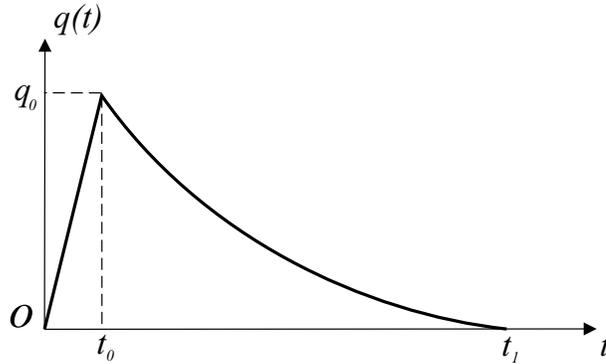


Рис. 1.

Сначала в течение короткого времени $0 \leq t \leq t_0$ нагрузка интенсивно нарастает до некоторой амплитуды q_0 по закону близкому к линейному, а затем на более протяженном интервале времени $t_0 \leq t \leq t_1$ ее интенсивность спадает до нуля практически по экспоненциальному закону. Поэтому в большинстве исследований для функции $q(t)$ используют зависимости в форме

$$q(t) = q_0 \Psi(t), \quad \Psi(t) = \frac{(t_1 t - t^2)}{(t_1 - t_0)t_0} \exp\left(\frac{t_0 - t}{\gamma}\right), \quad (14)$$

здесь q_0, γ, t_0, t_1 – заданные параметры, зависящие от типа используемых взрывчатых веществ, веса и формы заряда, расстояния от источника взрыва и свойств среды, в которой распространяется взрывная волна (воздушный, подводный или подземный взрыв). Эти параметры определяются путем выполнения специальных программ испытаний и содержатся в специально издаваемых атласах свойств взрывчатых веществ [4,5].

Рассматривая прямоугольные пластины с размерами a и b , выберем начало координат в левом нижнем угле и занумеруем стороны по часовой стрелке индексом k ($k = 1, 2, 3, 4$), рис. и будем предполагать, что по условиям закрепления контура может быть либо жестко защемлена либо шарнирно оперта.

Тогда для определенного варианта закрепления, помечаемого в дальнейшем индексом r , форму искомого прогиба $w_r(x, y, t)$ представим в виде

$$w_r(x, y, t) = U_r(t) \varphi_r(x, y), \quad (15)$$

$$\varphi_r(x, y) = x^{\mu_{1r}} (y - b)^{\mu_{2r}} (x - a)^{\mu_{3r}} y^{\mu_{4r}} \quad (16)$$

где $\mu_{kr} = 2$ в случае защемления стороны k и $\mu_{kr} = 3$ в случае ее шарнирного опирания.

Например, для варианта $r = 1$, когда все стороны будут защемлены, следует принять

$$\mu_{11} = \mu_{21} = \mu_{31} = \mu_{41} = 2.$$

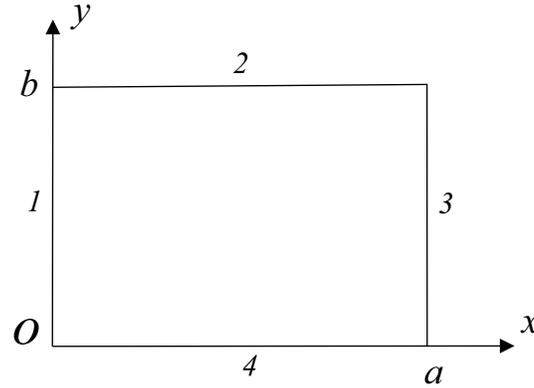


Рис. 2.

Для варианта $r = 2$, когда все стороны будут шарнирно оперты, следует принять

$$\mu_{11} = \mu_{21} = \mu_{31} = \mu_{41} = 3.$$

Для варианта $r = 3$, когда сторона 1 будет защемлена, а стороны 2, 3, 4 шарнирно оперты, следует принять

$$\mu_{13} = 2, \quad \mu_{23} = \mu_{33} = \mu_{43} = 3.$$

С помощью представления (15), (16) для любого варианта закрепления можно найти координаты x_r^* , y_r^* точек максимального прогиба из системы уравнений

$$\left. \frac{\partial \varphi_r}{\partial x} \right|_{\substack{x = x_r^* \\ y = y_r^*}} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_r}{\partial y} \right|_{\substack{x = x_r^* \\ y = y_r^*}} = 0. \quad (17)$$

В частности имеем

$$x_1^* = x_2^* = \frac{a}{2}, \quad y_1^* = y_2^* = \frac{b}{2}, \quad x_3^* = \frac{2}{5}a, \quad y_3^* = \frac{b}{2}. \quad (18)$$

В качестве предельно допустимого состояния деформирования для каждого конструкционного α -материала будем рассматривать критерии предразрушения [1-3,6], то в рамках вышеописанных принятых положений будем иметь неравенства

$$\kappa_u \leq \frac{\varepsilon_\alpha^*}{h_\alpha}, \quad \kappa_u \beta \leq \sum_{\alpha=1}^{\beta} \frac{\varepsilon_\alpha^*}{h_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \beta). \quad (19)$$

В соответствии с концепцией слабейшего звена

$$\varepsilon^* = \varepsilon_k^* = \min_{1 \leq \alpha \leq \beta} (\varepsilon_\alpha^*). \quad (20)$$

Тогда будем иметь

$$\kappa_u < \frac{\varepsilon^*}{\beta} \sum_{\alpha=1}^{\beta} h_\alpha. \quad (21)$$

заменяя κ_u его наименьшим предельным состоянием вместо (9) получим приближенные зависимости

$$M_x = \tilde{D}(2\kappa_x - \kappa_y), \quad M_y = \tilde{D}(2\kappa_y - \kappa_x), \quad M_{xy} = \tilde{D}\kappa_{xy}, \quad (22)$$

где

$$\tilde{D} = C\left(1 + \frac{R\varepsilon^*}{h_k}\right), \quad (23)$$

– модифицированная жесткость изгибания гибридной пластинки выраженная через основные физические и геометрические параметры топологической структуры рассматриваемой конструкции. Подставляя выражения (22) в уравнение (12) для прогиба $w(x, y, t)$ получим уравнение

$$-\tilde{D} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(t),$$

из которого учитывая представление (15), (16), для функции $U_r(t)$ получим обыкновенные линейное дифференциальное уравнение второго порядка в виде

$$\ddot{U}_r(t) - \frac{\tilde{D}}{m} F_{1r} U_r(t) = \frac{q_0 \psi(t)}{m F_{2r}}, \quad (24)$$

где точка обозначает производную по времени t , а

$$F_{1r} = \int_0^a \int_0^b \frac{1}{\varphi_r(x, y)} \left(\frac{\partial^4 \varphi_r}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_r}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_r}{\partial y^4} \right) dx dy, \quad F_{2r} = \int_0^a \int_0^b \frac{dx dy}{\varphi_r(x, y)}. \quad (25)$$

Начальные условия для уравнения (24) имеют вид

$$\dot{U}_r(0) = U_r(0) = 0. \quad (26)$$

Таким образом, при любых рассматриваемых способах закрепления контурных отрезков гибридных прямоугольных пластин общее решение задачи о развитии прогиба может быть выписано в явной аналитической форме на основе известных формул из справочной литературы [7]. Так как для каждой из рассматриваемых пластин коэффициенты решений содержат полный набор физических и геометрических параметров, то полученное решение открывает прямой путь к отысканию рациональных проектов гибридных защитных проектов. Полученное решение не означают разрушение конструкции, а определяет нижнюю грань допустимой амплитуды взрывной волны, при которой может наступать процесс опасного развития разрушения тонкой пластины в окрестности точки с координатами x_r^*, y_r^* . Рассматриваемые процессы происходят при заданной амплитуды взрывной волны в диапазоне времени $t_0 \leq t \leq t_1$.

Если в момент $t = t_{1r}^*$ в r -проекте происходит гашение взрывной волны, то для определения t_{1r} будем иметь уравнение

$$\dot{U}_r(t_{1r}^*) = 0.$$

Подставляя это значение $t = t_{1r}^*$ в (14) получим соответствующее значение предельно допустимую амплитуды взрывной волны q_{0r}^* и предельно допустимый прогиб $w_{1r}^*(x, y, t_{1r}^*)$.

Таким образом, варьируя параметрами внутренней структуры гибридной пластины и способами закрепления контура, можно в значительной степени управлять остаточными формами при взрывных нагружениях без разрушения конструкций.

Общее решение уравнения (24) может быть записано в форме

$$\begin{aligned} U_r(t) &= F_{1r}^0 e^{\lambda_r t} + F_{2r}^0 e^{-\lambda_r t} + \tilde{U}_r(t), \\ \dot{U}_r(t) &= \lambda_r \left(F_{1r}^0 e^{\lambda_r t} - F_{2r}^0 e^{-\lambda_r t} \right) + \dot{\tilde{U}}_r(t), \end{aligned} \quad (27)$$

где при

$$\lambda_r^2 = \frac{\tilde{D}F_{1r}}{m}, \quad p_r = \frac{1}{mF_{2r}}, \quad z_{01} = \frac{\gamma}{(t_1 - t_0)t_0}, \quad (28)$$

