Вестник ЧГПУ им. И.Я.Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 2. С. 63–71

А. Б. Мустафаев

ОПТИМАЛЬНАЯ ФОРМА ОТВЕРСТИЯ ДЛЯ ОСТАНОВКИ ТРЕЩИНЫ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан

Аннотация. Рассматривается задача об отыскании оптимальной формы отверстия в вершине трещины продольного сдвига. Искомая форма отверстия удовлетворяет условию минимальной концентрации напряжений на его контуре. Исследуется влияние отверстия оптимальной формы на торможение трещины. Дается критерий и метод решения задачи по предотвращению хрупкого разрушения тела, ослабленного прямолинейной трещиной продольного сдвига. Используется минимаксный критерий. Получено условие хрупкого разрушения.

Ключевые слова: трещина, продольный сдвиг, оптимальное отверстие, минимаксный критерий.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.008

УДК: 539.375

Введение. Как известно, добиться остановки или торможения медленно растущей трещины возможно с помощью засверловки отверстия в ее кончике [1]. Влияние кругового и эллиптического отверстий в вершине на развитие трещины исследовалось в работах [2, 3]. Однако, форма отверстия, имеющегося в конструкционном элементе, оказывает значительное влияние на механические свойства конструкции. Оптимальная форма отверстия позволяет повысить такие свойства конструкции как прочность, надежность, долговечность. Поэтому задачи по отысканию оптимальной формы отверстия являются актуальными и имеют несомненное прикладное значение. Таким образом, целесообразно тормозить медленно растущую трещину засверловкой в вершине отверстия оптимальной формы. Оптимальной можно считать форму отверстия, при которой концентрация напряжений на контуре минимальна (относительно других возможных форм отверстий). В некоторых случаях для определения такой формы отверстия нужно решать задачу теории упругости с неизвестной границей [4–14].

В настоящей работе строится математическая модель для остановки трещины продольного сдвига с помощью засверловки в ее вершине отверстия с минимальной концентрацией напряжений.

© Мустафаев А. Б., 2021
Мустафаев Азер Байрам оглы
`e-mail:` : azer_bm@list.ru, кандидат физико-математических наук, докторант, Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан.

Поступила 15.05.2021

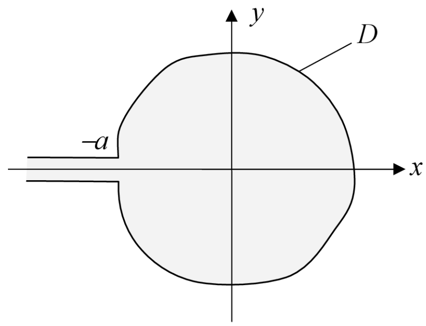

Рис. 1. Схема расположения искомого оптимального отверстия и трещины

Постановка задачи. Рассмотрим сплошное упругое деформированное тело, ослабленное прямолинейной трещиной продольного сдвига. Деформации тела приняты малыми величинами. Полагаем, что выполняется условие локальной симметрии, согласно которому в малой окрестности каждой точки контура прямолинейной трещины имеет место симметрия относительно касательной плоскости к поверхности трещины в этой точке. Считаем, что для торможения роста трещины в ее вершине высверлено отверстие. Функция геометрии формы отверстия в вершине трещины неизвестна и требует определения.

Будем рассматривать наиболее типичный и общий случай, когда характерный линейный размер отверстия мал относительно характерного линейного размера тела, т.е., выполняется условие: $L >> R >> \rho$ (L – характерный линейный размер тела; R – характерный линейный размер отверстия в вершине трещины; ρ – радиус кривизны конца трещины). В качестве характерного линейного размера тела можно брать линейный размер трещины, расстояние от конца трещины до границы тела, радиус кривизны контура трещины.

Разместим в вершине трещины центр O системы прямолинейных декартовых координат xy$z$, ось y которой направлена по нормали к поверхности трещины, ось z – вдоль контура трещины, а ось x – вглубь тела (рис. 1). Рассмотрим окрестность вершины трещины, малую относительно характерного линейного размера тела L, но большую по сравнению с размером R отверстия в вершине трещины. Рассматриваемая малая окрестность представится на плоскости Oxy бесконечной областью, занимающей внешность контура D. Параметры, характеризующие напряженно-деформированное состояние тела в этой малой окрестности, не зависят от координаты z. Считается, что упругое тело находится в условиях антиплоской деформации.

Таким образом, приходим к следующей задаче теории упругости с неизвестной границей:

$$\tau_{yz} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad -\infty < x < -a, \tag{1}$$

на неизвестном контуре отверстия $r = \rho(\theta)$

$$\tau_{zn} = 0, \ \lim\left(\tau_{yz}\sqrt{z}\right) = K_{\text{III}} \quad \text{при} \quad y = 0, \quad x \to \infty. \tag{2}$$

Здесь τ_{xz}, τ_{yz}, τ_{zn} – напряжения; θ – полярный угол; K_{III} – коэффициент интенсивности напряжений (параметр нагружения), считается известным.

Требуется определить функцию $\rho(\theta)$ (отыскать форму отверстия).

Напомним, что в условиях антиплоской деформации поле упругих смещений в рассматриваемом теле описывается следующим образом:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = w(x, y), \tag{3}$$

а напряжения на основании закона Гука представляются в виде

$$\begin{gathered} \sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0, \\ \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{yz} = \mu\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = \mu\frac{\partial w}{\partial x}, \end{gathered} \tag{4}$$

где $\mu = E/2(1 + \nu)$ – модуль сдвига; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона.

В условиях антиплоской деформации напряжения и перемещения можно представить [15] через одну аналитическую функцию $f(z)$

$$w = Ref(z), \quad \tau_{xz} + i\tau_{yz} = \mu\overline{f'(z)}, \quad z = x + iy. \tag{5}$$

Для нахождения формы отверстия (определения функции $\rho(\theta)$) постановку задачи следует дополнить критерием выбора формы отверстия. В качестве этого критерия принимаем минимизацию максимального напряжения $\tau_{\theta z}$ вдоль контура отверстия. Следовательно, в рассматриваемом случае отыскания для отверстия в вершине трещины в упругом теле, формы, обладающей минимальной концентрацией напряжения, приходим к обратной задаче теории упругости с дополнительным условием

$$\min_{\eta\in C}\max_{\theta\in[0,2\pi]}\tau_{\theta z}(\theta, \eta), \tag{6}$$

где $\tau_{\theta z}$ – касательное напряжение, C – ограничения, подлежащие определению, η – проектные параметры.

Дополнительное условие (6) позволяет найти искомую функцию $\rho(\theta)$ формы отверстия.

Метод решения. Представим неизвестный контур отверстия в виде

$$\rho(\theta) = R + \varepsilon h(\theta), \tag{7}$$

в котором функция $h(\theta)$ подлежит определению в процессе решения задачи. Здесь $\varepsilon = R_0/R$ – малый параметр, R_0 – наибольшая высота отклонения (неровности) профиля контура отверстия от окружности $r == R$. Используется полярная система координат r, θ с центром в точке O, в которой линия $\theta = 0$ соответствует продолжению трещины.

Без уменьшения общности рассматриваемой задачи принимаем, что неизвестная функция $h(\theta)$ может быть представлена в виде отрезка тригонометрического ряда Фурье

$$h\left(\theta\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha_k\cos k\theta + \beta_k\sin k\theta\right). \tag{8}$$

Напряжения и перемещения ищутся в виде разложений по малому параметру ε, в которых для упрощения пренебрегается членами, содержащими ε в степени выше первой:

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^{(0)} + \varepsilon\tau_{xz}^{(1)} + ..., \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^{(0)} + \varepsilon\tau_{yz}^{(1)} + ..., \quad w = w^{(0)} + \varepsilon w^{(1)} + ... \tag{9}$$

Каждое из этих приближений удовлетворяет дифференциальным уравнениям плоской задачи теории упругости в условиях антиплоской деформации.

Разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности $r = R$, находим значения компонент тензора напряжений при $r = \rho(\theta)$. Согласно известным формулам для компонент напряжений, граничные условия задачи примут следующий вид: для нулевого приближения

$$\tau_{zn}^{(0)} = 0 \quad \text{на контуре } r = R, \tag{10}$$

$$\tau_{yz}^{(0)} = 0 \quad \text{на берегах трещины при} \quad y = 0, \quad -\infty < x < -R; \tag{11}$$

для первого приближения

$$\tau_{zn}^{(1)} = T(\theta) \quad \text{на контуре} \quad r = R, \tag{12}$$

$$\tau_{yz}^{(1)} = 0 \quad \text{на берегах трещины при } y = 0, \quad -\infty < x < -R. \tag{13}$$

Здесь функция $T(\theta)$ зависит от напряженного состояния в нулевом приближении и функции $h(\theta)$.

Решение задачи в нулевом приближении. Введем вспомогательную аналитическую функцию $\phi(z) = zf\prime(z)$. Тогда задача (10)-(12) в нулевом приближении (рис. 2) сводится с помощью представлений (5) к граничной задаче для аналитической функции $\phi(z)$

$$\begin{gathered} Im[\phi(z)] = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad -\infty < x < -R; \\ Re[\phi(z)] = 0 \quad \text{при} \quad |z| = R; \end{gathered} \tag{14}$$

$$\lim \phi(z) = -\frac{2iK_{\text{III}}}{\mu}\sqrt{z} \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{15}$$

Сначала следует найти функцию $z = \omega(\zeta)$, осуществляющую отображение верхней полуплоскости комплексного переменного ζна внешность контура D_0 в физической плоскости $z = x \ + iy$ (рис. 2). Применяя преобразование $z_1 = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$ верхнюю полуплоскость ζ отображаем на верхнюю полуплоскость z_1 с выброшенным полукругом единичного радиуса, затем, с помощью функции $z_2 = -iz_1$, переводим полуплоскость z_1 в правую полуплоскость с выброшенным полукругом единичного радиуса. Используя преобразование $z_3 = z_2^2$ правую полуплоскость z_2 отображаем на внешность контура D_1, представляющего собой разрез вдоль $y = 0, -\infty < x_3 < -1$ и единичной окружности с центром в начале координат $x_3 y_3$. С помощью преобразования $z = Rz_3$, отображаем внешность контура D_1 на внешность контура D_0 в физической плоскости z. Таким образом, функция $z = \omega(\zeta)$ записывается в раскрытом виде

$$z = Rz_3 = Rz_2^2 = R\left(-z_1^2\right) = R\left[-\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)^2\right]. \tag{16}$$

Перейдем на параметрическую плоскость комплексного переменного ζ при помощи преобразования $z = \omega(\zeta)$.

Принимая обозначения

$$\Phi(\zeta) = \phi[\omega(\zeta)],$$

на основании граничного условия (14) получаем на вспомогательной плоскости $\zeta = \eta + i\xi$ смешанную краевую задачу для определения аналитической функции $\Phi(\zeta)$

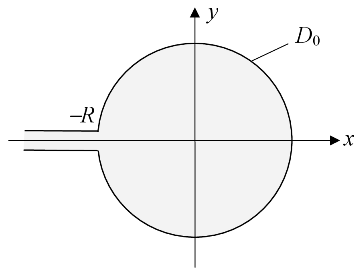

Рис. 2. Расчетная схема задачи в нулевом приближении

$$
\begin{array}{c}
Im\Phi(\zeta)=0 \quad \text{при} \quad \xi=0, \quad -\infty<\eta<-1; \\
Re\Phi(\zeta)=0 \quad \text{при} \quad \xi=0, \quad -1<\eta<1; \\
Im\Phi(\zeta)= \quad 0\text{при} \quad \xi=0, \quad 1<\eta<\infty.
\end{array} \tag{17}
$$

В бесконечно удаленной точке на основании (15) для функции $\Phi(\zeta)$ имеет место выражение:

$$
\Phi\left(\zeta\right)=-\frac{2K_{\mathrm{III}}\sqrt{R}\zeta}{\mu}. \tag{18}
$$

Решение краевой задачи (17), (18) в классе всюду ограниченных функций имеет вид:

$$
\Phi\left(\zeta\right)=-\frac{2K_{\mathrm{III}}\sqrt{R}}{\mu}\sqrt{\zeta^2-1}. \tag{19}
$$

Таим образом, для аналитической функции $f(z)$ имеем

$$
f'\left(z\right)=-\frac{iK_{\mathrm{III}}}{\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}+\frac{R}{z^{3/2}}\right). \tag{20}
$$

Используя полученные соотношения (20) и представления (5), находим напряжения в нулевом приближении

$$
\begin{array}{c}
\tau^0_{xz}=-\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{r}}\left(\sin\frac{1}{2}\theta+\frac{R}{r}\sin\frac{3}{2}\theta\right), \\
\tau^0_{yz}=\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{r}}\left(\cos\frac{1}{2}\theta+\frac{R}{r}\cos\frac{3}{2}\theta\right), \\
\tau^0_{z\theta}=\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{r}}\left(1+\frac{R}{r}\right)\cos\frac{1}{2}\theta, \quad \tau^0_{zr}=\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{r}}\left(1-\frac{R}{r}\right)\sin\frac{1}{2}\theta.
\end{array} \tag{21}
$$

Получив напряженное состояние в нулевом приближении, находим формально функцию $T(\theta)$.

Решение задачи в первом приближении. В первом приближении граничные условия задачи для вспомогательной аналитической функции $\phi_1(z)=zf'_1(z)$ имеют вид:

$$
\begin{array}{c}
Im\phi_1(z)=0 \quad \text{при} \quad y=0,-\infty<\eta<-R, \\
Re[\phi_1(z)]=T \quad \text{при} \quad |z|=R,
\end{array} \tag{22}
$$

$$\lim \phi_1(z) = 0 \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{23}$$

Для решения краевой задачи (22), применяя преобразование $z = \omega(\zeta)$, переходим на параметрическую плоскость комплексного переменного ζ.

Обозначая

$$\Phi_1(\zeta) = \phi_1[\omega(\zeta)],$$

с помощью граничного условия (22) приходим на параметрической плоскости $\zeta = \eta + i\xi$ к смешанной краевой задаче для нахождения аналитической функции $\Phi_1(\zeta)$:

$$\begin{array}{c} Im\Phi_1(\zeta) = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad -\infty<\eta<-1, \\ Re\Phi_1(\zeta) = T \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad -1<\eta<1, \end{array} \tag{24}$$

$$Im\Phi_1(\zeta) = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad 1<\eta<\infty. \tag{25}$$

На основании (23) в бесконечно удаленной точке $\Phi_1(\zeta) \to 0$.

Решение краевой задачи (24)-(25) в классе всюду ограниченных функций имеет вид

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{T(\eta)\, d\eta}{\eta - \zeta}. \tag{26}$$

Учитывая поведение функции $\Phi_1(\zeta)$ на бесконечности, записываем условие разрешимости краевой задачи (24)-(25):

$$\int_{-1}^{1} \frac{T(\eta)\, d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = 0. \tag{27}$$

Условие (27) служит для определения размера a (рис. 1).

С помощью полученных соотношений (26), (27) и представления (5), также как и в нулевом приближении, находим напряжения в первом приближении.

Решение задачи оптимизации. Для заданной функции $h(\theta)$ формы отверстия полученные соотношения являются замкнутыми и позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние тела в условиях антиплоской деформации.

Чтобы построить недостающие уравнения, позволяющие найти коэффициенты α_k и β_k ряда Фурье искомой функции $h(\theta)$, определим тангенциальное напряжение $\tau_{z\theta}$ на контуре отверстия. Используя полученное решение, находим напряжения $\tau_{z\theta}$ в поверхностном контуре $L(r = \rho(\theta))$ с точностью до величин первого порядка относительно малого параметра ε

$$\tau_{z\theta} = \tau_{z\theta^{(0)}}\big|_{r=R} + \varepsilon \left[h(\theta) \frac{\partial \tau_{z\theta}^{(0)}}{\partial r} + \tau_{z\theta}^{(1)}(\theta) \right]\Bigg|_{r=R}. \tag{28}$$

Недостающие уравнения для определения искомых коэффициентов α_k, β_k. получаем, требуя распределения напряжений на контуре отверстия соответственно условию (7) оптимизации. Для функции $\tau_{z\theta}(\theta,\alpha_k,\beta_k)$ находим ее максимальное значение на контуре L

$$\max \tau_{z\theta}(\theta_*,\, \alpha_k,\, \beta_k).$$

Здесь величина θ_* есть решение следующего уравнения

$$\frac{d\tau_{\theta z}(\theta)}{d\theta} = 0.$$

Максимальное значение функции $\tau_{z\theta}(\theta)$ находится обычными методами дифференциального исчисления. Для построения недостающих уравнений требуем минимизации максимальное значение функции $\tau_{z\theta}$ вдоль контура L

$$\min_{\eta \in C} \max_{\theta \in [0,2\pi]} \tau_{\theta z}(\eta, \theta). \tag{29}$$

Необходимо, чтобы обеспечивалась минимизация максимального касательного напряжения $\tau_{z\theta}$ на контуре отверстия, т.е. выполнялся минимаксный критерий (29) при ограничениях

$$\tau_{z\theta} \leq [\tau]. \tag{30}$$

Здесь $[\tau]$ – допустимое касательное напряжение, определяемое опытным путем.

Следует распорядиться функцией $H(\theta)$ таким образом, чтобы обеспечивалась минимизация максимального значения напряжения $\tau_{z\theta}$. Требуется найти такие значения коэффициентов α_k, β_k, которые удовлетворяют полученной системе уравнений и обращают в минимум линейную функцию $\max\tau_{z\theta}$ (целевую функцию).

Поскольку напряжения $\tau_{z\theta}(\theta,\alpha_k,\beta_k)$ (показатель качества управления) и $\max\tau_{z\theta}$ линейно зависят от искомых коэффициентов α_k, β_k, задача сводится к задаче линейного программирования. В рассматриваемой задаче наиболее эффективным оказывается метод симплексного алгоритма.

Система уравнений (30) совместно с полученными соотношениями задачи теории упругости в нулевом и первом приближении позволяет определить оптимальную форму отверстия, напряженно-деформированное состояние тела.

Рост трещины продольного сдвига происходит по направлению максимального касательного напряжения $\tau_{z\theta}$ [16]. Таким направлением является продолжение трещины ($\theta = 0$). Следовательно, как только напряжение $\tau_{z\theta}$ окажется равным некоторой предельной величине τ_c, характерной для данного материала, трещина продольного сдвига будет расти. Таким образом, условием хрупкого разрушения будет

$$\tau_{z\theta}(K_{III}) = \tau_c. \tag{31}$$

Согласно условию (31) трещина будет расти, как только коэффициент интенсивности напряжений K_{III} (параметр нагружения) достигает некоторой критической величины, при которой оптимальное значение напряжения оказывается равной предельной величине τ_c. Величина τ_c характерной для данного материала и зависит от характерного размера отверстия в кончике трещины и прочности материала.

При выполнении расчетов для упрощения принималось, что искомый контур отверстия симметричен относительно координатных осей. Результаты расчетов коэффициентов α_{2k} разложения функции $h(\theta)$ приведены в таблице.

Выводы

a_0	a_2	a_4	a_6	a_8	a_{10}	a_{12}
0,0772	0,0943	0,0102	0,0090	0,0063	0,0038	0,0017

Таблица 1. Значение коэффициентов Фурье для оптимальной формы отверстия кончике трещины продольного сдвига

Построена математическая модель торможения трещины продольного сдвига с помощью засверловки в ее вершине отверстия с минимальной концентрацией напряжений на контуре. Построенная модель позволяет находить решение задачи оптимального проектирования по определению формы отверстия, эффективно замедляющего рост трещины.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Финкель В. М. Физические основы торможения разрушения. Металлургия: Москва, 1977. 360 с.
[2] Мирсалимов В. М. Влияние разгружающих отверстий на развитие трещины // Проблемы прочности. 1971. Т. 3, № № 4. С. 18–19.
[3] Мирсалимов В. М. Об одном способе торможения растущих трещин // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1972. № № 1. С. 34–38.
[4] Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. Наука: Москва, 1980. 256 с.
[5] Wheeler L. T. Stress minimum forms for elastic solids // ASME. Appl. Mech. Rev. 1992. Vol. 45, no. No. 1. P. 1–12.
[6] Vigdergauz S. The stress-minimizing hole in an elastic plate under remote shear // J. of Mechanics of Materials and Structures. 2006. Vol. 1, no. No. 2. p. 387–406.
[7] Cherepanov G. P. Optimum shapes of elastic bodies: equistrong wings of aircrafts and equistrong underground tunnels // Физ. мезомеханика. 2015. Vol. 18, no. No. 5. p. 114–123.
[8] Mirsalimov V. M. Inverse problem of elasticity for a plate weakened by hole and cracks // Mathematical Problems in Engineering. 2019. Vol. 2019, no. Article ID 4931489. p. 11.
[9] Mir-Salim-zade M. V. Minimization of the stressed state of a stringer plate with a hole and rectilinear cracks // Journal of Mechanical Engineering. 2019. Vol. 22, no. No. 2. p. 59–69.
[10] Mirsalimov V. M. Minimization of the stressed state of a stringer plate with a hole and rectilinear cracks // Engineering Optimization. 2020. Vol. 52, no. No. 2. p. 288–302.
[11] Zeng X., Lu A., Sh. W. Shape optimization of two equal holes in an infinite elastic plate // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2020. Vol. 48, no. No. 2. p. 133–145.
[12] Mirsalimov V. M. Optimal hole shape in plate with cracks taking into account body forces // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2020. p. 133–145.
[13] Vigdergauz S., Elishakoff I. Stress minimization around a hole with a stochastically simulated microrough edge in a loaded elastic plate // J. of mechanics of materials and structures. 2020. Vol. 15, no. No. 2. p. 277–289.
[14] Mirsalimov V. M. Optimal design of shape of a working in cracked rock mass // Geomechanics and Engineering. 2021. Vol. 24, no. No. 3. p. 227–235.
[15] Мирсалимов В. М. Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами. Элм: Баку, 1984. 124 с.
[16] Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О хрупких трещинах продольного сдвига // Прикл. математика и механика. 1961. Т. 25, № Вып. 6. с. 1110–1119.

A. B. Mustafayev

OPTIMAL HOLE SHAPE FOR ARREST OF LONGITUDINAL SHEAR CRACK

Institute of Mathematics and Mechanics of the Academy of Sciences of Azerbaijan

Abstract. The problem of finding optimal hole shape at the tip of a longitudinal shear crack is considered. The desired hole shape satisfies the condition of the minimum stress concentration on the contour. The effect of the optimal hole shape on deceleration of a crack is studied. A criterion and solution method for the problem of preventing brittle fracture of the solid weakened by rectilinear longitudinal shear crack is given. The minimax criterion is used. The brittle fracture condition is obtained.

Keywords: crack, longitudinal shear, optimal hole, minimax criterion

REFERENCES

[1] Finkel V. M. Physics of Fracture. Metallurgiya: Moscow, 1977. 360 p.
[2] Mirsalimov V. M. Effect of relieving apertures on crack development // Strength of Materials. 1971. Vol. 3, no. No. 4. P. 18–19.
[3] Mirsalimov V. M. On a method of growing cracks inhibition // Izv. Akad. nauk Azerbajdzhanskoj SSR, serija fiz.-tehn. i mat. nauk. 1972. no. No. 1. P. 34–38.
[4] Banichuk N. V. Optimization of shapes of elastic solids. Nauka: Moscow, 1980. 256 p.
[5] Wheeler L. T. Stress minimum forms for elastic solids // ASME. Appl. Mech. Rev. 1992. Vol. 45, no. No. 1. P. 1–12.
[6] Vigdergauz S. The stress-minimizing hole in an elastic plate under remote shear // J. of Mechanics of Materials and Structures. 2006. Vol. 1, no. No. 2. p. 387–406.
[7] Cherepanov G. P. Optimum shapes of elastic bodies: equistrong wings of aircrafts and equistrong underground tunnels // Physical Mesomechanics. 2015. Vol. 18, no. No. 5. p. 114–123.
[8] Mirsalimov V. M. Inverse problem of elasticity for a plate weakened by hole and cracks // Mathematical Problems in Engineering. 2019. Vol. 2019, no. Article ID 4931489. p. 11.
[9] Mir-Salim-zade M. V. Minimization of the stressed state of a stringer plate with a hole and rectilinear cracks // Journal of Mechanical Engineering. 2019. Vol. 22, no. No. 2. p. 59–69.
[10] Mirsalimov V. M. Minimization of the stressed state of a stringer plate with a hole and rectilinear cracks // Engineering Optimization. 2020. Vol. 52, no. No. 2. p. 288–302.
[11] Zeng X., Lu A., Wang S. Shape optimization of two equal holes in an infinite elastic plate // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2020. Vol. 48, no. No. 2. p. 133–145.
[12] Mirsalimov V. M. Optimal hole shape in plate with cracks taking into account body forces // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2020. p. 133–145.
[13] Vigdergauz S., Elishakoff I. Stress minimization around a hole with a stochastically simulated micro-rough edge in a loaded elastic plate // J. of mechanics of materials and structures. 2020. Vol. 15, no. No. 2. p. 277–289.
[14] Mirsalimov V. M. Optimal design of shape of a working in cracked rock mass // Geomechanics and Engineering. 2021. Vol. 24, no. No. 3. p. 227–235.
[15] Mirsalimov V. M. Fracture of elastic and elastoplastic solids with cracks. Elm: Baku, 1984. 124 p.
[16] Barenblatt G. I., Cherepanov G. P. On brittle cracks under longitudinal shear // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1961. Vol. 25, no. 6. p. 1654–1666.

Mustafayev Azer Bayram ogly
`e-mail:` azer_bm@list.ru, Ph.D. Phys. & Math., doctoral student, Institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan.