Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 2 (48). С. 26–31

С. И. Сенашов, О. В. Гомонова

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОСТИ

Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнёва, г. Красноярск, Россия

Аннотация. В работе найдены законы сохранения для трехмерных стационарных уравнений упругости в случае общей анизотропии.

Ключевые слова: законы сохранения, упругость, дифференциальные уравнения, анизотропия.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.004

УДК: 539.374

Введение

Методы законов сохранения по праву относят к важнейшим классическим методам исследования дифференциальных уравнений [1] Эти методы имеют сравнительно небольшую историю. Первые работы появились около 100 лет назад и были инициированы статьями Э. Нётер. Долгое время законы сохранения дифференциальных уравнений использовались в основном при доказательстве теорем существования и единственности, а иногда для построения обобщенных решений. В последнее время законы сохранения применяются и для решений краевых задач [2–4].

Впервые законы сохранения для уравнений упругости в изотропном случае были вычислены в [5–6], где вычисления были основаны на теореме Э. Нётер. Полученные в то время законы сохранения не нашли никакого практического применения и представляли чисто академический интерес.

В настоящей работе найдена бесконечная серия новых законов сохранения для трехмерных стационарных уравнений теории упругости в случае общей анизотропии, что

Сенашов Сергей Иванович
`e-mail`: sen@sibsau.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнёва, г. Красноярск, Россия.

Гомонова Ольга Валерьевна
`e-mail`: gomonova@sibsau.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнёва, г. Красноярск, Россия.

Поступила 20.03.2019

означает выполнение обобщенного закона Гука, зависящего от 36 упругих постоянных. Приведённые законы сохранения позволили получить формулы, с помощью которых можно эффективно сводить краевые задачи к квадратурам. Последние можно численно найти для заданных краевых условий в перемещениях.

Законы сохранения для трехмерных стационарных уравнений упругости в случае общей анизотропии

Рассмотрим уравнения трехмерной упругости в стационарном анизотропном случае. Закон Гука имеет следующий вид [5]:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + A_{13}\varepsilon_z + 2A_{14}\varepsilon_{yz} + 2A_{15}\varepsilon_{xz} + 2A_{16}\varepsilon_{xy},\\
\sigma_y &= A_{21}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y + A_{23}\varepsilon_z + 2A_{24}\varepsilon_{yz} + 2A_{25}\varepsilon_{xz} + 2A_{26}\varepsilon_{xy},\\
\sigma_z &= A_{31}\varepsilon_x + A_{32}\varepsilon_y + A_{33}\varepsilon_z + 2A_{34}\varepsilon_{yz} + 2A_{35}\varepsilon_{xz} + 2A_{36}\varepsilon_{xy},\\
\tau_{yz} &= A_{41}\varepsilon_x + A_{42}\varepsilon_y + A_{43}\varepsilon_z + 2A_{44}\varepsilon_{yz} + 2A_{45}\varepsilon_{xz} + 2A_{46}\varepsilon_{xy},\\
\tau_{xz} &= A_{51}\varepsilon_x + A_{52}\varepsilon_y + A_{53}\varepsilon_z + 2A_{54}\varepsilon_{yz} + 2A_{55}\varepsilon_{xz} + 2A_{56}\varepsilon_{xy},\\
\tau_{xy} &= A_{61}\varepsilon_x + A_{62}\varepsilon_y + A_{63}\varepsilon_z + 2A_{64}\varepsilon_{yz} + 2A_{65}\varepsilon_{xz} + 2A_{66}\varepsilon_{xy},
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\sigma_x, \sigma_y, ..., \tau_{xy}$ – компоненты тензора напряжений, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, ..., \varepsilon_{xy}$ – компоненты тензора деформаций, A_{ij} – упругие постоянные, $i = \overline{1,6}$, $j = \overline{1,6}$.

Компоненты тензора деформаций связаны с компонентами вектора деформаций (u, v, w) соотношениями

$$\varepsilon_x = u_x, \quad \varepsilon_y = v_y, \quad \varepsilon_x = w_z, \quad 2\varepsilon_{xy} = u_y + v_x, \quad 2\varepsilon_{xz} = u_z + w_x, \quad 2\varepsilon_{yz} = v_z + w_y. \tag{2}$$

Нижний индекс у компонент вектора деформации означает производную по соответствующей переменной.

Подставляя (1), (2) в уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0,$$

получим систему уравнений анизотропной упругости в перемещениях:

$$\begin{aligned}
F_1 = {} & A_{11}u_{xx} + A_{12}v_{xy} + A_{13}w_{xz} + A_{14}(v_{xz} + w_{xy}) + A_{15}(u_{xz} + w_{xx}) + \\
& + A_{16}(u_{xy} + v_{xx}) + A_{61}u_{xy} + A_{62}v_{yy} + A_{63}w_{yz} + A_{64}(v_{yz} + w_{yy}) + \\
& + A_{65}(u_{yz} + w_{yx}) + A_{66}(u_{yy} + v_{yx}) + A_{51}u_{zx} + A_{52}v_{zy} + A_{53}w_{zz} + \\
& + A_{54}(v_{zz} + w_{zy}) + A_{55}(u_{zz} + w_{zx}) + A_{56}(u_{zy} + v_{zx}) = 0,\\
F_2 = {} & A_{61}u_{xx} + A_{62}v_{xy} + A_{63}w_{xz} + A_{64}(v_{xz} + w_{xy}) + A_{65}(u_{xz} + w_{xx}) + \\
& + A_{66}(u_{xy} + v_{xx}) + A_{21}u_{xy} + A_{22}v_{yy} + A_{23}w_{yz} + A_{24}(v_{yz} + w_{yy}) + \\
& + A_{25}(u_{yz} + w_{yx}) + A_{26}(u_{yy} + v_{yx}) + A_{41}u_{zx} + A_{42}v_{zy} + A_{43}w_{zz} + \\
& + A_{44}(v_{zz} + w_{zy}) + A_{45}(u_{zz} + w_{zx}) + A_{46}(u_{zy} + v_{zx}) = 0,\\
F_3 = {} & A_{51}u_{xx} + A_{52}v_{xy} + A_{53}w_{xz} + A_{54}(v_{xz} + w_{xy}) + A_{55}(u_{xz} + w_{xx}) + \\
& + A_{56}(u_{xy} + v_{xx}) + A_{41}u_{xy} + A_{42}v_{yy} + A_{43}w_{yz} + A_{44}(v_{yz} + w_{yy}) + \\
& + A_{45}(u_{yz} + w_{yx}) + A_{46}(u_{yy} + v_{yx}) + A_{31}u_{zx} + A_{32}v_{zy} + A_{33}w_{zz} + \\
& + A_{34}(v_{zz} + w_{zy}) + A_{35}(u_{zz} + w_{zx}) + A_{36}(u_{zy} + v_{zx}) = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Найдем законы сохранения специального вида для системы уравнений (3).

Напомним, что законом сохранения для (3), называется выражение вида

$$C_x(x, y, z, u, v, w) + D_y(x, y, z, u, v, w) + E_z(x, y, z, u, v, w) = \omega^1 F_1 + \omega^2 F_2 + \omega^3 F_3, \tag{4}$$

где $\omega^i \quad (i = 1, 2, 3)$ – некоторые функции от x, y, z, не равные тождественно нулю одновременно. Величины C, D, E называют компонентами сохраняющегося тока. Подробнее с законами сохранения и способами их вычисления можно ознакомиться в [6–9].

Компоненты сохраняющегося тока будем искать в виде:

$$\begin{aligned} C &= \alpha^1 u_x + \beta^1 u_y + \gamma^1 u_z + \delta^1 v_x + \xi^1 v_y + \eta^1 v_z + \lambda^1 w_x + \mu^1 w_y + \nu^1 w_z, \\ D &= \alpha^2 u_x + \beta^2 u_y + \gamma^2 u_z + \delta^2 v_x + \xi^2 v_y + \eta^2 v_z + \lambda^2 w_x + \mu^2 w_y + \nu^2 w_z, \\ E &= \alpha^3 u_x + \beta^3 u_y + \gamma^3 u_z + \delta^3 v_x + \xi^3 v_y + \eta^3 v_z + \lambda^3 w_x + \mu^3 w_y + \nu^3 w_z, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\alpha^i, \beta^i, ..., \nu^i \quad (i = 1, 2, 3)$ – некоторые функции, зависящие только от x, y, z.

Подставим выражения (5) в уравнение (4). В результате получим полином первой степени по переменным, соответствующим первой и второй производным компонент вектора деформаций $u_x, ...w_z, u_{xx}, ..., w_{zz}$. Приравнивая в этом полиноме к нулю коэффициенты при производных и учитывая вид функций $\alpha^i, \beta^i, ..., \nu^i$, получаем:

$$\begin{gathered} \alpha^1 = A_{11}\omega^1 + A_{61}\omega^2 + A_{51}\omega^3, \quad \beta^2 = A_{66}\omega^1 + A_{26}\omega^2 + A_{46}\omega^3, \\ \gamma^3 = A_{55}\omega^1 + A_{45}\omega^2 + A_{35}\omega^3, \quad \delta^1 = A_{16}\omega^1 + A_{66}\omega^2 + A_{35}\omega^3, \\ \xi^2 = A_{62}\omega^1 + A_{22}\omega^2 + A_{42}\omega^3, \quad \eta^3 = A_{54}\omega^1 + A_{44}\omega^2 + A_{34}\omega^3, \\ \lambda^1 = A_{15}\omega^1 + A_{65}\omega^2 + A_{55}\omega^3, \quad \mu^2 = A_{64}\omega^1 + A_{24}\omega^2 + A_{44}\omega^3, \\ \nu^3 = A_{53}\omega^1 + A_{43}\omega^2 + A_{33}\omega^3; \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \alpha^2 + \beta^1 = (A_{16} + A_{61})\omega^1 + (A_{24} + A_{21})\omega^2 + (A_{56} + A_{41})\omega^3, \\ \alpha^3 + \gamma^1 = (A_{15} + A_{51})\omega^1 + (A_{65} + A_{41})\omega^2 + (A_{55} + A_{31})\omega^3, \\ \beta^3 + \gamma^2 = (A_{66} + A_{56})\omega^1 + (A_{45} + A_{36})\omega^2 + (A_{25} + A_{46})\omega^3; \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \xi^1 + \delta^2 = (A_{66} + A_{12})\omega^1 + (A_{62} + A_{26})\omega^2 + (A_{52} + A_{46})\omega^3, \\ \varepsilon^1 + \delta^3 = (A_{56} + A_{14})\omega^1 + (A_{64} + A_{46})\omega^2 + (A_{54} + A_{36})\omega^3, \\ \varepsilon^2 + \xi^3 = (A_{64} + A_{52})\omega^1 + (A_{24} + A_{12})\omega^2 + (A_{44} + A_{32})\omega^3; \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \lambda^2 + \mu^1 = (A_{65} + A_{14})\omega^1 + (A_{64} + A_{25})\omega^2 + (A_{54} + A_{45})\omega^3, \\ \lambda^3 + \nu^1 = (A_{13} + A_{55})\omega^1 + (A_{63} + A_{45})\omega^2 + (A_{53} + A_{35})\omega^3, \\ \mu^3 + \nu^2 = (A_{63} + A_{54})\omega^1 + (A_{23} + A_{44})\omega^2 + (A_{43} + A_{34})\omega^3; \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \alpha^1_x + \alpha^2_y + \alpha^3_z = 0, \quad \beta^1_x + \beta^2_y + \beta^3_z = 0, \quad \gamma^1_x + \gamma^2_y + \gamma^3_z = 0, \\ \delta^1_x + \delta^2_y + \delta^3_z = 0, \quad \xi^1_x + \xi^2_y + \xi^3_z = 0, \quad \eta^1_x + \eta^2_y + \eta^3_z = 0, \\ \lambda^1_x + \lambda^2_y + \lambda^3_z = 0, \quad \mu^1_x + \mu^2_y + \mu^3_z = 0, \quad \nu^1_x + \nu^2_y + \nu^3_z = 0. \end{gathered}$$

Из полученных выше соотношений получаем, исключая $\alpha^i, \delta^i, \lambda^i \quad$ (где $i = 1, 2, 3$), а также $\beta^3, \gamma^3, \xi^2, \xi^3, \eta^3, \mu^2, \mu^3, \nu^3$, следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &A_{11}\omega^1_x + A_{61}\omega^2_x + A_{51}\omega^3_x + (A_{16} + A_{61})\omega^1_y + (A_{66} + A_{21})\omega^2_y + (A_{56} + A_{41})\omega^3_y + \\ &+ (A_{15} + A_{51})\omega^1_z + (A_{65} + A_{54})\omega^2_z + (A_{53} + A_{41})\omega^3_z = \beta^1_y + \gamma^1_z = f^1; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &A_{16}\omega^1_x + A_{66}\omega^2_x + A_{56}\omega^3_x + (A_{66} + A_{12})\omega^1_y + (A_{62} + A_{26})\omega^2_y + (A_{52} + A_{46})\omega^3_y + \\ &+ (A_{56} + A_{14})\omega^1_z + (A_{64} + A_{46})\omega^2_z + (A_{54} + A_{36})\omega^3_z = \xi^1_y + \varepsilon^1_z = f^4; \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &A_{15}\omega^1_x + A_{65}\omega^2_x + A_{55}\omega^3_x + (A_{65} + A_{14})\omega^1_y + (A_{64} + A_{25})\omega^2_y + (A_{54} + A_{45})\omega^3_y + \\ &+ (A_{55} + A_{13})\omega^1_z + (A_{63} + A_{45})\omega^2_z + (A_{53} + A_{35})\omega^3_z = \mu^1_y + \nu^1_z = f^7; \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &A_{66}\omega^1_y + A_{26}\omega^2_y + A_{46}\omega^3_y + (A_{66} + A_{56})\omega^1_z + (A_{36} + A_{45})\omega^2_z + (A_{25} + A_{46})\omega^3_z = \\ &= -\beta^1_x + \gamma^2_z = f^2; \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &A_{62}\omega^1_y + A_{22}\omega^2_y + A_{42}\omega^3_y + (A_{64} + A_{32})\omega^1_z + (A_{24} + A_{12})\omega^2_z + (A_{32} + A_{44})\omega^3_z = \\ &= -\xi^1_x + \varepsilon^2_z = f^5; \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &A_{64}\omega^1_y + A_{24}\omega^2_y + A_{44}\omega^3_y + (A_{63} + A_{54})\omega^1_z + (A_{23} + A_{44})\omega^2_z + (A_{43} + A_{34})\omega^3_z = \\ &= -\mu^1_x + \nu^2_z = f^8; \end{aligned} \tag{11}$$

$$A_{55}\omega^1_z + A_{45}\omega^2_z + A_{35}\omega^3_z = -\gamma^1_x - \gamma^2_y = f^3; \tag{12}$$

$$A_{54}\omega_z^1 + A_{44}\omega_z^2 + A_{34}\omega_z^3 = -\varepsilon_x^1 - \varepsilon_y^2 = f^6; \tag{13}$$

$$A_{64}\omega_z^1 + A_{24}\omega_z^2 + A_{44}\omega_z^3 = -\nu_x^1 - \nu_y^2 = f^9. \tag{14}$$

Дифференцируя выражения (6) по x, (9) по y, (12) по z и складывая результаты, получаем:

$$\begin{gathered} A_{11}\omega_{xx}^1 + A_{21}\omega_{xy}^2 + A_{41}\omega_{xy}^3 + A_{41}(\omega_{xz}^2 + \omega_{xy}^3) + A_{51}(\omega_{xz}^1 + \omega_{xx}^3) + \\ + A_{61}(\omega_{xy}^1 + \omega_{xx}^2) + A_{16}\omega_{xy}^1 + A_{26}\omega_{yy}^2 + A_{36}\omega_{yz}^3 + A_{46}(\omega_{yz}^2 + \omega_{yy}^3) + \\ + A_{56}(\omega_{yz}^1 + \omega_{yx}^3) + A_{66}(\omega_{yy}^1 + \omega_{yx}^2) + A_{15}\omega_{zx}^1 + A_{25}\omega_{zy}^2 + A_{35}\omega_{zz}^3 + \\ + A_{45}(\omega_{zz}^2 + \omega_{zy}^3) + A_{55}(\omega_{zz}^1 + \omega_{zx}^3) + A_{65}(\omega_{zy}^1 + \omega_{zx}^2) = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Аналогично, из (7), (8) и (10), а также из (11), (13) и (14) получаем, соответственно

$$\begin{gathered} A_{16}\omega_{xx}^1 + A_{26}\omega_{xy}^2 + A_{36}\omega_{xy}^3 + A_{46}(\omega_{xz}^2 + \omega_{xy}^3) + A_{56}(\omega_{xz}^1 + \omega_{xx}^3) + \\ + A_{66}(\omega_{xy}^1 + \omega_{xx}^2) + A_{12}\omega_{xy}^1 + A_{22}\omega_{yy}^2 + A_{32}\omega_{yz}^3 + A_{42}(\omega_{yz}^2 + \omega_{yy}^3) + \\ + A_{52}(\omega_{yz}^1 + \omega_{yx}^3) + A_{62}(\omega_{yy}^1 + \omega_{yx}^2) + A_{14}\omega_{zx}^1 + A_{24}\omega_{zy}^2 + A_{34}\omega_{zz}^3 + \\ + A_{44}(\omega_{zz}^2 + \omega_{zy}^3) + A_{54}(\omega_{zz}^1 + \omega_{zx}^3) + A_{64}(\omega_{zy}^1 + \omega_{zx}^2) = 0 \end{gathered} \tag{16}$$

и

$$\begin{gathered} A_{15}\omega_{xx}^1 + A_{25}\omega_{xy}^2 + A_{35}\omega_{xy}^3 + A_{45}(\omega_{xz}^2 + \omega_{xy}^3) + A_{55}(\omega_{xz}^1 + \omega_{xx}^3) + \\ + A_{65}(\omega_{xy}^1 + \omega_{xx}^2) + A_{14}\omega_{xy}^1 + A_{24}\omega_{yy}^2 + A_{34}\omega_{yz}^3 + A_{44}(\omega_{yz}^2 + \omega_{yy}^3) + \\ + A_{54}(\omega_{yz}^1 + \omega_{yx}^3) + A_{64}(\omega_{yy}^1 + \omega_{yx}^2) + A_{13}\omega_{zx}^1 + A_{23}\omega_{zy}^2 + A_{33}\omega_{zz}^3 + \\ + A_{43}(\omega_{zz}^2 + \omega_{zy}^3) + A_{53}(\omega_{zz}^1 + \omega_{zx}^3) + A_{63}(\omega_{zy}^1 + \omega_{zx}^2) = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Функции ω^i $(i = 1, 2, 3)$ есть произвольное решение системы уравнений (15)–(17). При этом, если матрица коэффициентов упругости A_{ij} $(i, = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$ симметрична, то ω^i – произвольное решение исходной системы уравнений (3).

Из формул (6)–(14) следует

$$\begin{gathered} \mathrm{rot}(\gamma^2, -\gamma^1, \beta^1) = (f^1, f^2, f^3), \quad \mathrm{rot}(\varepsilon^2, -\varepsilon^1, \xi^1) = (f^4, f^5, f^6), \\ \mathrm{rot}(\nu^2, -\nu^1, \mu^1) = (f^7, f^8, f^9). \end{gathered} \tag{18}$$

Для решения системы уравнений (18) относительно девяти неизвестных воспользуемся следующей формулой [10]:

$$\mathrm{rot}(\overline{\omega}^i) = \overline{\Omega}^i,$$

где

$$\begin{gathered} \overline{\omega}^1 = (\gamma^2, -\gamma^1, \beta^1), \quad \overline{\omega}^2 = (\varepsilon^2, -\varepsilon^1, \xi^1), \quad \overline{\omega}^3 = (\nu^2, -\nu^1, \mu^1), \\ \overline{\Omega}^1 = (f^1, f^2, f^3), \quad \overline{\Omega}^2 = (f^4, f^5, f^6), \quad \overline{\Omega}^3 = (f^7, f^8, f^9). \end{gathered}$$

В результате получаем

$$\overline{\omega}^i = \frac{\Gamma(\overline{\Omega}^i)}{4\pi} \int\limits_{L_i} \frac{d\bar{r} \times \bar{r}}{r^3}, \tag{19}$$

где L_i – аналог вихревой линии, а $\Gamma(\overline{\Omega}^i)$ – конечная циркуляция вихревой трубки вокруг вихревой линии. Эта циркуляция без труда может быть вычислена в точке пересечения вихревой линии с граничной поверхностью S, описанной ниже.

Постановка первой краевой задачи. Пусть имеется гладкая поверхность S, на которой заданы компоненты u, v, w вектора деформации:

$$u|_S = u_0(x, y, z), \quad v|_S = v_0(x, y, z), \quad w|_S = w_0(x, y, z), \tag{20}$$

где u_0, v_0, w_0 – заданные гладкие функции.

Используя (19) и (20), можно найти все компоненты сохраняющегося тока.

Задача о построении законов сохранения вида (5) для уравнений анизотропной упругости (3) полностью решена.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 256 с.

[2] Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of Elastoplastic Boundary in Problem of Tension of a Plate Weakened by Holes // Int J Nonlin Mech. – 108 (2019). P. 7-10.

[3] Сенашов С. И., Гомонова О. В., Яхно А. Н. Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности. – Красноярск : Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т, 2012. – 139 с.

[4] Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. – 192 с.

[5] Olver P. Conservation Laws in Elasticity. I General Results // Arch. Rational Mech. Anal. – 85 (1984). – P. 111–129.

[6] Olver P. Conservation Laws in Elasticity. II Linear Homogeneous Isotropic Elastostatics // Arch. Rational Mech. Anal. – 85 (1984). – P. 131–160.

[7] Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – М. : Наука, 1977. – 416 с.

[8] Senashov S. I., Vinogradov A. N. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // Proc. Edinburg Math. Soc. – 1988. – P. 415–439.

[9] Виноградов А. А., Красильщик И. С., Лычагин В. В. Симметрии и законы сохранения. – М. : Фактор, 1996. – 461 с.

[10] Лойцянский П. Г. Механика жидкости и газа. – М. : Наука, 1973. – 847 с.

S. I. Senashov, O. V. Gomonova

CONSERVATION LAWS FOR 3-DIMENSIONAL EQUATIONS OF ANISOTROPIC ELASTICITY

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia

Abstract. Conservation Laws for 3-dimensional Stationary Equations in the Case of General Anosotropy are obtained in the work.

Keywords: conservation laws, elasticity, differential equations, anisotropy.

REFERENCES

[1] Polyanin A. D., Zaitsev V. F., Zhurov A. I. Solving Methods for Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics. – M.: Phismathlit, 2005. – 256 c. (in Russian)

[2] Senashov S. I., Gomonova O. V. Construction of Elastoplastic Boundary in Problem of Tension of a Plate Weakened by Holes // Int J Nonlin Mech. – 108 (2019). P. 7-10.

[3] Senashov S. I., Gomonova O. V., Yakhno A. N. Mathematical Questions of 2-dimensional Linear Equations of Ideal Plasticity. – Krasnoyarsk : Sib. State Aerospace Univ., 2012. – 139 p. (in Russian)

[4] Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. Application of Symmetries and Conservation Laws to Solve Differential Equations. – Novosibirsk: Branch of RAS, 2001. – 192 c. (in Russian)

[5] Olver P. Conservation Laws in Elasticity. I General Results // Arch. Rational Mech. Anal. – 85 (1984). – P. 111–129.

[6] Olver P. Conservation Laws in Elasticity. II Linear Homogeneous Isotropic Elastostatics // Arch. Rational Mech. Anal. – 85 (1984). – P. 131–160.

[7] Lekhnitskii S. G. The Theory of Elasticity of an Anisotropic Body. – M. : Mauka, 1977. – 416 p. (in Russian)

[8] Senashov S. I., Vinogradov A. N. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // Proc. Edinburg Math. Soc. – 1988. – P. 415–439.

[9] Vinogradov A. A., Krasilshchik I. S., Lychagin V. V. Symmetries and Conservation Laws. – M. : Factor, 1996. – 461 p. (in Russian)

[10] Loytsanskii P. G. Mechanics of Fluids. – M. : Nauka, 1973. – 847 p. (in Russian)

Senashov Sergey Ivanovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia.

Gomonova Olga Valeryevna, PhD. Sci. Phys. & Math., Associated Professor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia.