

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

## ПРЯМЫЕ, ИНВЕРСНЫЕ И ЗЕРКАЛЬНЫЕ ВОЛНОВЫЕ МОДЫ СВЯЗАННЫХ ВОЛН ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И МИКРОВОРАЩЕНИЙ В ГЕМИТРОПНЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕДАХ

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** В статье обсуждаются вопросы распространения монохроматических волн в гемитропном микрополярном континууме. Сформулированы уравнения динамики гемитропного микрополярного упругого тела в терминах псевдотензоров с 9-ю определяющими псевдоскалярами. Рассмотрены преобразования указанных уравнений в случаях инверсии пространства и зеркального отражения относительно заданной плоскости. Показано наличие инверсных волновых мод (наряду с прямыми) в распространяющейся плоской волне. Получены формулы преобразования прямых волновых мод перемещений и микровращений в инверсные и зеркально отраженные моды. Приводятся соответствующие формулы.

**Ключевые слова:** псевдотензор, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, определяющий псевдоскаляр, микрополярный гемитропный континуум, волна, волновая мода, прямая мода, инверсная мода, зеркальная мода

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.014

УДК: 539.374

**Вводные замечания и предварительные сведения.** Волновые задачи механики микрополярных континуумов возникают при моделировании различных процессов: медицинской диагностики, таких как, ультразвуковое исследование, сонография, спектральная доплерография; неразрушающего контроля, передаче энергии и импульса в волноводах. Теоретической основой для этих методов могут служить задачи

---

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. 2021

*Мурашкин Евгений Валерьевич*

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

*Радаев Юрий Николаевич*

e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.01.2021

о распространении гармонических волн в сплошных средах [1–3]. Исследованиям решений волновых задач термомеханики микрополярных континуумов посвящена обширная литература [4–7]. В настоящей работе рассматривается задача о различных поляризациях монохроматической плоской волны перемещений и микровращений в гемитропном микрополярном континууме.

Исследование осуществляется на основе аппарата псевдотензорного исчисления. Ранее, в работах авторов [8–10] обсуждались вопросы применения алгебры и анализа псевдотензоров к задачам механики растущих тел и микрополярной теории упругости. В терминах псевдотензоров сформулированы уравнения динамики гемитропного микрополярного упругого тела с 9 определяющими псевдоскалярами. Рассмотрены преобразования уравнений динамики в случаях инверсии пространства и зеркального отражения относительно заданной плоскости. Показано наличие инверсных волновых мод (наряду с прямыми) при распространении плоских монохроматических волн. Получены формулы преобразования решений прямых волновых мод перемещений и микровращений, в инверсные и зеркальные моды. По прямым волновым модам построены инверсные и зеркальные моды.

**1. Определяющие уравнения гемитропного микрополярного тела. Псевдотензорная формулировка.** Динамические уравнения гемитропного микрополярного тела в подавляющем большинстве источников выводятся в терминах абсолютных тензоров [4–6]. Однако, как показали недавние исследования [8–10], геометрически и физически корректная формулировка уравнений *гемитропной* микрополярной теории возможна только в терминах псевдотензоров. Здесь мы не будем подробно воспроизводить определение и свойства псевдотензоров. Изложение алгебры псевдотензоров с необходимой степенью полноты можно найти в руководствах по тензорному анализу [11–16], а ее применение к механике континуума в работах [8–10]. Исключительное значение при этом имеет понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра  $e$  [8–10], который в  $N$ -мерном пространстве можно определить как косое произведение [17, с. 63–65] абсолютных векторов ковариантного базиса

$$[\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N] = e. \quad (1)$$

Не сложно показать, что в метрическом пространстве справедливо соотношение

$$e^2 = g, \quad (2)$$

где  $g$  — детерминант метрического тензора.

В пространстве трех измерений справедливо

$$e_{ijk} = [\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j, \mathbf{z}_k] = (\mathbf{z}_i \times \mathbf{z}_j) \cdot \mathbf{z}_k, \quad (3)$$

тогда

$$e = {}^{[+1]}e_{123} = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3] = (\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) \cdot \mathbf{z}_3. \quad (4)$$

Отметим лишь, что псевдотензоры легко преобразовывать в абсолютные тензоры при помощи фундаментального ориентирующего псевдоскаляра  $e$  (см. [8–10]). Для произвольного псевдотензора веса  $W$  имеем

$$T_{ij\dots l}^{pqr\dots s} = e^{-W} T_{ij\dots l}^{[W]pqr\dots s}. \quad (5)$$

Следствием принципа виртуальных перемещений [7, 10] являются уравнения динамики микрополярной среды, которые примем в форме

$$\nabla_i t^{ik} = \rho \partial_{..}^2 u^k, \quad (6)$$

$$\nabla_i \overset{[-1]}{\mu}_{.k} - 2 \overset{[-1]}{\tau}_k = \rho \mathfrak{S} \partial_{..}^2 \overset{[-2]}{\phi}_k, \quad (7)$$

где  $\overset{[-1]}{\tau}_j$  — ассоциированный (сопутствующий) псевдовектор силовых напряжений

$$- \overset{[-1]}{\tau}_j = \frac{1}{2} \epsilon_{jik} t^{[ik]}, \quad t^{[ik]} = -\epsilon^{ikj} \overset{[-1]}{\tau}_j. \quad (8)$$

Ассоциированный (сопутствующий) вектор моментных напряжений определяется по аналогии с (8)

$$\mu^i = \frac{1}{2} \epsilon^{iks} \overset{[-1]}{\mu}_{[ks]}, \quad \overset{[-1]}{\mu}_{[is]} = e_{isj} \mu^j. \quad (9)$$

Введем микрополярный упругий потенциал  $\mathcal{U}$ , рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема, с псевдотензорными аргументами

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{(ij)}, \overset{[+1]}{\kappa}^{(ij)}, \overset{[+1]}{\varphi}_i, \kappa_i), \quad (10)$$

где

$$\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - \epsilon_{ijk} \overset{[+1]}{\varphi}_k, \quad \overset{[+1]}{\varphi}_i = \overset{[+1]}{\phi}_i - \frac{1}{2} \epsilon^{ikl} \nabla_k u_l, \quad \kappa_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijs} \overset{[+1]}{\kappa}^{[js]}. \quad (11)$$

Обычно, аргументами упругого потенциала выступают абсолютные тензоры. Здесь существенным является использование формализма псевдотензоров, обеспечивающего чувствительность определяющих псевдоскаляров к преобразованиям инверсии пространства и зеркальным отражениям.

Упругий потенциал  $\mathcal{U}$  по физическому смыслу является объективной величиной и не может меняться при повороте осей системы координат. Поэтому он (так же как и его первая вариация  $\delta\mathcal{U}$ ) является абсолютным скаляром. Первая вариация упругого потенциала представляется сбалансированной по весам суммой

$$\delta\mathcal{U} = t^{(ij)} \delta\epsilon_{ij} + \overset{[-1]}{\mu}_{(ij)} \delta \overset{[+1]}{\kappa}^{(ij)} + 2 \overset{[-1]}{\tau}_i \delta \overset{[+1]}{\varphi}_i + 2\mu^i \delta\kappa_i, \quad (12)$$

откуда могут быть получены определяющие уравнения:

$$t^{(ij)} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\epsilon_{ij}}, \quad \overset{[-1]}{\mu}_{(ij)} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial \overset{[+1]}{\kappa}^{(ij)}}, \quad 2 \overset{[-1]}{\tau}_i = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial \overset{[+1]}{\varphi}_i}, \quad 2\mu^i = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\kappa_i}. \quad (13)$$

В качестве потенциала  $\mathcal{U}$ , который как указывалось выше инвариантен относительно поворотов и переносов пространства, а также относительно преобразований

инверсии пространства и зеркальных отражений, в гемитропном случае следует выбрать квадратичную функцию

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} = & G[\nu(1 - 2\nu)^{-1}g^{is}g^{lm}\epsilon_{(is)}\epsilon_{(lm)} + \\
& + \frac{[-1][-1]}{L L} c_3 g_{is} g_{lm} \frac{[+1](is)[+1](lm)}{\kappa} + g^{is}g^{lm}\epsilon_{(il)}\epsilon_{(sm)} + \\
& + \frac{[-1][-1]}{L L} g_{is} g_{lm} \frac{[+1](il)[+1](sm)}{\kappa} + 2 \frac{[-2]}{c_1 g_{is}} \frac{[+1]_i [+1]_s}{\varphi} + \\
& + \frac{[-1][-1][+2]}{L L} c_2 g^{is} \kappa_i \kappa_s + \frac{[-1]}{L} c_4 g^{is} g_{lm} \epsilon_{(is)} \frac{[+1](lm)}{\kappa} + \\
& + \frac{[-1]}{L} c_5 \epsilon_{(is)} \frac{[+1](is)}{\kappa} + \frac{[-1]}{L} c_6 \kappa_i \frac{[+1]_i}{\varphi}, \quad (14)
\end{aligned}$$

где  $G$  — модуль сдвига (имеет размерность силовых напряжений);  $\nu$  — коэффициент Пуассона (не имеет физической размерности);  $L$  — характеристическая микродлина;  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  — не имеющие физической размерности псевдоскаляры.

В результате приходим к определяющим уравнениям гемитропной микрополярной среды:

$$\begin{aligned}
t^{(is)} = & 2G \left( \nu(1 - 2\nu)^{-1}g^{is}g^{lm} + g^{il}g^{sm} \right) \epsilon_{(lm)} + \\
& + G \frac{[-1]}{L} (c_4 g^{is} g_{lm} \frac{[+1](lm)}{\kappa} + c_5 \frac{[+1](is)}{\kappa}), \\
\mu^{(is)} = & 2G \frac{[-1][-1]}{L L} (c_3 g_{is} g_{lm} + g_{il} g_{sm}) \frac{[+1](lm)}{\kappa} + \\
& + G \frac{[-1]}{L} (c_4 g_{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + c_5 \epsilon_{(is)}), \quad (15) \\
\tau_i = & 2G \frac{[-2]}{c_1 g_{is}} \frac{[+1]_s}{\varphi} + \frac{1}{2} G \frac{[-1]}{L} c_6 \kappa_i, \\
\mu^i = & G \frac{[-1][-1][+2]}{L L} c_2 g^{is} \kappa_s + \frac{1}{2} G \frac{[-1]}{L} c_6 \frac{[+1]_i}{\varphi}.
\end{aligned}$$

Уравнения динамики гемитропного микрополярного упругого континуума в криволинейных координатах, вводя обозначения для дифференциальных операторов  $\mathcal{L}^i$  и  $\mathcal{M}_i$  и принимая обозначения для определяющих постоянных

$$c'_4 = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c'_5 = \frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c'_6 = -c_6 \quad (16)$$

записываются в форме

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^i(\partial., \nabla_k, u^k, \phi^{[+1]k}) &= G[(1 + e^{2[-2]c_1})\nabla^s \nabla_s u^i + \\
 &+ (1 - e^{2[-2]c_1} + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\nabla^i \nabla_k u^k + 2^{[-2]c_1} \epsilon^{ikl} \nabla_k \phi^{[+1]l} + \\
 &+ L^{[-1]} c'_4 \nabla^i \nabla_k \phi^{[+1]k} + L^{[-1]} c'_5 \nabla^k \nabla_k \phi^{[+1]i}] - \rho \partial_{..}^2 u^i = 0, \\
 \mathcal{M}_i^{[-1]}(\partial., \nabla_k, u^k, \phi^{[+1]k}) &= G L^{[-1]} L^{[-1]} [(1 + e^{-2[+2]c_2})\nabla^s \nabla_s \phi^{[+1]i} + \\
 &+ (1 - e^{-2[+2]c_2} + 2c_3)\nabla_i \nabla_k \phi^{[+1]k} + L^{[-1]} c'_4 \nabla_i \nabla^k u_k + \\
 &+ L^{[-1]} c'_5 \nabla^k \nabla_k u_i + L^{[-1]} c'_6 \epsilon_{isl} \nabla^s \phi^{[+1]l}] - \\
 &- 2G^{[-2]} c_1 (2 \phi^{[+1]i} - e^2 \epsilon_{ikl} g^{ks} \nabla_s u^l) - \rho \mathfrak{I} \partial_{..}^2 \phi^i = 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

На основании данных выше определений дифференциальный оператор  $\mathcal{L}^i$  имеет нулевой вес, а оператор  $\mathcal{M}_i^{[-1]}$  имеет вес  $-1$ . Для правоориентированной декартовой системы координат уравнения (17) запишутся в виде (см. также таблицу 3)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) &= G[(1 + c_1)\partial_s \partial_s u_i + (1 - c_1 + \\
 &+ 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\partial_i \partial_k u_k + 2c_1 \epsilon_{ikl} \partial_k \mathcal{U}_l + L c'_4 \partial_i \partial_k \mathcal{U}_k + \\
 &+ L c'_5 \partial_k \partial_k \mathcal{U}_i] - \rho \partial_{..}^2 u_i = 0, \tag{18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_i^{[-1]}(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) &= G L^2 [(1 + c_2)\partial_s \partial_s \mathcal{U}_i + (1 - c_2 + \\
 &+ 2c_3)\partial_i \partial_k \mathcal{U}_k + L^{-1} c'_4 \partial_i \partial_k u_k + L^{-1} c'_5 \partial_k \partial_k u_i + \\
 &+ L^{-1} c'_6 \epsilon_{isl} \partial_s \mathcal{U}_l] - 2G c_1 (2\mathcal{U}_i - \epsilon_{ikl} \partial_k u_l) - \rho \mathfrak{I} \partial_{..}^2 \mathcal{U}_i = 0. \tag{19}
 \end{aligned}$$

$\mathcal{U}^k$  — специальный символ, вес которого мы не будем указывать, точно так же как это имеет место для  $\epsilon$ -символов.

**2. Инверсные волновые моды.** Рассмотрим преобразование инверсии пространства  $(x_k \rightarrow x_k)$ , т.е.

$$x_k = -x_k. \tag{20}$$

Здесь и далее, величины в новой системе координат обозначим звездочкой снизу. В таблице 1 укажем объекты в правоориентированной декартовой системе координат, инверсной к ней системе координат и формулы связи. Снова на основании уравнения (17) и заменяя материальные постоянные на основании таблицы 1 получаем

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) &= G[(1 + c_1)\partial_s \partial_s u_i + (1 - c_1 + \\
 &+ 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\partial_i \partial_k u_k + 2c_1 \epsilon_{ikl} \partial_k \mathcal{U}_l - L c'_4 \partial_i \partial_k \mathcal{U}_k - \\
 &- L c'_5 \partial_k \partial_k \mathcal{U}_i] - \rho \partial_{..}^2 u_i = 0, \tag{21}
 \end{aligned}$$

Таблица 1. Таблица соответствия для прямой и обратной декартовых координатных систем.

криволинейная система координат	правоориентированная декартова система координат	обратная система координат	формулы преобразования
$x^k$	$x^k$	$x^k_*$	$x^k_* = -x^k$
$e$	1	-1	$e_* = -e$
$g_{ij}$	$\delta_{ij}$	$\delta_{ij}$	
$\epsilon^{ijk}$	$\epsilon_{ijk}$	$\epsilon_{ijk}$	
$\epsilon_{ijk}$	$\epsilon_{ijk}$	$\epsilon_{ijk}$	
$u^i$	$u_i$	$u_i_*$	$u_i_* = -u_i$
$^{[+1]}_k \phi$	$\mathcal{U}_k$	$\mathcal{U}_k_*$	$\mathcal{U}_k_* = \mathcal{U}_k$
$\nabla_i$	$\partial_i$	$\partial_i_*$	$\partial_i_* = -\partial_i$
$\partial.$	$\partial.$	$\partial.$	
$\mathcal{L}^i(\partial., \nabla_k, u^k, \mathcal{U}^k)$	$\mathcal{L}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k)$	$\mathcal{L}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k)_*$	$\mathcal{L}_i_* = -\mathcal{L}_i$
$^{[-1]}_i \mathcal{M}$	$\mathcal{M}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k)$	$\mathcal{M}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k)_*$	$\mathcal{M}_i_* = \mathcal{M}_i$
$^{[-1]}_L$	$L$	$L_*$	$L_* = -L$
$^{[-2]}_c1$	$c_1$	$c_1$	
$^{[+2]}_c2$	$c_2$	$c_2$	
$^{[-2]}_J$	$J$	$J$	

$$\begin{aligned}
^{[-1]}_* \mathcal{M}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) &= GL^2[(1 + c_2) \partial_s \partial_s \mathcal{U}_i + (1 - c_2 + \\
&+ 2c_3) \partial_i \partial_k \mathcal{U}_k - L^{-1} c'_4 \partial_i \partial_k u_k - L^{-1} c'_5 \partial_k \partial_k u_i - \\
&- L^{-1} c'_6 \epsilon_{isl} \partial_s \mathcal{U}_l] - 2Gc_1 (2\mathcal{U}_i - \epsilon_{ikl} \partial_k u_l) - \rho J \partial_i^2 \mathcal{U}_i = 0. \quad (22)
\end{aligned}$$

Произведя в дифференциальных операторах замены в соответствии с третьим столбцом таблицы 3, находим

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) &= -\mathcal{L}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k), \\
^{[-1]}_* \mathcal{M}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) &= ^{[-1]}_* \mathcal{M}_i(\partial., \partial_k, u_k, \mathcal{U}_k). \quad (23)
\end{aligned}$$

Откуда следует, что если выполняются уравнения (18) и (19) для исходной правоориентированной декартовой системы координат, то выполняются (в силу выполнимости (23)) и уравнения (21) и (22)) в инверсной координатной системе.<sup>4</sup> Указанное обстоятельство влечет, наличие прямых и инверсных мод при распространении волн по гемитропному микрополяроному упругому континууму.

**3. Зеркальные волновые моды.** Рассмотрим преобразование зеркального отражения относительно плоскости  $x_1 O x_2$  ( $x_k \rightarrow x_k^*$ ), величины в новой системе координат обозначим звездочкой снизу. Тогда

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = x_2, \quad x_3 = -x_3. \quad (24)$$

В таблице 2 укажем объекты в правоориентированной декартовой системе координат, зеркально отраженной системе координат и формулы связи. Снова, на основании системы динамических уравнений (17) и заменяя материальные постоянные в соответствии с таблицей 2 получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) = G[(1 + c_1)\partial_s \partial_s u_i + (1 - c_1 + \\ + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\partial_i \partial_k u_k + 2c_1 \epsilon_{ikl} \partial_k \mathcal{U}_l - Lc'_4 \partial_i \partial_k \mathcal{U}_k - \\ - Lc'_5 \partial_k \partial_k \mathcal{U}_i] - \rho \partial_s^2 u_i = 0, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i^{[-1]}(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) = GL^2[(1 + c_2)\partial_s \partial_s \mathcal{U}_i + (1 - c_2 + \\ + 2c_3)\partial_i \partial_k \mathcal{U}_k - L^{-1}c'_4 \partial_i \partial_k u_k - L^{-1}c'_5 \partial_k \partial_k u_i - \\ - L^{-1}c'_6 \epsilon_{isl} \partial_s \mathcal{U}_l] - 2Gc_1(2\mathcal{U}_i - \epsilon_{ikl} \partial_k u_l) - \rho \mathfrak{I} \partial_s^2 \mathcal{U}_i = 0. \quad (26) \end{aligned}$$

Произведем замены в уравнениях (18) согласно таблицы 2 выпишем уравнения

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) = G[(1 + c_1)\partial_s \partial_s u_1 + (1 - c_1 + \\ + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\partial_1 \partial_k u_k + 2c_1 \epsilon_{1kl} \partial_k \mathcal{U}_l - Lc'_4 \partial_1 \partial_k \mathcal{U}_k - \\ - Lc'_5 \partial_k \partial_k \mathcal{U}_1] - \rho \partial_s^2 u_1 = \mathcal{L}_1(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k), \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) = G[(1 + c_1)\partial_s \partial_s u_2 + (1 - c_1 + \\ + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\partial_2 \partial_k u_k + 2c_1 \epsilon_{2kl} \partial_k \mathcal{U}_l - Lc'_4 \partial_2 \partial_k \mathcal{U}_k - \\ - Lc'_5 \partial_k \partial_k \mathcal{U}_2] - \rho \partial_s^2 u_2 = \mathcal{L}_2(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k), \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) = -G[(1 + c_1)\partial_s \partial_s u_3 - (1 - c_1 + \\ + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\partial_3 \partial_k u_k - 2c_1 \epsilon_{3kl} \partial_k \mathcal{U}_l + Lc'_4 \partial_3 \partial_k \mathcal{U}_k + \\ + Lc'_5 \partial_k \partial_k \mathcal{U}_3] + \rho \partial_s^2 u_3 = -\mathcal{L}_3(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k), \quad (29) \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Справедливо и обратное утверждение.

Таблица 2. Таблица соответствия для прямой и зеркально отраженной декартовых координатных систем.

криволинейная система координат	правоориентированная декартова система координат	зеркальная система координат	формулы преобразования
$x^k$	$x^k$	$x^k_*$	$x_1 = x_1$ $x_2 = x_2$ $x_3 = -x_3$
$e$	1	-1	$e = -e$
$\epsilon^{ijk}$	$\epsilon_{ijk}$	$\epsilon_{ijk}$	
$\epsilon_{ijk}$	$\epsilon_{ijk}$	$\epsilon_{ijk}$	
$\nabla_i$	$\partial_i$	$\partial_i^*$	$\partial_1 = \partial_1$ $\partial_2 = \partial_2$ $\partial_3 = -\partial_3$
$u^i$	$u_i$	$u_i^*$	$u_1 = u_1$ $u_2 = u_2$ $u_3 = -u_3$
$^{[+1]}_k \phi$	$\mathcal{U}_k$	$\mathcal{U}_k^*$	$\mathcal{U}_1 = -\mathcal{U}_1$ $\mathcal{U}_2 = -\mathcal{U}_2$ $\mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_3$
$\mathcal{L}^i(\nabla_k, u^k, \mathcal{U}^k)$	$\mathcal{L}_i(\partial_k, u^k, \mathcal{U}^k)$	$\mathcal{L}_i^*(\partial_k^*, u^k, \mathcal{U}^k)$	$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1$ $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2$ $\mathcal{L}_3 = -\mathcal{L}_3$
$\mathcal{M}_i(\nabla_k, u^k, \mathcal{U}^k)$	$\mathcal{M}_i(\partial_k, u^k, \mathcal{U}^k)$	$\mathcal{M}_i^*(\partial_k^*, u^k, \mathcal{U}^k)$	$\mathcal{M}_1 = -\mathcal{M}_1$ $\mathcal{M}_2 = -\mathcal{M}_2$ $\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_3$
$^{[-1]}_L$	$L$	$L^*$	$L = -L$
$^{[-2]}_{c_1}$	$c_1$	$c_1$	
$^{[+2]}_{c_2}$	$c_2$	$c_2$	
$^{[-2]}_{\mathfrak{J}}$	$\mathfrak{J}$	$\mathfrak{J}$	

Производя преобразование уравнений (19) согласно таблицы 2 получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1^*(\partial_k^*, u^k, \mathcal{U}_k^*) &= -GL^2[(1 + c_2)\partial_s\partial_s\mathcal{U}_1 - \\
&\quad - (1 - c_2 + 2c_3)\partial_1\partial_k\mathcal{U}_k - L^{-1}c'_4\partial_1\partial_k u_k - \\
&\quad - L^{-1}c'_5\partial_k\partial_k u_1 - L^{-1}c'_6\epsilon_{1sl}\partial_s\mathcal{U}_l] + 2Gc_1(2\mathcal{U}_1 + \\
&\quad + \epsilon_{1kl}\partial_k u_l) + \rho\mathfrak{J}\partial_s^2\mathcal{U}_1 = -\mathcal{M}_1^*(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k), \quad (30)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_2(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) = & -GL^2[(1+c_2)\partial_s\partial_s\mathcal{U}_2 - \\
 & - (1-c_2+2c_3)\partial_2\partial_k\mathcal{U}_k - L^{-1}c'_4\partial_2\partial_k u_k - \\
 & - L^{-1}c'_5\partial_k\partial_k u_2 - L^{-1}c'_6\epsilon_{2sl}\partial_s\mathcal{U}_l] + 2Gc_1(2\mathcal{U}_2 + \\
 & + \epsilon_{2kl}\partial_k u_l) + \rho\mathfrak{I}\partial_s^2\mathcal{U}_2 = -\mathcal{M}_2^{[-1]}(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k), \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_3(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k) = & GL^2[(1+c_2)\partial_s\partial_s\mathcal{U}_3 + \\
 & + (1-c_2+2c_3)\partial_3\partial_k\mathcal{U}_k + L^{-1}c'_4\partial_3\partial_k u_k + \\
 & + L^{-1}c'_5\partial_k\partial_k u_3 + L^{-1}c'_6\epsilon_{3sl}\partial_s\mathcal{U}_l] - 2Gc_1(2\mathcal{U}_3 - \\
 & - \epsilon_{3kl}\partial_k u_l) - \rho\mathfrak{I}\partial_s^2\mathcal{U}_3 = \mathcal{M}_3^{[-1]}(\partial_k, u_k, \mathcal{U}_k), \quad (32)
 \end{aligned}$$

Из условия существования решения системы связанных уравнений (18) и (19) для исходной правоориентированной декартовой системы координат, следует существование решения (в силу справедливости соотношений (27)–(32)) системы связанных уравнений (17) в зеркально отраженной координатной системе. Вышесказанное указывает на наличие прямых и зеркальных мод при распространении волн по гемитропному микрополярному упругому континууму.

**4. Плоская гармоническая связанная волна перемещений и микровращений.** Рассмотрим гемитропный микрополярный упругий континуум, погруженный в трехмерное “плоское” пространство. Пусть по континууму распространяется плоская гармоническая связанная волна перемещений и микровращений:

$$u_n = A_n e^{i\Phi}, \quad \mathcal{U}_n = S_n^{[+1]} e^{i\Phi}, \quad \Phi = (k_m x_m - \omega t) \quad (n, m = 1, 2, 3) \quad (33)$$

где  $x_m$  — абсолютный радиус-вектор;  $k_m$  — волновой (комплекснозначный) вектор;  $\omega$  — циклическая частота (абсолютный скаляр);  $A_n$  и  $S_n^{[+1]}$  — вектор и псевдовектор пространственной поляризации волны,  $\Phi$  — фазовый показатель гармонической экспоненты. В самом деле, нетрудно видеть, что  $\omega$  и  $t$  не зависят от выбора системы координат, тогда  $\omega t$  есть абсолютный скаляр, но тогда и скалярное произведение  $k_m x_m$  есть абсолютный скаляр, и в силу того, что радиус-вектор  $x_m$  является абсолютным вектором, заключаем что волновой вектор  $k_m$  также является абсолютным вектором, а фазовый показатель гармонической экспоненты  $\Phi$  является абсолютным инвариантом.

*4.1. Распространение инверсных мод.* Пусть существует решение связанной системы дифференциальных уравнений (17) в форме плоской гармонической связанной волны (33), тогда решение для инверсной моды в соответствии с (21), (22) и таблицей 1 запишется в форме

$$u_n = -A_n e^{i\Phi}, \quad \mathcal{U}_n = S_n^{[+1]} e^{i\Phi}, \quad k_n = -k_n. \quad (34)$$

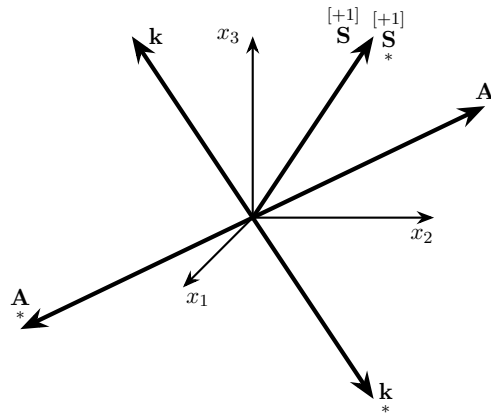


Рис. 1. Векторы поляризации прямых и инверсных волновых мод.

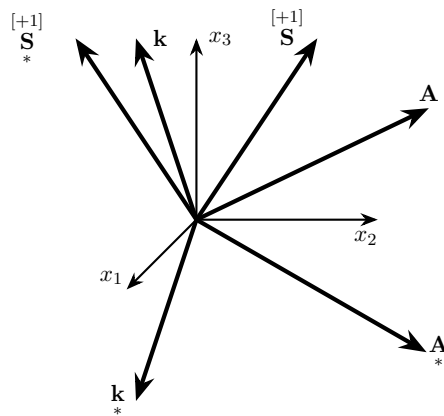


Рис. 2. Векторы поляризации прямой и зеркальной мод.

Схематически представим векторы поляризации монохроматической волны на рисунке 1 перенеся векторы поляризации инверсных мод в исходное пространство. Волновой вектор и вектор поляризации волны перемещений при инверсии пространства изменят свое направление, а псевдовектор поляризации волны микровращений при этом не поменяется.

4.2. *Распространение зеркальных мод.* Решение для случая преобразования зеркального отражения относительно плоскости  $x_1Ox_2$  (24), также можно получить преобразовав решения для прямой волновой моды (33) в соответствии с таблицей 2. В итоге

для зеркальной волновой моды получим

$$\begin{aligned} u_{*1} &= A_1 e^{i\Phi}, & \mathcal{U}_{*1} &= -S_1^{[+]} e^{i\Phi}, & k_{*1} &= k_1, \\ u_{*2} &= A_2 e^{i\Phi}, & \mathcal{U}_{*2} &= -S_2^{[+]} e^{i\Phi}, & k_{*2} &= k_2, \\ u_{*3} &= -A_3 e^{i\Phi}, & \mathcal{U}_{*3} &= S_3^{[+]} e^{i\Phi}, & k_{*3} &= -k_3. \end{aligned} \quad (35)$$

На рисунке 2 мы видим, как изменятся направления волнового вектора, вектора поляризации перемещений и псевдовектора поляризации микровращений при зеркальном отражении если их перенести в исходное пространство. Неизменным остается только фазовый показатель гармонической экспоненты.

**Заключение.** В статье обсуждаются вопросы распространения гармонических возмущений в гемитропном микрополярном континууме.

- (1) Сформулированы уравнения динамики гемитропного микрополярного упругого тела в терминах псевдотензоров с 9 определяющими псевдоскалярами.
- (2) Рассмотрены преобразования уравнений динамики в случаях инверсии пространства и зеркального отражения относительно заданной плоскости.
- (3) Показано наличие инверсных волновых мод (наряду с прямыми) при распространении плоских монохроматических волн.
- (4) Получены формулы преобразования решений прямых волновых мод перемещений и микровращений, в инверсные и зеркальные моды.
- (5) По прямым волновым модам построены инверсные и зеркальные моды.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Уизем Дж. Б. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
- [2] Бреховских Л. М. Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 336 с.
- [3] Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 184 с.
- [4] Besdo D. Ein beitrag zur nichtlinearen theorie des Cosserat-kontinuums // Acta Mechanica. 1974. Т. 20. №. 1. С. 105-131.
- [5] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin : Springer, 1972. 285 p.
- [6] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 pp.
- [7] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. С. 504–517. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635>.
- [8] Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, No 4. С. 399–412.
- [9] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020. Т. 24, No 3. С. 424–444.
- [10] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Arseudotensor formulation // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020. Т. 24, No 4. С. 752–761.
- [11] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. 226–902 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6\_2.
- [12] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Eng. Trans. G. B. Gurevich, Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 pp.]

- [13] Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ: с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматлит, 1963. 411 с.
- [14] Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. – 456 с. [Eng. Trans. Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.]
- [15] Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с. [Eng. Trans. Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 pp.]
- [16] Synge J. L. and Schild A. Tensor calculus. New York, Dover Publications Inc., 1978. xi+324 pp.
- [17] Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М.: Наука. 1966. 648 с.

*E. V. Murashkin, Yu. N. Radaev*

**DIRECT, INVERSE AND MIRROR WAVE MODES OF COUPLED  
DISPLACEMENTS AND MICROROTATIONS MONOCHROMATIC PLANE  
WAVES IN HEMITROPIC MICROPOLAR MEDIA**

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** The paper deals with the propagation of monochromatic plane waves in a hemitropic micropolar continuum. The dynamics equations of a hemitropic micropolar elastic solid in terms of pseudotensors with 9 constitutive pseudoscalars are derived and discussed. Formulae for the cases of space inversion and mirror reflection relative to a given plane are obtained and considered. The simultaneous existence of the direct, inverse and mirror reflected wave modes in propagating plane waves is established. Formulae for direct wave modes of displacements and microrotations in inverse and mirror modes are given.

**Keywords:** pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, constitutive pseudoscalar, micropolar hemitropic continuum, wave, wave mode, inverse mode, mirror mode

**REFERENCES**

- [1] Whitham J. B. Linear and nonlinear waves. Moscow: Mir, 1977. 622 p.
- [2] Brekhovskikh L. M., Goncharov V. V. Introduction to the mechanics of continuous media (in application to the theory of waves). Moscow: Nauka, 1982. 336 p.
- [3] Besson D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums // Acta Mechanica. 1974. V. 20. No 1. P. 105-131.
- [4] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972. 285 p.
- [5] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 pp.
- [6] Radaev, Yu.N., The rule of factors in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics, Vestn. Mysel. state tech. un-that. Ser. Phys.-mat. science. 2018. Vol. 22, pp. 504–517. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635>.
- [7] Radaev Yu.N., Murashkin E.V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of Strength and Plasticity. 2020. Vol. 82, No. 4, pp. 399–412.
- [8] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Bulletin of the Samara State Technical University. Series Physics and Mathematics. 2020, V. 24, No 3. P. 424–444.

---

*Evgenii V. Murashkin*, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.  
*Yuri N. Radaev*, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

- 
- [9] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation // Bulletin of the Samara State Technical University, Physics and Mathematics Series. 2020. Vol. 24, No. 4, pp. 752–761.
- [10] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: Encyclopedia of Physics. Vol. III / 1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. 226-902 pp. DOI: 10.1007 / 978-3-642-45943-6 \_2.
- [11] Gurevich GB Foundations of the theory of algebraic invariants. M., L .: OGIZ, GITTL, 1948. 408 p. [Eng. Trans. G. B. Gurevich, Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 pp.]
- [12] McConnell A.J. Introduction to tensor analysis: with applications to geometry, mechanics and physics. Moscow: Fizmatlit, 1963. 411 p.
- [13] Schouten Ya. A. Tensor analysis for physicists. M .: Science. 1965 .– 456 s. [Eng. Trans. Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.]
- [14] Sokolnikov I. S. Tensor analysis. Theory and applications in geometry and in continuum mechanics. Moscow: Nauka, 1971. 376 p. [Eng. Trans. Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley Sons Inc, 1964. 361 pp.]
- [15] Synge J. L. and Schild A. Tensor calculus. New York, Dover Publications Inc., 1978. xi + 324 pp.
- [16] Rosenfeld B.A. Multidimensional spaces. M .: Nauka. 1966. 648 p.