F_{1r}^0, F_{2r}^0 – константы, а

$$\begin{aligned} \tilde{U}_r(t) &= q_0 z_{01} (S_{1r} + S_{2r}t + S_{3r}t^2) e^{\frac{t_0-t}{\gamma}}, \\ \dot{\tilde{U}}_r(t) &= \frac{q_0 z_{01}}{\gamma} (\gamma S_{2r} + (2\gamma S_{3r} - S_{2r})t - S_{3r}t^2) e^{\frac{t_0-t}{\gamma}} \\ S_{1r} &= \frac{\gamma^2 p_r ((1-\gamma)(1-\gamma^2 \lambda_r^2) - 4\gamma)}{(1-\gamma^2 \lambda_r^2)^2}, \\ S_{2r} &= \frac{\gamma^2 p_r^2 (1-4\gamma-\gamma^2 \lambda_r^2)}{(1-\gamma^2 \lambda_r^2)^2}, \quad S_{3r} = -\frac{\gamma^2 p_r}{1-\gamma^2 \lambda_r^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Учитывая начальные условия (26) для определения F_{1r}^0, F_{2r}^0 получим систему двух линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} F_{1r}^0 + F_{2r}^0 + q_0 z_{01} S_{1r} e^{\frac{t_0}{\gamma}} &= 0, \\ F_{1r}^0 - F_{2r}^0 + \frac{q_0 z_{01}}{\gamma \lambda_r} (2S_{2r} - S_{1r}) e^{\frac{t_0}{\gamma}} &= 0. \end{aligned}$$

В некоторый момент времени $t = t_{1r}^*$ движение пластинки прекратится

$$\left. \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=t_{1r}^*} = 0.$$

Тогда для t_{1r}^* мы получим уравнение

$$(t_{1r}^*)^2 - \frac{2S_{3r} - S_{2r}}{S_{3r}} t_{1r}^* + \frac{S_{1r} - \gamma S_{2r}}{S_{3r}} + \frac{\gamma \lambda_z}{q_0 z_{01} S_{3r}} = 0.$$

Тогда амплитуда максимального остаточного прогиба будет равна

$$U_r^* = U_r(t_{1r}^*).$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Немировский Ю. В. Оптимальное проектирование гибридных тавровых конструкций по предельно допустимым деформациям // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3(29). С. 76–84
- [2] Немировский Ю. В. Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С.26-37
- [3] Немировский Ю. В. Динамика гибридных упрочняющихся и вязкопластических балок при взрывных воздействиях // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4(46). С.115-123
- [4] Расторгуев Б. С., Плотников А. И., Хуснутдинов Д. Э. Проектирование зданий и сооружений при аварийных взрывных воздействиях. М. : Изд-во АСВ, 2007. 152 с.
- [5] Невская Е. Е. Основные методы оценки ударных волн при аварийных взрывах, принципы проектирования взрывоустойчивых зданий и сооружений // Безопасность труда в промышленности. 2017. № 9. С. 20-29
- [6] Немировский Ю. В. Динамическое поведение полиметаллических круглых пластин из упрочняющихся материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3(29). С.3-10
- [7] Бронштейн И. И., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, 1986. 544 с.

Yu. V. Nemirovskii

MAXIMUM PERMISSIBLE INELASTIC DEFORMATIONS OF HYBRID RECTANGULAR PLATES DURING INTENSE EXPLOSIONS

*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch
of the RAS, Novosibirsk, Russia*

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

Abstract. For hybrid rectangular layered plates from arbitrary sets of isotropic structural materials with a symmetric structure of the arrangement of layers relative to the reporting (neutral) surface, analytical formulas for assessing the permissible residual damage under the action of intense explosive loads are obtained. Contour anchors provide for any combination of rigid or hinge conditions of individual sides of a rectangular contour. The considered model is based on the traditional kinematic hypotheses of Kirchhoff, the deformation theory A. A. Ilyushin, the principle of the weakest link for the materials used and the deformation criterion for pre-fracture for all used phase materials. The most widespread law of time variation of pressure at the front of a blast wave is used.

Keywords: hybrid rectangular plates, explosive loads, deformation theory A. A. Ilyushin, the principle of the weakest link.

REFERENCES

- [1] Nemirovskiy Yu. V. Optimal design of hybrid T-structures for maximum permissible deformations // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State Mechanics. 2016. No. 3 (29). P. 76-84
- [2] Nemirovskiy Yu. V. Prelimit deformation of hybrid reinforced concrete structures // Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2018. No. 3 (37). C.26-37
- [3] Nemirovskiy Yu.V. Dynamics of hybrid hardening and viscoplastic beams under explosive impacts //Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2020. No. 4 (46). C.115-123
- [4] Rastorguev B. S., Plotnikov A. I., Khusnutdinov DZ Design of buildings and structures under emergency explosive effects. Moscow: ASV Publishing House, 2007.152 p.
- [5] Nevskaya E. E. Basic methods for assessing shock waves in emergency explosions, design principles for explosion-proof buildings and structures // Bezopasnost truda v promyshlennosti. 2017. No. 9. P. 20-29
- [6] Nemirovskiy Yu. V. Dynamic behavior of polycrystalline round plates made of hardening materials //Vestnik of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2016. No. 3 (29). C.3-10
- [7] Bronshtein I. I., Semendyaev K. A. Mathematical handbook for engineers and university students. Moscow: Nauka, 1986.544 p.

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia.