

Ю. В. Немировский<sup>1,2</sup>, А. А. Тырымов<sup>3</sup>

## О МОДЕЛИРОВАНИИ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ В НЕТРОНУТЫХ СЛОИСТЫХ МАССИВАХ ГОРНЫХ ПОРОД

<sup>1</sup> *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
г. Новосибирск, Россия*

<sup>2</sup> *Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия*

<sup>3</sup> *Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия*

**Аннотация.** Предложена структурная модель анизотропной среды для расчета напряженно-деформированного состояния в нетронутых массивах горных пород, которая учитывает ряд горнотехнических и горно-геологических факторов. Результаты аналитического решения позволили объяснить известные из практики натурных наблюдений факты (возможность превосходства горизонтальных напряжений над вертикальными, кусочно-линейный характер напряжений и т.д.), которые находились в противоречии с широко распространенными гипотезами о распределении напряжений в породных массивах.

**Ключевые слова:** теория упругости, плоская деформация, массив горных пород, слоистость

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.003

УДК: 539.3+622.831

**Введение.** Исследование линейных процессов деформирования в слоистых средах охватывает широкий круг важных вопросов. Конструкции, имеющие слоистую структуру состоящую из слоев с различными физико-механическими свойствами, широко используются в современной технике. Определенную специфику имеют задачи геомеханики, связанные с изучением упругого равновесия слоистых сред под действием сил тяжести. Актуальными остаются две основные задачи горной науки - определение

---

© Немировский Ю. В., Тырымов А. А. 2021

*Немировский Юрий Владимирович*

e-mail: nemiryuy@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, профессор, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

*Тырымов Александр Александрович*

e-mail: tyrymov2010@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Волгоградского государственного университета, Волгоград, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00038.

Поступила 20.05.2021

напряженного состояния горного массива до проведения в нем горных работ и перераспределение его в результате прохождения выработок [1,2]. Без знания естественного напряженного состояния горных пород невозможно, например, дать надежные расчеты конструкций подземных сооружений, выяснить механизм и природу таких неблагоприятных явлений, как горные удары и внезапные выбросы угля и газа. Многие вопросы тектоники, геофизики и сейсмологии требуют анализа природного поля напряжений.

В исследованиях по механике горных пород широкое распространение получил подход, в котором нетронутый массив считают однородным изотропным упругим полупространством, нагруженным собственным весом, причем при изучении его напряженного состояния обычно предполагают, что горизонтальная и вертикальная компоненты напряжения связаны между собой зависимостями, соответствующими гипотезам о гидростатическом или эмпирически-негидростатическом распределении напряжений [2]. Однако накопленный к настоящему времени большой экспериментальный объем данных свидетельствует о сложном характере распределений напряжений в массивах горных пород. В большинстве случаев в нетронutom горными работами массиве пород вертикальная компонента напряжений обусловлена весом пород вышележащей толщи. В то же время многочисленными натурными измерениями доказано, что горизонтальные напряжения могут превышать в несколько раз величину веса вышележащих пород [3]. Факт существования в нетронutom массиве горизонтальных напряжений превосходящих вертикальные часто объясняют действием современных тектонических процессов. Но экспериментальные данные говорят о том, что в областях массива пород слоистого строения, удаленных от земной поверхности уже от 5-10 метров обнаруживается эффект превышения горизонтальных напряжений над вертикальными [3]. Поэтому вывод о действии тектонических сил, сделанный только на основании того, что в нетронutom массиве пород горизонтальная составляющая напряжений превосходят вертикальные представляется неубедительным. Реальный горный массив представляет весьма сложную в механическом отношении среду, и точность решения задачи о напряженном состоянии массива в значительной степени зависит от полноты учета свойств рассматриваемой среды. Важными горно-геологическими факторами, влияющими на распределение напряжений, учет которых особенно необходим при исследовании в масштабах всего месторождения полезного ископаемого, являются расстояние от дневной поверхности, слоистость горных пород, мощность пластов, их количество, изменение напряжений по мощности пластов, рельеф земной поверхности. Однако эти факторы (особенно в совокупности) оказываются вне поля зрения исследователей. Анализ физической стороны явлений, протекающих в слоистых структурах, явно недостаточен. Для устранения этого недостатка необходимы дальнейшие аналитические и численные исследования в механике горных пород. Точные аналитические решения дают возможность строго и обоснованно изучить широкий класс упрощенных, так называемых, модельных задач и при этом выявить принципиальные качественные и количественные закономерности распределения напряжений в горных массивах.

В горно-геологической практике часто встречаются горные массивы, сложенные однообразными в петрографическом отношении породами, причем, основные элементы, обуславливающие их неоднородность, обладают незначительными линейными размерами по сравнению с масштабами исследуемого геологического объекта. В то же время массив горных пород, линейные размеры которого намного превышают размеры

выделенных элементарных блоков ("порождающих бесконечно малых элементов"), а размеры элементарных блоков, в свою очередь, значительно больше средних размеров элементов, можно в среднем считать однородным в пределах всей области, занятой данным массивом. При исследовании напряженного состояния в горном массиве такой условный переход к однородному геологическому телу позволяет дать характеристику общей картины распределения напряжений в среднем в данном массиве.

**Математическая модель. Примеры численных результатов.** Рассмотрим наклонно-слоистый массив горных пород, состоящий из большого числа свит пластов, отделённых друг от друга слоями породы. Предполагается, что упругие свойства, удельные веса и мощности однородных изотропных пластов, входящих в свиту, произвольны, но неизменны для любой из свит. Считаем также, что расстояния между свитами различаются незначительно. Кроме того, предполагается, что на плоскопараллельных линиях контакта между соседними пластами свиты, а также между крайними пластами свиты и породой существует жесткая связь. В этом случае вопрос о распределении напряжений в нетронутом горном массиве с достаточной степенью точности может быть заменен исследованием напряженно-деформированного состояния бесконечного числа наклонных плоскопараллельных слоев.

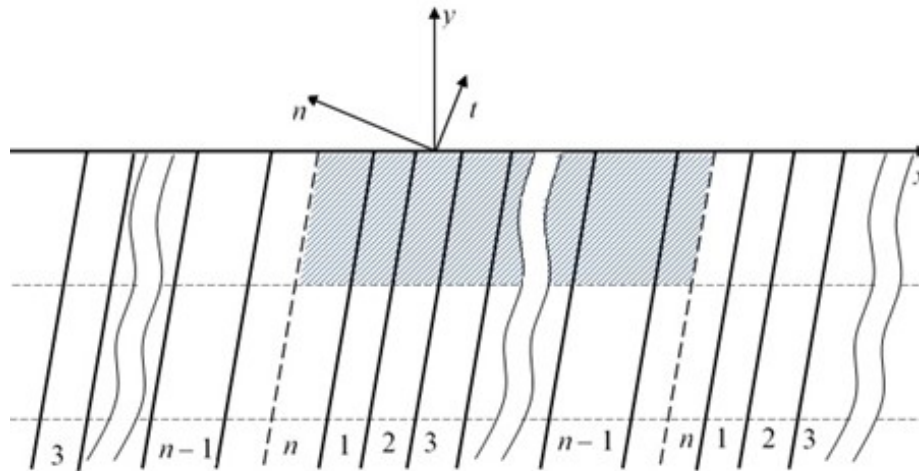


Рис. 1. Схема к расчету напряженного состояния горного массива с правильной слоистостью

Шахтное поле подобного месторождения, обладающего, как мы будем говорить, правильной слоистостью, разобьем на совокупность элементарных подобластей способом, указанным на рис. 1. Линии, осуществляющие это разбиение, проведены на рис. 1 пунктиром, а один элемент разбиения заштрихован. Система координат  $(t, n)$  получена поворотом системы координат  $(x, y)$  на угол наклона слоев к дневной поверхности. Учитывая наличие жесткого сцепления на линиях контакта частей, составляющих выделенный элемент, введем в каждой подобласти усредненные поля напряжений, деформаций, перемещений, а также усредненный удельный вес следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 \sigma_n^{(1)} &= \sigma_n^{(2)} = \dots = \sigma_n^{(n)} = \sigma_n, \\
 \sigma_{tn}^{(1)} &= \sigma_{tn}^{(2)} = \dots = \sigma_{tn}^{(n)} = \sigma_{tn}, \\
 U_t^{(1)} &= U_t^{(2)} = \dots = U_t^{(n)} = U_n, \\
 \sigma_t &= \frac{1}{H} \sum_{k=1}^n h_k \sigma_t^{(k)}, \varepsilon_n = \frac{1}{H} \sum_{k=1}^n h_k \varepsilon_n^{(k)}, \\
 \varepsilon_{tn} &= \frac{1}{H} \sum_{k=1}^n h_k \varepsilon_{tn}^{(k)}, \gamma = \frac{1}{H} \sum_{k=1}^n h_k \gamma_k
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\sigma_t, \sigma_n$  – нормальные напряжения,  $\sigma_{tn}$  – касательное напряжение,  $\varepsilon_n, \varepsilon_{tn}$  – относительная линейная деформация в направлении оси  $On$  и деформация сдвига соответственно,  $U_t$  – компонента вектора смещения в направлении оси  $Ot$ ,  $\gamma_k$  – удельный вес  $k$ -го слоя,  $h_k$  – мощность  $k$ -го слоя,  $H = \sum_{k=1}^n h_k$ ,  $n$  – количество различных по свойствам периодически чередующихся слоев горного массива.

Верхний индекс в круглых скобках в формулах (1) характеризует принадлежность к соответствующему слою, причем, значение  $k$  от 1 до  $n - 1$  относятся к пластам свиты, а значение  $k$ , равное  $n$ , к породе (обоим внешним слоям элемента). Предлагаемая модель горного массива обобщает результаты работы [4], где предполагалось, что шахтное поле представлено двоякочередующимися слоями. Кроме того, что особенно важно, в [4] напряжения внутри слоев порождающего блока не рассматривались. Заметим также, что формулы (1) являются обобщением и дальнейшим развитием применительно к механике горных пород структурного подхода В.В.Болотина [5], используемого в механике композиционных материалов.

Из условий жесткого сцепления  $U_t^{(1)} = U_t^{(2)} = \dots = U_t^{(n)} = U_t$  следует

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_t^{(1)}}{\partial t} &= \frac{\partial U_t^{(2)}}{\partial t} = \dots = \frac{\partial U_t^{(n)}}{\partial t} = \frac{\partial U_t}{\partial t} \\
 &\text{или} \\
 \varepsilon_t^{(1)} &= \varepsilon_t^{(2)} = \dots = \varepsilon_t^{(n)} = \varepsilon_t.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Обозначая модули Юнга и коэффициенты Пуассона  $k$ -го слоя через  $E_k, \nu_k$  соответственно и пользуясь известными соотношениями между деформациями и напряжениями для плоскодеформированного состояния [6]

$$\varepsilon_t^{(k)} = \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \left( \sigma_t^{(k)} - \frac{\nu_k}{1 - \nu_k} \sigma_n \right) \quad (k = \overline{1, n}) \tag{3}$$

а также соотношением (2), найдем

$$\varepsilon_t \sum_{k=1}^n \frac{h_k E_k}{1 - \nu_k^2} = \sum_{k=1}^n h_k \sigma_t^{(k)} - \sigma_n \sum_{k=1}^n \frac{h_k \nu_k}{1 - \nu_k}.$$

Отсюда с учетом четвертого соотношения в (1) получим

$$\varepsilon_t = a_{11} \sigma_t + a_{12} \sigma_n. \tag{4}$$

Здесь

$$a_{11} = H \left( \sum_{k=1}^n \frac{h_k E_k}{1 - \nu_k^2} \right)^{-1}, \quad a_{12} = - \left( \sum_{k=1}^n \frac{h_k \nu_k}{1 - \nu_k} \right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{h_k E_k}{1 - \nu_k^2} \right)^{-1}. \quad (5)$$

Пятое соотношение из (1) с помощью зависимостей

$$\varepsilon_n^{(k)} = \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \left( \sigma_n - \frac{\nu_k}{1 - \nu_k} \sigma_t^{(k)} \right),$$

выражения для  $\sigma_t^{(k)}$ , вытекающего из (3), а также формулы (4) может быть представлено в виде

$$\varepsilon_n = a_{21} \sigma_t + a_{22} \sigma_n, \quad (6)$$

где

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{22} = \frac{1}{H} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k) h_k}{(1 - \nu_k) E_k} + \left( \sum_{k=1}^n \frac{h_k \nu_k}{1 - \nu_k} \right)^2 \left( \sum_{k=1}^n \frac{h_k E_k}{1 - \nu_k^2} \right)^{-1} \right] \quad (7)$$

Наконец, из предпоследнего соотношения (1) с использованием известных формул

$$\varepsilon_{tn}^{(k)} = \frac{1}{G_k} \sigma_{tn}^{(k)} = \frac{1}{G_k} \sigma_{tn} \quad (k = \overline{1, n})$$

получим

$$\varepsilon_{tn} = \frac{1}{G} \sigma_{tn}, \quad (8)$$

где

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{H} \sum_{k=1}^n \frac{h_k}{G_k}, \quad \frac{1}{G_k} = \frac{2(1 + \nu_k)}{E_k}. \quad (9)$$

В частности, при чередовании двух слоев (пласта и породы) из формул (5), (7), (9) при  $n = 2$  будем иметь следующие выражения для упругих характеристик  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$ ,  $G^{-1}$ :

$$\begin{aligned} a_{11} &= (l + 1) (1 - \nu_1^2) (1 - \nu_2^2) R^{-1}, \\ a_{12} &= - (1 + \nu_1) (1 + \nu_2) [l \nu_1 (1 - \nu_2) + \nu_2 (1 - \nu_1)] R^{-1}, \\ a_{22} &= \left\{ \left[ (1 + \nu_2)^2 (1 - 2\nu_2) \frac{E_1}{E_2} + (1 + \nu_1)^2 (1 - 2\nu_1) \frac{E_2}{E_1} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (1 + \nu_1) (1 + \nu_2) \left[ (l^2 + 1) (1 - \nu_1 - \nu_2) + \nu_1 \nu_2 (l + 1)^2 \right] \right\} / [(l + 1) R], \\ G^{-1} &= (l + 1)^{-1} (l G_1^{-1} + G_2^{-1}), \end{aligned} \quad (10)$$

где для краткости записи введены обозначения

$$l = h_1/h_2, \quad R = l (1 - \nu_2^2) E_1 + (1 - \nu_1^2) E_2. \quad (11)$$

Применяя формулы, связывающие компоненты напряжений в локальной системе координат с их компонентами в основной системе [6]:

$$\begin{aligned}
\sigma_t &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \sigma_{xy} \sin 2\alpha, \\
\sigma_n &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - \sigma_{xy} \sin 2\alpha, \\
\sigma_{tn} &= -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{xy} \cos 2\alpha
\end{aligned} \tag{12}$$

и аналогичные формулы для компонент деформаций, вместо уравнений (4), (6), (8) получим

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= b_{11}\varepsilon_x + b_{12}\varepsilon_y + b_{13}\varepsilon_{xy}, \\
\sigma_y &= b_{21}\varepsilon_x + b_{22}\varepsilon_y + b_{23}\varepsilon_{xy}, \\
\sigma_{xy} &= b_{31}\varepsilon_x + b_{32}\varepsilon_y + b_{33}\varepsilon_{xy},
\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \frac{1}{2\Delta} [2a_{11} \sin^4 \alpha + 2a_{22} \cos^4 \alpha + (2G\Delta - a_{12}) \sin^2 2\alpha], \\
b_{22} &= \frac{1}{2\Delta} [2a_{11} \cos^4 \alpha + 2a_{22} \sin^4 \alpha + (2G\Delta - a_{12}) \sin^2 2\alpha], \\
b_{33} &= \frac{1}{4\Delta} [(a_{11} + 2a_{12} + a_{22}) \sin^2 2\alpha + 4G\Delta \cos^2 2\alpha], \\
b_{12} = b_{21} &= \frac{1}{4\Delta} [(a_{11} + 2a_{12} + a_{22} - 4G\Delta) \sin^2 2\alpha - 4a_{12}], \\
b_{13} = b_{31} &= -\frac{\sin 2\alpha}{2\Delta} [a_{11} \sin^2 \alpha + a_{22} \cos^2 \alpha + (2G\Delta - a_{12}) \cos^2 2\alpha], \\
b_{23} = b_{32} &= -\frac{\sin 2\alpha}{2\Delta} [a_{11} \cos^2 \alpha - a_{22} \sin^2 \alpha - (2G\Delta - a_{12}) \cos^2 2\alpha],
\end{aligned}$$

Здесь  $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ ,  $\alpha$  - угол наклона слоев к дневной поверхности.

Соотношения (13) позволяют заменить задачу о распределении напряжений в горном массиве с правильной слоистостью исследованием напряженно-деформированного состояния однородной, но теперь уже анизотропной полуплоскости. Это состояние может быть найдено путем решения системы из уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \gamma$$

и уравнений (13) при граничных условиях  $\sigma_y = \sigma_{xy} = 0$  на дневной поверхности при  $y = 0$  в предположении, что компоненты перемещений не зависят от координаты  $X$ , так как в полученной анизотропной среде вследствие симметрии относительно произвольной вертикальной оси отсутствует возможность для их изменения в направлении  $X$  (если не учитывать тектонических процессов). В результате получим

$$\sigma_x = \lambda \gamma y, \sigma_y = \gamma y, \sigma_{xy} = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \{ [1 - G(a_{11} + a_{22} - 2a_{12})] \sin^2 2\alpha - 4G\alpha_{12} \} R_1^{-1}, \\ R_1 &= \sin^2 2\alpha + 2G(2a_{11} \cos^4 \alpha + a_{12} \sin^2 2\alpha + 2a_{22} \sin^4 \alpha), \\ U &= -2\Delta b_{23} R_1^{-1} \gamma y^2, \quad V = 2\Delta b_{33} R_1^{-1} \gamma y^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что соотношение (15) является обобщением гипотезы А.Н.Динника [2]; коэффициент бокового давления зависит при этом не только от упругих свойств горных пород, но и от угла их падения, причем, формула А.Н.Динника представлена в (15) как предельный случай для изотропной полуплоскости, если принять

$$E_1 = E_2 = \dots = E_n, \quad \nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n, \quad ,$$

а также для горизонтальных слоев, у которых одинаков коэффициент Пуассона ( $\alpha = 0, \nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n$ ).

Наряду с изучением общих закономерностей напряженного состояния в анизотропном горном массиве, полученном с помощью усреднения, наибольший интерес представляет распределение напряжений внутри выделенных макроструктурных "бесконечно малых элементарных объемов имеющих кусочно-однородное строение, т.е. выявление особенностей поведения напряжений в пластах свиты ( $\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}$ ), где  $k = 1, 2, \dots, n-1$  и в породе ( $\sigma_x^{(n)}, \sigma_y^{(n)}, \sigma_{xy}^{(n)}$ ). Это связано с тем, что сведения о напряженном состоянии в отдельных слоях важно знать и использовать уже на стадии проектирования горных предприятий при решении многофакторной задачи по созданию в определенном смысле оптимального проекта. Так, например, их необходимо учитывать при выборе расположения и направления проведения горизонтальных выработок, в расчетах и рекомендациях по применению тех или иных способов крепления.

Искомое распределение напряжений определим, применяя формулы преобразования компонента тензора напряжений при переходе от локальной системы координат  $(t, n)$  к основной системе  $(x, y)$  и учитывая, что в силу жесткого сцепления слоев внутри "элементарной" подобласти

$$\sigma_n^{(1)} = \sigma_n^{(2)} = \dots = \sigma_n^{(n)} = \sigma_n \quad \text{и} \quad \sigma_{tn}^{(1)} = \sigma_{tn}^{(2)} = \dots = \sigma_{tn}^{(n)} = \sigma_{tn}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)} &= \sigma_t^{(k)} \cos^2 \alpha + \sigma_n \sin^2 \alpha - \sigma_{tn} \sin 2\alpha, \\ \sigma_y^{(k)} &= \sigma_t^{(k)} \sin^2 \alpha + \sigma_n \cos^2 \alpha + \sigma_{tn} \sin 2\alpha, \\ \sigma_{xy}^{(k)} &= (\sigma_t^{(k)} - \sigma_n) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{tn} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Подставляя теперь выражения (14) в формулы (12), будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \gamma (\lambda \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) y, \quad \sigma_n = \gamma (\lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) y, \\ \sigma_{tn} &= \gamma (1 - \lambda) y \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя затем формулы (16), а также соотношения (3), (4) и (17), получим распределение напряжений в любом  $k$ -ом слое ( $k=1,2,\dots,n$ ):

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(k)} &= \left[ \frac{E_k}{1-\nu_k^2} a_{11} (\lambda \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \cos^2 \alpha + \left( \frac{E_k}{1-\nu_k^2} a_{12} \cos^2 \alpha + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\nu_k \cos 2\alpha + \sin^2 \alpha}{1-\nu_k} \right) (\lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - \frac{1}{2} (1-\lambda) \sin^2 2\alpha \right] \gamma y, \\ \sigma_y^{(k)} &= \left[ \frac{E_k}{1-\nu_k^2} a_{11} (\lambda \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \sin^2 \alpha + \left( \frac{E_k}{1-\nu_k^2} a_{12} \sin^2 \alpha + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\cos^2 \alpha - \nu_k \cos 2\alpha}{1-\nu_k} \right) (\lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \frac{1}{2} (1-\lambda) \sin^2 2\alpha \right] \gamma y, \\ \sigma_{xy}^{(k)} &= \left[ \frac{E_k}{1-\nu_k^2} a_{11} (\lambda \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \frac{E_k a_{12} + (1+\nu_k)(2\nu_k-1)}{1-\nu_k^2} (\lambda \sin^2 \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 \alpha) + (1-\lambda) \cos 2\alpha \right] \gamma y \sin \alpha \cos \alpha.\end{aligned}\tag{18}$$

В частности, если чередуются два слоя (пласт и порода), то из формулы (18) с учетом (10) для нормальных компонент тензора напряжений получим

$$\sigma_x^{(1)} = \gamma A R^{-1} y, \quad \sigma_y^{(1)} = \gamma B R^{-1} y, \quad \sigma_x^{(2)} = \gamma C R^{-1} y, \quad \sigma_y^{(2)} = \gamma D R^{-1} y,\tag{19}$$

где

$$\begin{aligned}A &= \lambda l (1-\nu_2^2) E_1 + c_2 E_1 \cos^2 \alpha + a_1 E_2, \\ B &= l (1-\nu_2^2) E_1 + c_2 E_1 \sin^2 \alpha + b_1 E_2, \\ C &= l (a_2 E_1 + c_1 E_2 \cos^2 \alpha) + \lambda (1-\nu_1^2) E_2, \\ D &= l (b_2 E_1 + c_1 E_2 \sin^2 \alpha) + (1-\nu_1^2) E_2.\end{aligned}$$

Здесь для краткости записи принято

$$\begin{aligned}a_k &= (1+\nu_k) [\lambda (1+\cos^2 \alpha - \nu_k) \sin^2 \alpha + (\nu_k - \sin^2 \alpha) \cos^2 \alpha], \\ b_k &= (1+\nu_k) [\lambda (\nu_k + \cos^2 \alpha) \sin^2 \alpha + (1 - \sin^2 \alpha - \nu_k) \cos^2 \alpha], \\ c_k &= (1+\nu_k) [\lambda (\cos^2 \alpha - \nu_k) + \sin^2 \alpha - \nu_k], \quad (k=1,2)\end{aligned}$$

Рассмотрим, наряду с "усредненным коэффициентом бокового давления"  $\lambda$ , соответствующие отношения горизонтальных напряжений к вертикальным в пластах свиты и в породе. Они определяются по формулам

$$\lambda_k = \sigma_x^{(k)} / \sigma_y^{(k)}, \quad (k=1,2,\dots,n)\tag{20}$$

и существенно зависят от упругих свойств горных пород, составляющих слоистый массив, а также от угла падения слоев. Следует отметить, что формула Динника представлена в (20) как предельный случай для изотропной полуплоскости и для горизонтальных пластов, у которых одинаков коэффициент Пуассона. В этих случаях



$\lambda = \lambda_k = \nu(1 - \nu)^{-1}$ . Если слои горизонтальные ( $\alpha = 0$ ), то из формул (18), (20) получаем  $\lambda_k = \nu_k(1 - \nu_k)^{-1}$ .

Уже в этом частном случае коэффициент бокового давления в ниже лежащем слое может быть меньше соответствующего коэффициента в слое, лежащем выше.

Отметим также, что в полученных решениях напряжения в слоистых горных массивах имеют в зависимости от глубины кусочно-линейный характер, т.е. именно такой, какой неоднократно отмечался при обработке результатов натуральных замеров [3].

Для слоев вертикального залегания ( $\alpha = \pi/2$ ) из формул (20) имеем

$$\lambda_k = \lambda \left[ \frac{E_k}{1 - \nu_k^2} (a_{11} + \lambda a_{12}) + \lambda \frac{\nu_k}{1 - \nu_k} \right]^{-1} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

где  $\lambda = -a_{12}/a_{22}$ , причем  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  представлены в (5), (7). В частности, если чередуются два слоя (пласт и порода), то отсюда получим

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda R \{ \nu_1(1 + \nu_1) \lambda E_2 + E_1(1 + \nu_2) [1 + l - \nu_2(1 + l + \lambda)] \}^{-1}, \\ \lambda_2 &= \lambda R \{ l \nu_2(1 + \nu_2) \lambda E_1 + E_2(1 + \nu_1) [1 + l - \nu_1(1 + l + \lambda)] \}^{-1}, \end{aligned}$$

где  $\lambda$  вычисляется с помощью (15), а  $l$  и  $R$  определяются по формулам (11).

Исследования коэффициента бокового давления  $\lambda$  и выражений для  $\lambda_e$ , определяющих отношения горизонтальных напряжений к вертикальным в пластах свиты и в породе, показывают, что напряженное состояние горного массива может носить сложный характер, нередко значительно отличающийся от "геостатического". Расчеты показали, что отношение  $\sigma_x/\sigma'_o$  в однородной анизотропной среде для реальных горных пород изменяется в пределах 0,2-0,7 и не превосходит единицу. Заметим, что отличие напряженного состояния от динниковского характера усиливается с возрастанием относительной мощности слоев и с ростом различия модулей упругости слоев, т.е. с усилением анизотропии в свойствах слоистого массива. Характерным поведением усредненного коэффициента бокового давления  $\lambda$  от угла наклона слоев является его рост при переходе от горизонтального залегания слоев к пологим, а затем убывание для крутопадающих и вертикальных слоев. Наряду с изучением общих закономерностей напряженного состояния в анизотропном горном массиве, отметим некоторые особенности в поведении отношений горизонтальных напряжений к вертикальным, В расчетах ограничимся случаем двоякочередующихся слоев.

На рис.2 представлена зависимость отношения горизонтальных напряжений к вертикальным от угла наклона слоев, как для усредненного коэффициента бокового давления, так и для пласта и породы. В расчетах принято:  $l=0,1$ ;  $E_1/E_2 = 0,1$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ . Отношение горизонтальных напряжений к вертикальным в породе  $\lambda_2$  имеет поведение, близкое к поведению  $\lambda$ . Соответствующее же отношение в пласте несколько убывая (при  $\nu_1 = \nu_2$ ) с переходом от горизонтальной слоистости к пологим слоям, затем увеличивается для крутопадающих слоев, достигая в случае вертикальных слоев наибольших значений, превосходящих 1.

На рис.3 показано влияние коэффициента Пуассона пласта на отношение горизонтальных напряжений к вертикальным в пласте. В расчетах принято:  $l=0,1$ ;  $E_1/E_2 = 0,1$ ,  $\nu_2 = 0,3$ . Значения коэффициента Пуассона для пласта  $\nu_1 = 0,2$  (график 1) и  $\nu_1 = 0,1$  (график 2). При коэффициентах Пуассона породы, превосходящих коэффициент Пуассона пласта, отношение  $\sigma_x/\sigma_y$  в пласте (в отличие от случая  $\nu_1 = \nu_2$ ) с

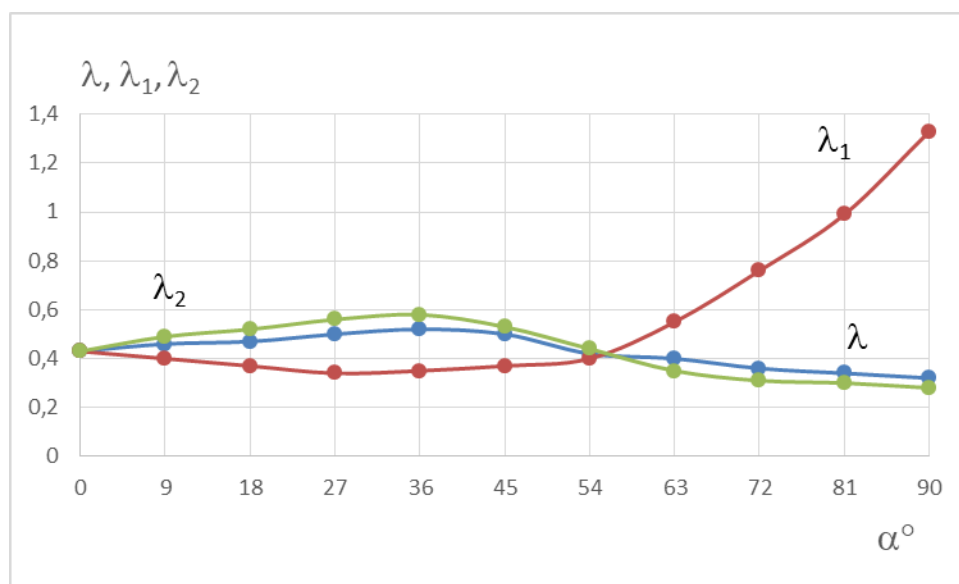


Рис. 2. Влияние угла наклона слоев на значения коэффициента бокового давления

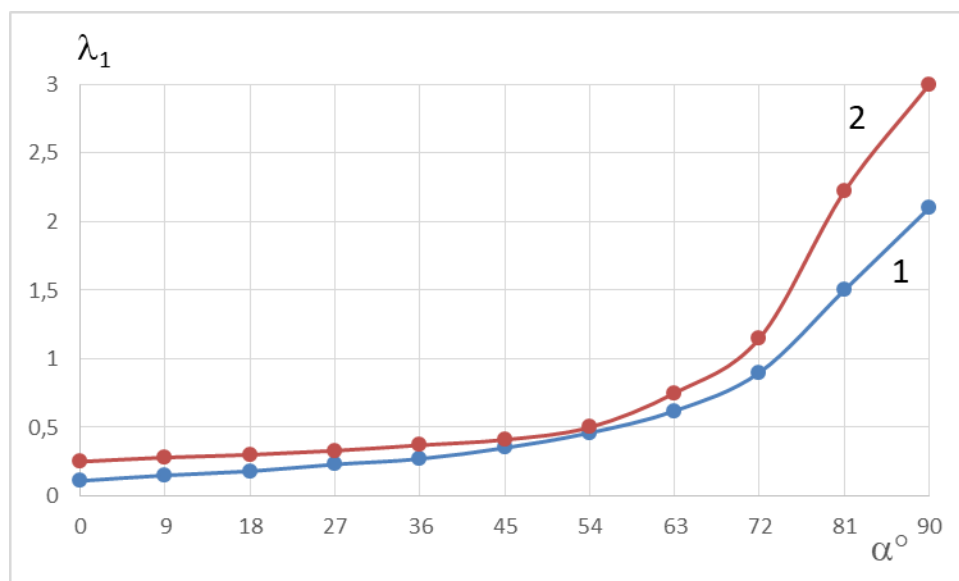


Рис. 3. Зависимость отношения горизонтальных напряжений к вертикальным в пласте при различных значениях коэффициента Пуассона

увеличением угла наклона слоев к дневной поверхности монотонно растет (рис. 3). При этом, как показывают расчеты, в крутопадающих и вертикальных пластах горизонтальные напряжения в 2-3 раза могут превосходить вертикальные.

Результаты расчетов, выполненных в широком диапазоне изменения параметров анизотропной среды, позволяют убедиться в существенном влиянии упругих постоянных слоев и угла падения на распределение напряжений в слоистом горном массиве. Предлагаемая модель слоистой среды, основанная на упругом взаимодействии слоев с различными физико-механическими свойствами под действием сил гравитации в состоянии объяснить результаты натуральных измерений о превышении горизонтальных напряжений над вертикальными.

**Заключение.** В статье разработана методика аналитического исследования напряженного состояния в нетронутых слоистых торных массивах. Предложена модель, которая с учетом ряда горно-геологических факторов (влияния дневной поверхности, взаимодействия слоев, упругих характеристик, угла падения) позволяет определить напряженно-деформированное состояние в весомом наклонно-слоистом горном массиве, состоящем из большого числа свит пластов, отделенных друг от друга слоями породы, в предположении, что упругие свойства, удельные веса и мощности одно родных изотропных пластов, входящих в свиту, произвольны, но неизменны для каждой из свит, а также, что расстояния между свитами различаются незначительно. Проведено исследование напряженного состояния в среднем в данном массиве, а также изучено распределение напряжений в отдельных слоях массива. Получены соотношения между горизонтальными и вертикальными компонентами напряжений (как для анизотропной заменяющей среды в целом, так и для отдельных слоев), обобщающие известную гипотезу акад. А.Н. Динника. Коэффициенты бокового давления зависят при этом от упругих свойств пластов свит и вмещающих пород, мощностей слоев и угла падения. Показана возможность превосходства горизонтальных напряжений над вертикальными. Во всех указанных случаях для компонент напряжений и перемещений получены аналитические выражения.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шемякин Е. И. Две задачи механики горных пород, связанные с освоением глубоких месторождений руды и газа // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1975. №6. С. 3–9.
- [2] Курленя М.В., Серяков В.М., Еременко А.А. Техногенные геомеханические поля напряжений. Новосибирск: Наука, 2005. 264 с.
- [3] Отражение современных полей напряжений и свойств пород в состоянии скальных массивов. Сб. научн. работ (под ред. д-ра техн. наук проф. И.А. Турчанинова) Апатиты : Изд-во КФ АН СССР, 1977. 156 с.
- [4] Немировский Ю. В., Тырымов А. А. Напряженное состояние в нетронutom массиве горных пород при наличии слоистости и искривления пластов. Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1977. №2. С.180–25.
- [5] Болотин В. В. Плоские задачи теории упругости для деталей из армированных материалов. В кн.: Расчеты на прочность. М.:Машиностроение, 1966. Вып. 12. С. 3–31.
- [6] Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 707 с.

Yu. V. Nemirovskii, A. A. Tyrymov

## MODELING OF STRESS STATES IN INTACT LAYERED ROCK MASSIFS

*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch  
of the RAS, Novosibirsk, Russia*

*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

*Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia*

**Abstract.** A structural model of an anisotropic medium is proposed for calculating the stress-strain state in intact rock massifs, which takes into account a number of mining and geological factors. The results of the analytical solution allowed us to explain the facts known from the practice of field observations (the possibility of the superiority of horizontal stresses over vertical ones, the piecewise linear nature of stresses, etc.), which were in contradiction with the widespread hypotheses about the distribution of stresses in rock massifs.

**Keywords:** elasticity theory, plane deformation, rock mass, layering.

## REFERENCES

- [1] Shemyakin E. I. Two problems of rock mechanics associated with the development of deep deposits of ore and gas // *Journal of Mining Science*. 1975. No. 6. pp. 3–9. (in Russian).
- [2] Kurlenya M. V., Seryakov V. M., Eremenko A. A. Technogenic geomechanical stress fields. Novosibirsk: Nauka, 2005. 264 p. (in Russian).
- [3] Reflection of modern stress fields and rock properties in the state of rock massifs. Collection of articles (edited by Professor I.A.Turchaninov). Apatity : Publishing House of the KF of the USSR Academy of Sciences, 1977. 156 p. (in Russian).
- [4] Nemirovsky Yu., V., Tyrymov A.A. The stressed state in an undisturbed rock mass with schistosity and curvature of the beds // *Journal of Mining Science*. 1977. Vol. 13. No. 2. P. 114–120.
- [5] Bolotin V. V. Planar problems of the theory of elasticity for parts made of reinforced materials. In the book: *Calculations for strength*. M.: Mashinostroenie, 1966. I. 12. P. 3–31. (in Russian).
- [6] Muskhelishvili N. I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1966. 707 p. (in Russian).

---

*Nemirovskii Yuri Vladimirovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Professor, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia  
*Tyrymov Alexander Alexandrovich*, PhD, Associate Professor, Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia.