

Т. С. Алероев¹, А. Н. Хворова²

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРА ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В СКВАЖИНЕ

¹ *Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия*

² *Центральный научно-исследовательский институт строительных конструкций (ЦНИИСК) имени В. А. Кучеренко, г. Москва, Россия*

Аннотация. В данной статье рассматривается идентификация параметров математической модели, основанной на дифференциальном уравнении с дробными производными. С помощью этой модели описывается установившееся течение в скважине в трещинном деформированном пласте. Рассматриваемая модель может быть использована и при разработке нефтяных месторождений с трещиноватыми коллекторами. Идентификация параметра осуществлялась с помощью оптимизации показателя качества адекватности математической модели - коэффициента детерминации. Также была представлена технология прогнозирования результатов давлений, для области, в которой не проводились экспериментальные измерения. Предлагаемая технология сопровождается расчетами.

Ключевые слова: идентификация параметра, дробная производная, коэффициент детерминации, математическая модель, уравнение движение жидкости

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.009

УДК: 539.374

Введение.

Как правило, разработка нефтяных месторождений - сложная задача и поэтому вместо реально существующего объекта рассматривают математическую модель, которая отражает основные свойства реальной технической системы. Эффективность

© Алероев Т. С., Хворова А. Н., 2021

Алероев Темирхан Султанович

e-mail: aleroevts@mgsu.ru, профессор, доктор физико-математических наук, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Хворова Алла Николаевна

e-mail: attemp2016@gmail.com, инженер, Центральный научно-исследовательский институт строительных конструкций (ЦНИИСК) имени В. А. Кучеренко, г. Москва, Россия.

Поступила 20.08.2021

разработки месторождений напрямую зависит от состояния призабойной зоны скважины (ПЗС) – участка пласта, примыкающего к стволу скважины. Так как в пределах ПЗС изменяются фильтрационные характеристики продуктивного пласта, на всех этапах разработки месторождений необходимо вести регистрацию забойного давления [1]. Экспериментальное определение забойного давления, сопровождается некоторыми погрешностями, которые могут снизить точность построения индикаторных линий и вычисления коэффициента продуктивности. В работе [2] рассматривается двухмерная задача установившегося течения жидкости для скважины в трещиноватом деформированном пласте, которая описывается уравнением (1)

$$P'(r) [D^\alpha P(r)]^2 = a(r)D^\alpha P(r) + b(r), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1)$$

с начальным условием

$$P(0) = 0.$$

Данное уравнение содержит оператор дробного дифференцирования и описывает зависимость мощности слоя H , вскрываемого пласта, от значений градиента давления ∇P . Уравнение (1) сводится к системе уравнений (2)

$$\begin{cases} D^\beta v(r) [v(r)]^2 = a(r)v(r) + b(r), \\ D^\alpha P(r) = v(r), \end{cases} \quad (2)$$

с граничным условием

$$P(0) = 0.$$

В случае $P(0) = c \neq 0$, применяем замену переменной $P_1(r) = P(r) - c$, при этом новая функция так же будет удовлетворять уравнению (1) [2].

α – эмпирический коэффициент, описывающий изменение мощности слоя в зависимости от градиента давления.

Значение β вычисляется как:

$$\beta = 1 - \alpha.$$

Коэффициенты $a(r)$ и $b(r)$ вычисляются как

$$a(r) = \frac{\mu Q |\nabla P|_{crit}^\alpha}{2\pi r h k}; \quad (3)$$

$$b(r) = \frac{\mu \beta_k}{k} \left(\frac{Q |\nabla P|_{crit}^\alpha}{2\pi r h} \right)^2, \quad r \in [0, r_k], \quad (4)$$

где ∇P – градиент давления, \bar{v} – вектор скорости, k – проницаемость среды, v – модуль \bar{v} , μ – вязкость жидкости, β_k – константа пропорциональности, r_k – радиус контура питания.

На рис. 1 представлены зависимости, полученные при решении численным методом с помощью программы MATHECAD уравнения (1) и при различных значениях α со следующими параметрами [3]

$$\mu = 10^{-13} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad k = 10^{-3} \text{ м}^2, \quad h = 10 \text{ м}, \quad |\nabla P|_{crit} = 2.5 \cdot \frac{10^5 \text{ Па}}{\text{м}}, \quad \beta_k = 10^3 \text{ с/м},$$

$$Q = 11.5 \times 10^{-5} \cdot \text{м}^3/\text{с}.$$

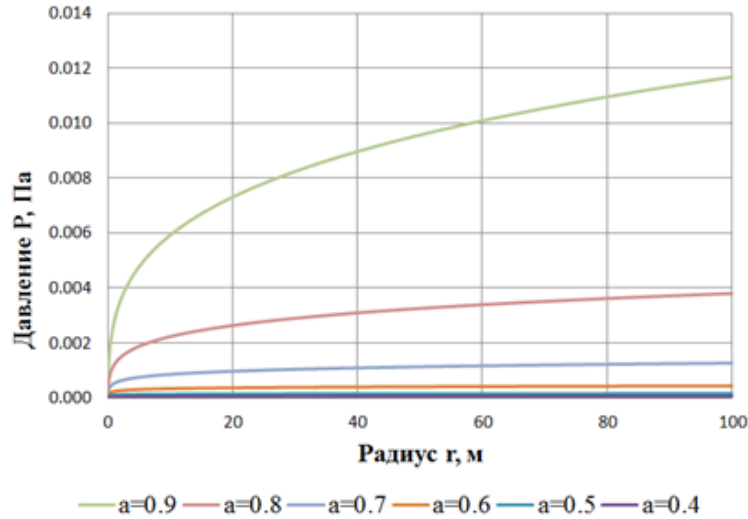


Рис. 1. Зависимость изменения давления P от r при $Q = 11,5 \times 10^{-5} \cdot \text{м}^3/\text{с}$ и при различных α .

Каждой скважине соответствует конкретная величина α . Определить ее можно путем обработки зависимости действующей толщины пласта от градиента давления, получаемой в результате промысловых исследований. Поэтому идентификация параметра α является важнейшей задачей для аппроксимации полученных исследований.

В данной статье для исследования рассматриваются эмпирические данные измерения давлений в призабойных зонах нескольких скважин Ставропольского края. На рисунке 2 приведены зависимости результатов измерений давлений на расстоянии r от ствола скважин под номером 1 и 2. В таблицах 1, 2 эти значения представлены в числовом виде [2].

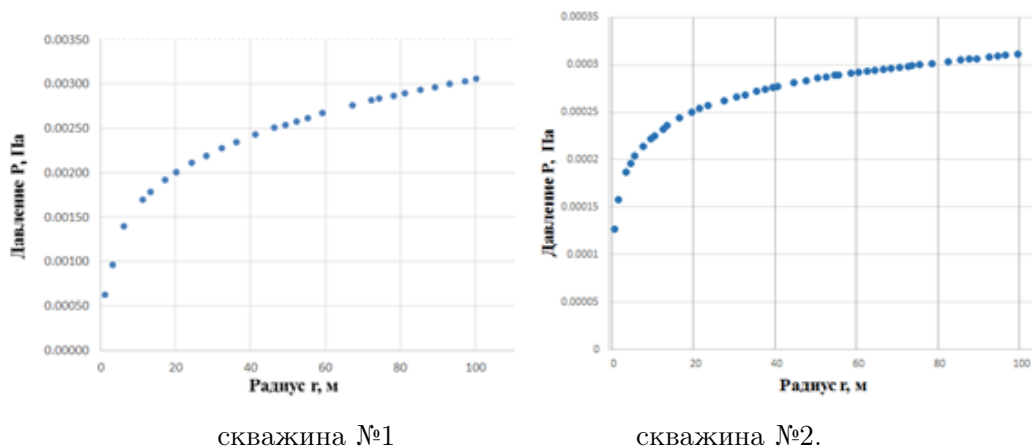


Рис. 2. Эмпирические данные изменения давления P в призабойных зонах.

Метод исследования

R, м	2	4	7	12	14	18	21	25	29
P, Па · 10 ⁻⁴	6.3	97	14	17.05	17.85	19.25	20.15	21.15	22
R, м	33	37	42	47	50	53	56	60	67
P, Па · 10 ⁻⁴	22.8	23.5	24.35	25.1	25.4	25.8	26.25	26.75	27.67
R, м	72	74	78	81	85	89	93	97	100
P, Па · 10 ⁻⁴	28.2	28.4	28.7	29	29.4	29.7	30.03	30.33	30.6

Таблица 1. Экспериментальные значения для скважины №1.

R, м	2	3.5	6	7	8	9	10.5	12	13
P, Па · 10 ⁻⁴	1.27	1.58	1.87	1.96	2.04	2.15	2.23	2.26	2.32
R, м	14.5	17	20	22	24	28	31	33	36
P, Па · 10 ⁻⁴	2.36	2.44	2.51	2.55	2.58	2.63	2.67	2.69	2.72
R, м	38	40	41,5	45	48	51	53	56	59
P, Па · 10 ⁻⁴	2.74	2.77	2.78	2.82	2.84	2.86	2.88	2.9	2.92
R, м	61	63	65	67	69	71	73	74,5	76
P, Па · 10 ⁻⁴	2.93	2.94	2.95	2.96	2.97	2.98	2.99	2.99	3
R, м	79	83	86	88	90	93	95	97	100
P, Па · 10 ⁻⁴	3.02	3.04	3.05	3.06	3.07	3.09	3.1	3.11	3.12

Таблица 2. Экспериментальные значения для скважины №2.

Методы математического моделирования широко применяются в различных областях науки производства и техники, например, экономики [4-8], животноводстве [9,10], на предприятиях нефтегазовой отрасли [11,12,13] и других. Применим идею прогнозирования для моделей, основанных на дифференциальных уравнениях с дробными производными.

Предлагаем идентификацию параметра дробной производной для конкретной скважины производить с помощью максимизации численного показателя качества математической модели - коэффициента детерминации (R^2). Коэффициент детерминации будет являться мерой адекватности математической модели. Коэффициент детерминации равен 1 в случае абсолютной сходимости графика численного решения с кривой экспериментальных данных. В нашем случае коэффициент детерминации определяется как:

$$R^2 = 1 - \frac{D_{\text{ост}}}{D_{\text{общ}}} \cdot \frac{n-1}{n-2}, \quad (5)$$

где n – количество рассматриваемых значений, $n-1$ – степень свободы для общей дисперсии ($D_{\text{общ}}$), $n-2$ – степень свободы для остаточной дисперсии ($D_{\text{ост}}$):

$$D_{\text{ост}} = \sum_1^n (P_{r_i}^{\text{ч}} - P_{r_i}^{\text{э}}). \quad (6)$$

$P_{r_i}^{\text{ч}}$ – значения давлений в точках r_i , полученные при численном решении задачи (1), $P_{r_i}^{\text{э}}$ – измерения полученные при экспериментальном исследовании скважины, n – количество данных. $D_{\text{общ}}$ – общая дисперсия \bar{P} – среднее значение экспериментальных

измерений:

$$D_{\text{общ}} = \sum_1^n (P_{r_i}^{\text{э}} - \bar{P}) \quad (7)$$

На рисунке 3 представлена геометрическая интерпретация экспериментальных данных и результатов математической модели (1), полученных при решении системы уравнений (2) с идентифицированным параметром α . Для скважины №1 $\alpha = 0.653$, для скважины №2 $\alpha = 0.762$.

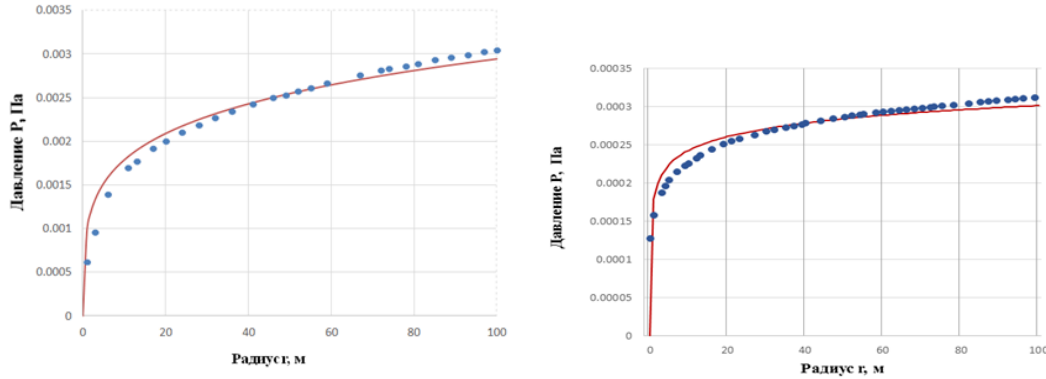


Рис. 3. Точечный график соответствует экспериментальным данным, сплошная линия соответствует результатам математической модели.

В таблице 3 приведены рассчитанные значения показателя качества модели – R^2 , необходимые для идентификации параметра α двух рассматриваемых скважин. Значимость коэффициента качества модели подтверждена с помощью критерия Фишера на уровне значимости 0.05 для скважины №1 ($F_{\text{кр}} = 1.9472$; $F_{\text{набл}} = 210.3656$ при $k_1 = 26$, $k_2 = 25$) и для скважины №2 ($F_{\text{кр}} = 1.6475$; $F_{\text{набл}} = 786.4016$ при $k_1 = 45$, $k_2 = 44$). Отвергается основная гипотеза о незначимости показателя качества R^2 : $H_0 : R^2 = 0$ и принимается конкурирующая гипотеза о значимости R^2 : $H_1 : R^2 \neq 0$. Из таблицы 3 наблюдаем, что значения R^2 для скважины №1 и №2 близки к единице. Следовательно, рассматриваемая математическая модель с идентифицированными параметрами является адекватной для описания рассматриваемого процесса.

Номер скважины	Порядок производной	$D_{\text{ост}}$	$D_{\text{общ}}$	R^2
Скважина №1	$\alpha = 0.653$	$8.138 \cdot 10^{-7}$	0.000524	0.99545
Скважина №2	$\alpha = 0.762$	$7.83181 \cdot 10^{-7}$	0.000622	0.99873

Таблица 3. Расчетные значений коэффициентов детерминации.

В случае прогнозирования значений давления в областях, где экспериментальных измерений не проводилось, может быть применена технология прогнозирования с вычислением доверительного интервала для искомой величины. Доверительный интервал для прогнозируемого значения находится следующим образом

$$(P_{\text{пр}} - (1 - R^2)P_{\text{пр}}) \leq P_{\text{прогн}} \leq (P_{\text{пр}} + (1 - R^2)P_{\text{пр}}) \quad (8)$$

$P_{\text{прогн}}$ – прогнозируемое значение давления в скважине. $P_{\text{пр}}$ – значение точечного прогноза давления в призабойной зоне скважины, полученное с помощью математической модели (1) численным методом при идентифицированном параметре α . $(1 - R^2)P_{\text{пр}}$ – величина стандартной ошибки прогнозированного значения.

Обсуждение результатов.

Для прогнозируемого значения давления на расстоянии 103 метра от центра скважины № 1, при $\alpha = 0.653$, был рассчитан доверительный интервал [0.0003256 Па, 0.0003268 Па]. Для скважины № 2, при $\alpha = 0.762$, был получен доверительный интервал [0.002946 Па, 0.002954 Па].

Представленная технология построения математической модели и ее идентификация является эффективным инструментом для решения рассматриваемой задачи. Как показывают расчеты, вариант прогнозирования, основанный на дисперсионном анализе, позволяет получить минимальный доверительный интервал для прогнозируемого значения и обеспечен необходимыми критериями.

Заключение.

Математическая модель, представленная в данной статье, хорошо аппроксимирует данные промысловых исследований, полученных на основе индикаторных линий. Также модель обосновывает зависимость расхода жидкости от перепада давления, которая используется при обработке данных гидродинамических исследований при установившемся притоке жидкости к скважине в трещиноватом деформированном пласте.

Предложенная технология прогнозирования позволяет получить минимальный доверительный интервал прогнозируемого значения и для модели, основанной на дифференциальном уравнении с дробными производными, приводится впервые.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шаймуратов Р. В. Гидродинамика нефтяного трещиноватого пласта. М. : Недра, 1980.
- [2] Aleroev T. S., Aleroeva H. T., Yifa Tang, Siyan Zhang Features of seepage of a liquid to a chink in the cracked deformable layer // International journal of modeling, simulation, and scientific computing. 2010. Vol. 01. No 3. P. 333–347.
- [3] Хворова А. Н., Ерохин С. В. Математическая модель просачивания жидкости в трещиноватом слое // Научно-технический вестник Поволжья. № 1. 2020. С. 138–141.
- [4] Орлов В. Н., Иванова Т. В. Построение прогнозных математических моделей анализа сельскохозяйственного производства // Экономика, управление. 2016. № 10. С. 67–76.
- [5] Орлов В. Н., Иванова Т. В. Математическое моделирование в исследовании воспроизводства кадров массовых профессий в растениеводстве и животноводстве Чувашской Республики // Экономика сельскохозяйственных и перерабатывающих предприятий. 2016. № 12. С. 73–77.
- [6] Orlov V., Ivanova T., Brenchagova S. Rumbayeva N. Mathematical modeling of economic factors impact: reproduction of personnel potential in agriculture sector of Russia // IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. 2020. Vol. 433. P. 012012.
- [7] Орлов В. Н., Иванова Т. В., Соколова Г. Н. Методика оценки кадрового потенциала в сельском хозяйстве Экономика сельского хозяйства России. 2017. № 7. С. 47–53.
- [8] Ivanova T., Arkhipova V., Ivanitskaya I. Assessment of the influence of social factors on reproduction of personnel potential in agriculture of Russia // E3S Web Conf. 2019. Vol. 110
- [9] Орлов В. Н., Кульмакова Н. И. Прогнозирование в технологии воспроизводства свиней Инновации в АПК: проблемы и перспективы // Белгородский ГСХА. 2016. №4(12). С. 130–137.
- [10] Orlov V., Kulmakova N., Ivanitskiy A., Sevastyanova N., Mongush S. Pork production technology optimization based on mathematical modelling // E3S Web Conf. 2019. Vol. 91. P. 06009
- [11] Orlov V., Detina E., Kovalchuk O. Mathematical modeling of emergency situations at objects of production and gas transportation // MATEC Web of Conferences. 2018. Vol. 251

- [12] Orlov V., Detina E. Probabilistic approach to the investigation of the causes of emergencies at the gas pipeline facilities // MATEC Web of Conferences. 2018. Vol. 251
- [13] Orlov V., Detina E., Kovalchuk O. Mathematical modelling in tasks of predicting the operational reliability of gas networks facilities // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2021. Vol. 1030. P. 012083

T. S. Aleroev¹, A. N. Hvorova²

A MATHEMATICAL MODEL FOR IDENTIFYING THE FRACTIONAL DERIVATIVE PARAMETER AND PREDICTING THE RESULTS FOR THE FLUID FLOW EQUATION IN THE WELL.

¹*Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

²*Research Institute of Building Constructions (TSNIISK) Named After V. A. Koucherenko, Moscow, Russia*

Abstract. This article discusses the identification of the parameters of a mathematical model based on a differential equation with fractional derivatives. This model is used to describe the steady-state flow in a well in a fractured deformed formation. The considered model can be used in the development of oil fields with fractured reservoirs. The identification of the parameter was carried out by optimizing the quality indicator of the adequacy of the mathematical model - the coefficient of determination. The technology for predicting the results of pressures was also presented, for an area in which no experimental measurements were carried out. The proposed technology is accompanied by calculations.

Keywords: parameter identification, fractional derivative, determination coefficient, mathematical model, fluid motion equation.

REFERENCES

- [1] Shaimuratov RV Hydrodynamics of a fractured oil reservoir. M.: Nedra, 1980.
- [2] Aleroev T. S., Aleroeva H. T., Yifa Tang, Siyan Zhang Features of seepage of a liquid to a chink in the cracked deformable layer // International journal of modeling, simulation, and scientific computing. 2010. Vol. 01.No 3.P. 333-347.
- [3] Khvorova AN, Erokhin SV Mathematical model of fluid seepage in a fractured layer // Scientific and technical bulletin of the Volga region. No. 1. 2020. P. 138-141.
- [4] Orlov V. N., Ivanova T. V. Construction of predictive mathematical models for the analysis of agricultural production // Economics, Management. 2016. No. 10. P. 67-76.
- [5] Orlov V. N., Ivanova T. V. Mathematical modeling in the study of the reproduction of personnel of mass professions in plant growing and animal husbandry of the Chuvash Republic // Economy of agricultural and processing enterprises. 2016.No. 12.P. 73-77.
- [6] Orlov V., Ivanova T., Brenchagova S. Rumbayeva N. Mathematical modeling of economic factors impact: reproduction of personnel potential in agriculture sector of Russia // IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. 2020. Vol. 433. P. 012012.
- [7] Orlov V. N., Ivanova T. V., Sokolova G. N. Methods for assessing human resources in agriculture Economy of agriculture in Russia. 2017.No. 7.P. 47-53.

Aleroev Temirkhan Sultanovich, Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

Hvorova Alla Nikolaevna, Engineer, Research Institute of Building Constructions (TSNIISK) Named After V. A. Koucherenko, Moscow, Russia

-
- [8] Ivanova T., Arkhipova V., Ivanitskaya I. Assessment of the influence of social factors on reproduction of personnel potential in agriculture of Russia // E3S Web Conf. 2019. Vol. 110
 - [9] Orlov VN, Kulmakova NI Forecasting in the technology of reproduction of pigs Innovations in the agro-industrial complex: problems and prospects // Belgorod State Agricultural Academy. 2016. No. 4 (12). S. 130-137.
 - [10] Orlov V., Kulmakova N., Ivanitskiy A., Sevastyanova N., Mongush S. Pork production technology optimization based on mathematical modeling // E3S Web Conf. 2019. Vol. 91. P. 06009
 - [11] Orlov V., Detina E., Kovalchuk O. Mathematical modeling of emergency situations at objects of production and gas transportation // MATEC Web of Conferences. 2018. Vol. 251
 - [12] Orlov V., Detina E. Probabilistic approach to the investigation of the causes of emergencies at the gas pipeline facilities // MATEC Web of Conferences. 2018. Vol. 251
 - [13] Orlov V., Detina E., Kovalchuk O. Mathematical modeling in tasks of predicting the operational reliability of gas networks facilities // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2021. Vol. 1030. P. 012083