

А. В. Ткачева

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КРИТЕРИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ ПРИВЕДЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЗАДАЧАХ ПЛОСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Работа посвящена решению задачи температурного деформирования тонкой пластины конечной ширины, выполненной из упруго-пластичного материала. В качестве условий наступления пластического течения используется условие максимальных приведенных напряжений, с зависимостью предела текучести от температуры. Именно использование зависимости предела текучести от температуры делает невозможным получение решения с условием пластического течения Треска – Сен-Венана. Показывается, что в зависимости от скорости нагрева распределение остаточных напряжений может быть разным.

Ключевые слова: упругость, пластичность, плосконапряженное состояние, температурные напряжения, кусочно-линейные условия пластического течения.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.005

УДК: 539.374

Введение

Использование кусочно-линейных пластических потенциалов для аналитического решения широкого круга упругопластических задач теории температурных напряжений, особенно неустановившихся, широко распространилось с середины прошлого столетия [1, 2]. Это связано как с ростом производственной потребности в качественных математических моделях, так и с развитием вычислительных возможностей. Эти задачи помогают решить проблемы в сварке, горячей посадке, штамповке, пусть даже эти технологии придуманы задолго до появления теории пластического течения. Изменение температуры в упругопластическом материале приводит к появлению температурных напряжений, способным деформировать материалы изделий, не прибегая к контактным воздействиям [3]. Высокие напряжения порождают пластическое течение [4], благодаря которому происходит рост необратимых деформаций, в которые впоследствии формируются поле остаточных напряжений. Пластическое течение

© Ткачева А. В., 2021

Ткачева Анастасия Валерьевна

e-mail: nansi.valer@yandex.ru, старший научный сотрудник, кандидат физ.-мат. наук, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00147.

Поступила 11.01.2021

описывается разными классическими условиями пластичности кусочно-линейными (Треска–Сен-Венана, Ишлинского–Ивлева) и нелинейными (Мизесса). В некоторых случаях в основном для одномерных задач удается получить аналитическое решения благодаря использованию кусочно-линейных пластических потенциалов [4]. Это возможно потому, что уравнения, записываемые в перемещениях, удается проинтегрировать и получить аналитические зависимости для перемещений, деформаций и напряжений. Когда же происходит отход от одномерности задачи, использование кусочно-линейных условий течения только усложняет расчеты, на помощь приходит нелинейное условие Мизесса. Решения в этом случае находятся численно, с использованием итерационных методов [5]. В условиях зависимости предела текучести от температуры в плосконапряженном состоянии в ряде задач о нестационарных температурных напряжениях невозможно получить решения с использованием условия пластического течения Треска – Сен-Венана, только использование условия Ишлинского–Ивлева позволяет аналитически разрешить подобные задачи. Однако в этом случае отмечаем невозможность существования пластического течения на ребре призмы Ишлинского–Ивлева. Но возможность получить решение за счет скачкообразного перехода с грани на грань, минуя ребро. Здесь рассмотрим именно такой случай.

Постановка задачи. В декартовой системе координат (x, y, z) рассмотрим бесконечной длины стальную пластину шириной L . Систему координат свяжем с краем пластины так, чтобы координаты изменились в пределах $0 \leq x \leq L$; $-\infty < y < \infty$. Закрепим края пластины по линиям $x = 0$ и $x = L$. Источник тепла подведем к краю $x = 0$. Благодаря тепловому потоку $q(t)$ пластина будет нагреваться

$$T_{,x} = q(t), \quad (1)$$

где T – температура, t – время. На другом краю $x = L$ пластины считаем отток тепла из-за небольшой толщины пренебрежительно малым

$$T_{,x} |_{x=L} = 0 \quad (2)$$

Уравнение теплопроводности запишем в виде

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\chi (T_0 - T) \quad (3)$$

ρ – плотность, c – удельная теплоемкость, λ – коэффициент теплопроводности, χ – коэффициент теплоотдачи, T_0 – комнатная температура. Аналитическое решение температурной задачи [6] имеет вид

$$\begin{aligned} T(x, t) = & T_0 \int_0^l G(x, \xi, t) d\xi - 2\chi T_0 \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau - \\ & - \lambda (\rho A)^{-1} \int_0^t q(\tau) G(x, 0, t - \tau) d\tau \\ G(x, \xi, t) = & e^{2\chi t} \left[\frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi \xi}{l}\right) \exp\left(-\frac{\lambda(\rho A)^{-1} n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Итак, распространение тепла в пластине считаем известным, поэтому перейдем к механической части задачи.

Из-за малости теплового расширения деформации считаем малыми и складываемыми из обратимых e_{ij}^e , и необратимых e_{ij}^p .

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5)$$

u_i – компоненты вектора перемещений $i = 1, 2, 3$. Некоторое время после начала нагрева деформации в плоскости будут только обратимые ($e_{ij}^e \neq 0$ $e_{ij}^p = 0$). Деформации e_{ij}^e ,

напряжения σ_{ij} и температуру T связывает зависимость закона Дюамеля–Неймана.

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^e - 3\alpha K (T - T_0)) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e \quad (6)$$

где α – коэффициент линейного расширения, λ , μ , $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ – упругие модули, δ_{ij} – компоненты единичного тензора, составленного из символов Кронекера.

Необратимые деформации начинают расти, когда напряженное состояние достигнет поверхности нагружения (условия пластического течения).

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{de_{ij}^p}{dt} = \zeta \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \zeta > 0 \quad (7)$$

где $f(\sigma_{ij}) = 0$ – поверхность нагружения в пространстве напряжений.

В качестве поверхности нагружения принимаем условие максимальных приведенных напряжений (условие Ишлинского–Ивлева).

$$f(\sigma_{ij}) = \max |\sigma_i - \sigma| - \frac{4}{3}k; \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{jj}; \quad (8)$$

k – предел текучести, зависящий от температуры

$$k(T) = k_0 \left(\frac{T_p - T}{T_p - T_0} \right)^2 \quad (9)$$

T_p – температура плавления, k_0 – предел текучести при комнатной температуре, σ_i – главные значения тензора напряжений.

Замыкает описную систему уравнение равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (10)$$

Для конкретного случая $\sigma_z = 0$ и $e_y = 0$ уравнения (6) примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (4\mu(\lambda + \mu) u_{x,x} - 6K\mu\alpha(T - T_0))(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_y &= (2\mu\lambda u_{x,x} - 6K\mu\alpha(T - T_0))(\lambda + 2\mu)^{-1} \end{aligned} \quad (11)$$

Из единственного нетривиального уравнения равновесия $\sigma_{x,x} = 0$ следует, что $\sigma_x = C_1(t)$.

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{3}{2}\alpha K(\lambda + \mu)^{-1} \int_0^x (T(\rho) - T_0) d\rho + 0.25C_1(t)x(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)^{-1} + C_2(t) \\ \sigma_y &= \left(\frac{\lambda}{2}C_1(t) - 3\alpha K\mu(T - T_0) \right) (\lambda + \mu)^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

$C_1(t)$, $C_2(t)$ – коэффициенты интегрирования, находятся из граничных условий

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=L} = 0. \quad (13)$$

$$C_1(t) = -6K\alpha\mu \int_0^L (T(\rho) - T_0) d\rho (\lambda + 2\mu)^{-1} L^{-1}, \quad C_2(t) = 0$$

Называя $C_1(t)$ и $C_2(t)$ постоянными интегрирования, подразумеваем только, что они не зависят от пространственной координаты, но являются функциями времени.

Активное пластическое течение при нагреве. С ростом температуры на линии нагрева $x = 0$ напряжения достигает поверхности нагружения и начинает выполняться условие пластического течения Ишлинского–Ивлева в форме: $\sigma_x - 2\sigma_y = 4k$. Зарождается упруго-пластическая граница $x = m_1(t)$, разделяющая область деформирования на две части. В области пластического течения $0 < x \leq m_1(t)$ начинают

свой рост необратимые деформации e_x^p , e_y^p и e_z^p , поэтому закон Дюамеля–Неймана (11) переписутся в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (4\mu(\lambda + \mu)(u_{x,x} - e_x^p) - 6K\mu\alpha(T - T_0))(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_y &= (-4\mu(\lambda + \mu)e_y^p + 2\mu\lambda(u_{x,x} - e_x^p) - 6K\mu\alpha(T - T_0))(\lambda + 2\mu)^{-1} \end{aligned} \quad (14)$$

Из ассоциированного закона пластического течения следует, что $e_y^p = -2e_x^p$.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_3(t), \quad \sigma_y = 0.5C_3(t) - 2k \\ u_x &= (3\lambda + 5\mu)(12K\mu)^{-1}xC_3(t) + C_4(t) + \\ &+ 1.5\alpha \int_0^x (T(\rho) - T_0) d\rho - (3K)^{-1} \int_0^x k(\rho) d\rho, \\ e_x^p &= (12K)^{-1}C_3(t) + 0.5\alpha(T - T_0) - k(\lambda + \mu)(3K\mu). \end{aligned} \quad (15)$$

В области упругого деформирования $m_1(t) < x \leq L$ напряжения и перемещения находятся согласно соотношениям (12), в области пластического течения $0 < x \leq m_1(t)$ следуя соотношениям (15), где $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$, $C_4(t)$ – коэффициенты интегрирования, которые находятся из граничных условий, моделирующих непрерывность напряжения σ_x и перемещения u_x на упругопластической границе $x = m(t)$ и ранее записанных граничных условий (13). Через некоторый временной промежуток

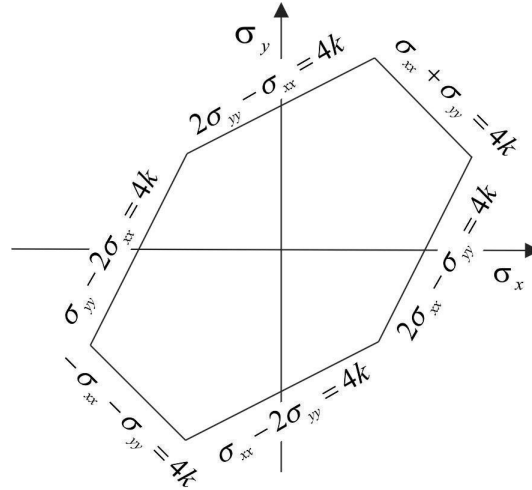


Рис. 1. Сечение призмы Ивлева с координатной плоскостью в плоскости $\sigma_z = 0$

на линии нагрева в области пластического течения начинает выполняться новое условие пластического течения $-\sigma_x - \sigma_y = 4k$, здесь образуется пластическая граница $x = m_2(t)$, разделяющая область пластического течения.

Постановка задачи становится некорректной при выполнении одновременно двух условий пластического течения. Это связано с тем, что из уравнения равновесия следует $\sigma_x = const$, а при выполнении двух условий (условия ребра призмы Ивлева) σ_x не является константой, а является функцией координаты x ($\sigma_x = -\frac{4}{3}k(x)$). Поэтому в новой области пластического течения $0 < x \leq m_2(t)$ материал деформируется по новому условию $-\sigma_x - \sigma_y = 4k$. Иными словами, осуществляется переход с грани на грань поверхности нагружения минуя ребро рис. 1.

В рамках условия пластического течения Треска–Сен-Венана решить поставленную задачу не представляется возможным. Поскольку при высокой скорости нагрева неизбежно выполнении условия $\sigma_x = -2k(x)$, которое приводит к невыполнению уравнения равновесия $\sigma_x = const$.

Для новой области пластического течения, используя соотношения (14) с учетом следствия из ассоциированного закона пластического течения $e_y^p = e_x^p$ и уравнения равновесия, находим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_5(t), \quad \sigma_y = -C_5(t) - 4k, \\ u_x &= \mu^{-1} x C_5(t) + C_6(t) + 2\mu^{-1} \int_0^x k(\rho) d\rho, \\ e_x^p &= (2\mu)^{-1} x C_5(t) + C_6(t) + 4(\lambda + \mu)(3K\mu) \int_0^x k(\rho) d\rho. \end{aligned} \quad (16)$$

$C_5(t)$, $C_6(t)$ – коэффициенты интегрирования совместно с коэффициентами $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$, $C_4(t)$ находятся из граничных условий, требующих непрерывности напряжения σ_x и перемещения u_x на границах $x = m_1(t)$ и $x = m_2(t)$, а также выполнения и граничных условий (13).

Разгрузка при остывании. После отвода источника нагрева с линии $x = 0$ необратимые деформации перестают расти, поэтому здесь образуется разгружающая упругопластическая граница $x = n_1(t)$. В области разгрузки $0 < x \leq n_1(t)$ материал деформируется упруго с учетом уже имеющихся необратимых деформаций $P_x(x) = e_x^p(x)$, $P_y(x) = e_y^p(x)$. Используя соотношения (14) в которых пластические деформации $e_x^p(x)$ и $e_y^p(x)$ заменены на необратимые и имеющиеся со временем деформации $P_x(x)$, $P_y(x)$ и уравнение равновесия $\sigma_{x,x} = 0$ находим

$$\begin{aligned} u_x &= 0.25C_7(t) x (\lambda + 2\mu) \mu^{-1} (\lambda + \mu)^{-1} + C_8(t) \\ &+ \int_0^x P_x(\rho) d\rho + 0.5\lambda (\lambda + \mu)^{-1} \int_0^x P_y(\rho) d\rho \\ \sigma_x &= C_7(t) \quad \sigma_y = 0.5 (\lambda + \mu)^{-1} \lambda C_7(t) + P_y \mu (\mu (\lambda + \mu)^{-1} - 3) \end{aligned} \quad (17)$$

$C_7(t)$, $C_8(t)$ – коэффициенты интегрирования.

При дальнейшем выравнивании температуры в материале пластины в ней прекращается пластическое течение. При этом сначала упругопластическая граница разгрузки достигнет $x = m_2(t)$, а после и линии $x = m_1(t)$. В области разгрузки $0 \leq x \leq n_1$ напряжения и перемещения находятся из соотношений (17), а в области обратимого деформирования из (12).

Повторное пластическое течение. Из-за высокого уровня накопившихся необратимых деформаций в процессе остывания происходит повторное пластическое течение. Сначала на линии $x = 0$ выполняется условие пластического течения $2\sigma_y - \sigma_x = 4k$ образуется упругопластическая граница $x = m_3(t)$, продвигающаяся вглубь материала, после здесь же осуществляется условие $\sigma_x + \sigma_y = 4k$, что приводит к образованию новой области пластического течения с границей $x = m_3(t)$. В этих областях напряжения, перемещения и необратимые деформации определяются из соотношений (15) и (16) с заменой знака перед пределом текучести $k(x)$ и с учетом накопленных ранее необратимых деформаций $P_x(x)$ и $P_y(x)$.

Остаточные напряжения. С понижением температуры предел текучести повышается, что ведет к затуханию повторного пластического течения. Как и ранее разгружающая упругопластическая граница повторного пластического течения начинает

свое продвижения от линии нагрева вглубь пластины. Остаточные напряжения и перемещения находятся из соотношений

$$\begin{aligned}
 u_x &= 0.25C_1x(\lambda + 2\mu)\mu^{-1}(\lambda + \mu)^{-1} + C_2 + \\
 &+ \int_0^x P_x(\rho) d\rho + 0.5\lambda(\lambda + \mu)^{-1} \int_0^x P_y(\rho) d\rho, \\
 \sigma_x &= C_1, \quad \sigma_y = 0.5(\lambda + \mu)^{-1} \lambda C_1 + P_y\mu(\mu(\lambda + \mu)^{-1} - 3)
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Результат численных расчетов. Рассмотрим стальную пластину шириной 0.1 м., имеющую физико-механическими свойствами: $T_p = 1400^\circ C$, $T_0 = 20^\circ C$, $k = 230$ МПа, $\alpha = 11.1 \cdot 10^{-6}$, $\rho = 7814$ кг/м³, $c = 500$ Дж/(кг · К), коэффициент теплопроводности 67.7 Вт/(м · К), $\chi = 7.6$ Вт/(м · К), $K = 760$ МПа, $\mu = 351.17$ МПа, $\lambda = 526.76$ МПа.

Если скорость нагрева высока и максимальная температура тоже, то деформирование материала пластины проходит по описанной выше схеме. На рис. 2. показано распределение напряжений в момент прекращения нагрева они сжимающие, на рис. 3. остаточные напряжения растягивающие.

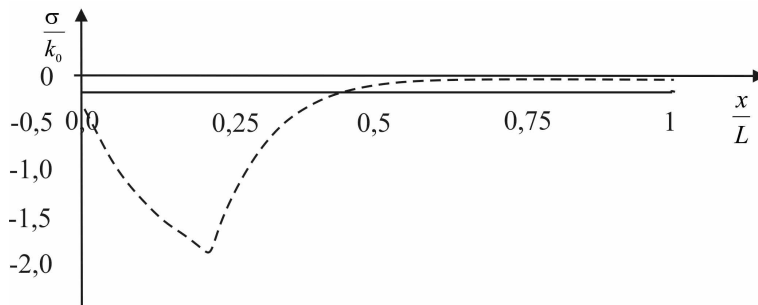


Рис. 2. Распределение напряжений в материале пластине в момент прекращения нагрева. Сплошной линией изображено σ_x , пунктирной $-\sigma_y$

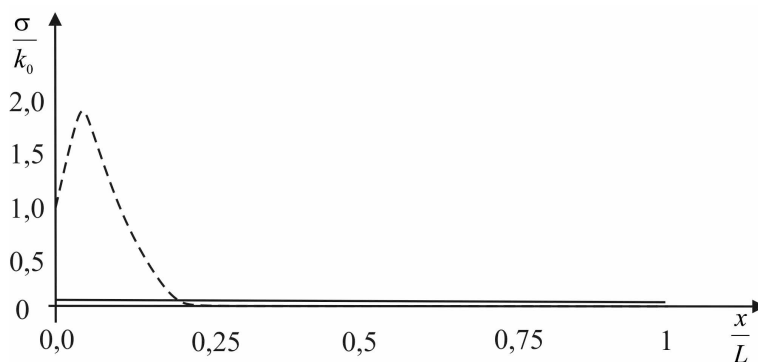


Рис. 3. Распределение остаточных напряжений. Сплошной линией изображено σ_x , пунктирной $-\sigma_y$

Если скорость нагрева небольшая и температура мала, то схема деформирования будет иной. На линии нагрева $x = 0$ выполнится лишь одно условие пластического

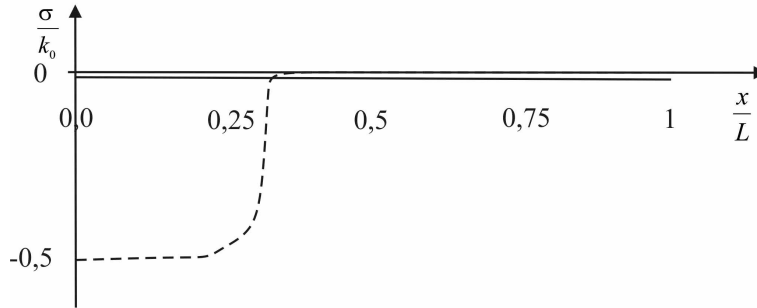


Рис. 4. Распределение остаточных напряжений. Сплошной линией изображено σ_x , пунктирной $-\sigma_y$

течения $-\sigma_x - \sigma_y = 4k$. Область необратимого деформирования распространится вглубь материала. При выравнивании температуры с линии $x = 0$ начнется разгрузка. Из-за того что необратимые деформации малы повторного пластического течения не будет, как не будет и смены знака в напряжениях. Распределение остаточных напряжений приведено на рисунке 4. Как видно они сжимающие.

Вывод. Знак остаточных напряжений зависит напрямую от уровня распределения необратимых деформаций, которые образовались в результате пластического течения, порожденного высокой температурой. Если необратимые деформации «большие», то смена знака неизбежна.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. Bland D. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients. // J. of the Mechanics and Physics of Solids. 1956. № 4. с. 209–229.
- [2] W. Mack. Thermal assembly of an elastic–plastic hub and a solid shaft // Arch. Appl. Mech. 1993. № 63. С. 42–50.
- [3] Боли Б. Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. Москва: Мир, 1964. 517 с.
- [4] А.Ю. Ишлинский Д.Д. Ивлев. Математическая теория пластичности. Москва: Физматлит, 2001. 704 с.
- [5] Greto G. Kulasegaram S. An efficient and stabilised SPH method for large strain metal plastic deformations // Computational Particle Mechanics. 2020. № 7. с. 523–539.
- [6] Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. Москва: Физматлит, 2001. 576 с.

A. V. Tkacheva

**ON THE USE OF THE CRITERION OF MAXIMUM REDUCED STRESSES IN
TEMPERATURE PROBLEMS OF PLANE DEFORMATION**

Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur, Russia

Abstract. Rabat is devoted to solving the problem of temperature deformation of a thin plate of finite width made of an elastic plastic material. As conditions for the onset of plastic flow, the condition of maximum reduced stresses is used, with the dependence of the yield strength on temperature. It is the use of the dependence of the yield strength on temperature that makes it impossible to obtain a solution with the condition of the plastic flow of Treska - Saint-Venant. It is shown that, depending on the heating rate, the distribution of residual stresses can be different.

Keywords: elasticity, plasticity, plane-stress state, temperature stresses, piecewise-molten plastic flow conditions.

REFERENCES

- [1] Bland D. R. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients. // J. of the Mechanics and Physics of Solids. 1956. no. 4. p. 209–229. (in Russian).
- [2] Mack W. Thermal assembly of an elastic–plastic hub and a solid shaft // Arch. Appl. Mech. 1993. no. 63. P. 42–50. (in Russian).
- [3] B. Pain J. W. The theory of thermal stress. Moscow: Mir, 1964. 517 p.
- [4] A.Yu. Ishlinsky D. I. Mathematical theory of plasticity. Eighth edition. Moscow: Fizmatlit, 2001. 704 p. (in Russian).
- [5] G. Greto S. K. An efficient and stabilised SPH method for large strain metal plastic deformations // Computational Particle Mechanics. 2020. no. 7. p. 523–539. (in Russian).
- [6] Polyanin A. D. Handbook of linear equations of mathematical physics. Eighth edition. Moscow: Fizmatlit, 2001. 576 p. (in Russian).