

Ш. Т. Нгуен, Д. В. Христич

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ КВАДРАТИЧНОЙ МОДЕЛИ УПРУГОГО АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

**Аннотация.** Рассмотрена модель упругости второго порядка для ортотропного материала. Проведенный анализ показывает, что квадратичная часть предложенной модели содержит тринадцать упругих постоянных, из которых девять являются линейно независимыми. Параметры модели определены по данным экспериментов с композитными пластинами. Модель позволяет описывать наблюдаемые в экспериментах нелинейные зависимости между напряжениями и деформациями в процессах растяжения, сжатия и сдвига, а также разносопротивляемость анизотропных материалов.

**Ключевые слова:** нелинейные определяющие соотношения, анизотропные материалы, идентификация, композиты.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.001

УДК: 539.3

**Введение.** Многие материалы, такие как полимеры и полимерные композиционные материалы, имеют ярко выраженное нелинейное поведение. Физическая нелинейность материалов может быть обусловлена их неоднородностью и наличием исходных дефектов, вызванных несовершенством технологий изготовления, и требует описания взаимосвязей между напряжениями и деформациями на основе экспериментальных данных на макроскопическом уровне, то есть без учёта особенностей строения. Обработка таких экспериментальных данных является одним из важнейших этапов построения математических моделей деформирования современных анизотропных материалов.

В статье [1] предложена модель ламинированного композита в форме пластины, изготовленной из нелинейно упругого анизотропного материала. Для описания механического поведения материала используются определяющие соотношения, построенные в [2] и записанные в виде зависимостей деформаций от напряжений. Целью

---

© Нгуен Ш. Т., Христич Д. В., 2021

Нгуен Ши Тоан

e-mail: sytoantula@gmail.com,

аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Христич Дмитрий Викторович

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru,

доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 01.10.2021

настоящей работы является определение материальных параметров, входящих в модель, на основании экспериментальных данных, известных из литературы [3, 4].

**Построение квадратичной модели материала.** Для описания деформированного состояния используем тензор деформаций Коши–Грина  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Напряжённое состояние описывается тензором истинных напряжений  $\mathbf{S}$ . Рассматриваемые ортотропные материалы имеют три линейных инварианта тензора деформаций [5]

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \quad (1)$$

и три квадратичных инварианта

$$s_{(1)}^2 = \varepsilon_{12}^2, \quad s_{(2)}^2 = \varepsilon_{23}^2, \quad s_{(3)}^2 = \varepsilon_{31}^2. \quad (2)$$

Инварианты тензора напряжений определяются аналогично:

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(S_{11} + S_{22} + S_{33}), \quad \sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2S_{33} - S_{11} - S_{22}), \quad \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{11} - S_{22}) \quad (3)$$

и три квадратичных инварианта

$$t_{(1)}^2 = S_{12}^2, \quad t_{(2)}^2 = S_{23}^2, \quad t_{(3)}^2 = S_{31}^2. \quad (4)$$

В работах [1, 6] был получен вариант определяющих соотношений для нелинейно упругого анизотропного материала на основе конкретизации потенциала Гиббса для обратимых процессов изотермического деформирования таких материалов. Эти соотношения для ортотропного материала могут быть представлены в форме связи между инвариантами напряжений и деформаций (1)–(4) в виде:

$$\begin{aligned} e_0 &= (c_0^{00} + 3c_1^{00}\sigma_0)\sigma_0 + (c_0^{01} + 2c_1^{01}\sigma_0 + c_1^{01}\sigma_1)\sigma_1 + (c_0^{02} + 2c_1^{02}\sigma_0 + c_1^{02}\sigma_2)\sigma_2, \\ e_1 &= (c_0^{01} + 2c_1^{01}\sigma_1 + c_1^{01}\sigma_0)\sigma_0 + (c_0^{11} + 3c_1^{11}\sigma_1)\sigma_1 + (c_0^{12} + 2c_1^{12}\sigma_1 + c_1^{12}\sigma_2)\sigma_2, \\ e_2 &= (c_0^{02} + 2c_1^{01}\sigma_2 + c_1^{02}\sigma_0)\sigma_0 + (c_0^{12} + 2c_1^{12}\sigma_2 + c_1^{12}\sigma_1)\sigma_1 + (c_0^{22} + 3c_1^{22}\sigma_2)\sigma_2, \\ s_{(1)} &= 2 \left( D_0^{(1)} + \frac{3}{2}D_1^{(1)}t_{(1)} \right) t_{(1)}, \quad s_{(2)} = 2 \left( D_0^{(2)} + \frac{3}{2}D_1^{(2)}t_{(2)} \right) t_{(2)}, \\ s_{(3)} &= 2 \left( D_0^{(3)} + \frac{3}{2}D_1^{(3)}t_{(3)} \right) t_{(3)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $c_0^{\alpha\beta}$ ,  $c_1^{\alpha\beta}$ ,  $D_0^{(\gamma)}$ ,  $D_1^{(\gamma)}$  — постоянные в выбранном базисе трёхмерного пространства упругие параметры материала. Определяющие соотношения (5) являются моделью упругости второго порядка для ортотропного материала и содержат 9 констант первого порядка и 9 констант второго порядка.

При малых деформациях эти соотношения представляют собой обобщённый закон Гука:

$$\begin{aligned} e_0 &= c_0^{00}\sigma_0 + c_0^{01}\sigma_1 + c_0^{02}\sigma_2, \quad e_1 = c_0^{01}\sigma_0 + c_0^{11}\sigma_1 + c_0^{12}\sigma_2, \quad e_2 = c_0^{02}\sigma_0 + c_0^{12}\sigma_1 + c_0^{22}\sigma_2, \\ s_{(1)} &= 2D_0^{(1)}t_{(1)}, \quad s_{(2)} = 2D_0^{(2)}t_{(2)}, \quad s_{(3)} = 2D_0^{(3)}t_{(3)}, \end{aligned}$$

то есть константы  $c_0^{\alpha\beta}$ ,  $D_0^{(\gamma)}$  образуют тензор упругих податливостей, обратный тензору упругости материала.

Для записи определяющих соотношений через компоненты тензоров деформаций и напряжений в трёхмерном пространстве выразим эти компоненты через линейные и квадратичные инварианты из соотношений (1), (3):

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sqrt{3}}{3}e_0 - \frac{\sqrt{6}}{6}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\sqrt{3}}{3}e_0 - \frac{\sqrt{6}}{6}e_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_2, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\sqrt{3}}{3}e_0 + \frac{\sqrt{6}}{3}e_1, \quad (6)$$

$$|\varepsilon_{12}| = s_{(1)}, \quad |\varepsilon_{23}| = s_{(2)}, \quad |\varepsilon_{31}| = s_{(3)}.$$

$$S_{11} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma_0 - \frac{\sqrt{6}}{6}\sigma_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_2, \quad S_{22} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma_0 - \frac{\sqrt{6}}{6}\sigma_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_2, \quad S_{33} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma_0 + \frac{\sqrt{6}}{3}\sigma_1,$$

$$|S_{12}| = t_{(1)}, \quad |S_{23}| = t_{(2)}, \quad |S_{31}| = t_{(3)}. \quad (7)$$

Из выражений (5) с учётом (6), (7) получим связь между компонентами тензоров деформаций и напряжений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= A_{1111}S_{11} + A_{1122}S_{22} + A_{1133}S_{33} + \\ &+ B_{1111}S_{11}^2 + B_{1122}S_{22}^2 + B_{1133}S_{33}^2 + B_{1112}S_{11}S_{22} + B_{1113}S_{11}S_{33} + B_{1123}S_{22}S_{33}, \\ \varepsilon_{22} &= A_{2211}S_{11} + A_{2222}S_{22} + A_{2233}S_{33} + \\ &+ B_{2211}S_{11}^2 + B_{2222}S_{22}^2 + B_{2233}S_{33}^2 + B_{2212}S_{11}S_{22} + B_{2213}S_{11}S_{33} + B_{2223}S_{22}S_{33}, \\ \varepsilon_{33} &= A_{3311}S_{11} + A_{3322}S_{22} + A_{3333}S_{33} + \\ &+ B_{3311}S_{11}^2 + B_{3322}S_{22}^2 + B_{3333}S_{33}^2 + B_{3312}S_{11}S_{22} + B_{3313}S_{11}S_{33} + B_{3323}S_{22}S_{33}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\varepsilon_{12} = 2 \left( D_0^{(1)} + \frac{3}{2}D_1^{(1)} |S_{12}| \right) S_{12}, \quad \varepsilon_{23} = 2 \left( D_0^{(2)} + \frac{3}{2}D_1^{(2)} |S_{23}| \right) S_{23},$$

$$\varepsilon_{31} = 2 \left( D_0^{(3)} + \frac{3}{2}D_1^{(3)} |S_{31}| \right) S_{31}.$$

По данным, полученным в механических экспериментах с макрообразцами, удобнее определять параметры  $A_{ijkl}$  и  $B_{ijkl}$ , входящие в соотношения (8). Однако для идентификации коэффициентов модели (5) требуется найти значения  $c_0^{\alpha\beta}$ ,  $c_1^{\alpha\beta}$ . Коэффициенты  $A_{ijkl}$  и  $B_{ijkl}$  линейно связаны с константами  $c_0^{\alpha\beta}$ ,  $c_1^{\alpha\beta}$  соответственно. Для отыскания этих связей удовлетворим условиям существования потенциала Гиббса в форме

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial S_{22}} = \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial S_{11}}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial S_{33}} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial S_{11}}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial S_{33}} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial S_{22}}. \quad (9)$$

Найдем частные производные компонент тензора деформаций по компонентам тензора напряжений:

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial S_{22}} = A_{1122} + 2B_{1122}S_{22} + B_{1112}S_{11} + B_{1123}S_{33},$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial S_{11}} = A_{2211} + 2B_{2211}S_{11} + B_{2212}S_{22} + B_{2213}S_{33},$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial S_{33}} = A_{1133} + 2B_{1133}S_{33} + B_{1113}S_{11} + B_{1123}S_{22},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial S_{11}} &= A_{3311} + 2B_{3311}S_{11} + B_{3312}S_{22} + B_{3313}S_{33}, \\ \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial S_{33}} &= A_{2233} + 2B_{2233}S_{33} + B_{2213}S_{11} + B_{2223}S_{22}, \\ \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial S_{22}} &= A_{3322} + 2B_{3322}S_{22} + B_{3312}S_{11} + B_{3323}S_{33},\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в условия (9), придём к соотношениям между параметрами модели:

$$\begin{aligned}A_{1122} &= A_{2211}, & A_{1133} &= A_{3311}, & A_{2233} &= A_{3322}, \\ B_{2212} &= 2B_{1122}, & B_{1112} &= 2B_{2211}, & B_{1123} &= B_{2213}, \\ B_{3313} &= 2B_{1133}, & B_{1113} &= 2B_{3311}, & B_{1123} &= B_{3312}, \\ B_{3323} &= 2B_{2233}, & B_{2223} &= 2B_{3322}, & B_{2213} &= B_{3312}.\end{aligned}\tag{10}$$

С учётом равенств (10) определяющие соотношения (8) принимают вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= A_{1111}S_{11} + A_{1122}S_{22} + A_{1133}S_{33} + \\ &+ B_{1111}S_{11}^2 + B_{1122}S_{22}^2 + B_{1133}S_{33}^2 + 2B_{2211}S_{11}S_{22} + 2B_{3311}S_{11}S_{33} + B_{1123}S_{22}S_{33}, \\ \varepsilon_{22} &= A_{1122}S_{11} + A_{2222}S_{22} + A_{2233}S_{33} + \\ &+ B_{2211}S_{11}^2 + B_{2222}S_{22}^2 + B_{2233}S_{33}^2 + 2B_{1122}S_{11}S_{22} + B_{1123}S_{11}S_{33} + 2B_{3322}S_{22}S_{33}, \\ \varepsilon_{33} &= A_{1133}S_{11} + A_{2233}S_{22} + A_{3333}S_{33} + \\ &+ B_{3311}S_{11}^2 + B_{3322}S_{22}^2 + B_{3333}S_{33}^2 + B_{1123}S_{11}S_{22} + 2B_{1133}S_{11}S_{33} + 2B_{2233}S_{22}S_{33},\end{aligned}\tag{11}$$

$$\varepsilon_{12} = 2 \left( D_0^{(1)} + \frac{3}{2} D_1^{(1)} |S_{12}| \right) S_{12}, \quad \varepsilon_{23} = 2 \left( D_0^{(2)} + \frac{3}{2} D_1^{(2)} |S_{23}| \right) S_{23},$$

$$\varepsilon_{31} = 2 \left( D_0^{(3)} + \frac{3}{2} D_1^{(3)} |S_{31}| \right) S_{31}.$$

Из выражений (10) и (5) с учётом выражений для инвариантов (6), (7) получим

$$\begin{aligned}A_{1111} &= \frac{c_0^{00}}{3} - \frac{\sqrt{2}c_0^{01}}{3} + \frac{\sqrt{6}c_0^{02}}{3} + \frac{c_0^{11}}{6} - \frac{\sqrt{3}c_0^{12}}{3} + \frac{c_0^{22}}{2}, & A_{1122} &= \frac{c_0^{00}}{3} - \frac{\sqrt{2}c_0^{01}}{3} + \frac{c_0^{11}}{6} - \frac{c_0^{22}}{2}, \\ A_{1133} &= \frac{c_0^{00}}{3} + \frac{\sqrt{2}c_0^{01}}{6} + \frac{\sqrt{6}c_0^{02}}{6} - \frac{c_0^{11}}{3} + \frac{\sqrt{3}c_0^{12}}{3}, \\ A_{2222} &= \frac{c_0^{00}}{3} - \frac{\sqrt{2}c_0^{01}}{3} - \frac{\sqrt{6}c_0^{02}}{3} + \frac{c_0^{11}}{6} + \frac{\sqrt{3}c_0^{12}}{3} + \frac{c_0^{22}}{2}, \\ A_{2233} &= \frac{c_0^{00}}{3} + \frac{\sqrt{2}c_0^{01}}{6} - \frac{\sqrt{6}c_0^{02}}{6} - \frac{c_0^{11}}{3} - \frac{\sqrt{3}c_0^{12}}{3}, & A_{3333} &= \frac{c_0^{00}}{3} + \frac{2\sqrt{2}c_0^{01}}{3} + \frac{2c_0^{11}}{3}, \\ B_{1111} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}c_1^{01} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}c_1^{02} - \frac{\sqrt{6}}{12}c_1^{11} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}c_1^{12} + \frac{3\sqrt{2}}{4}c_1^{22}, \\ B_{1122} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}c_1^{01} - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}c_1^{02} - \frac{\sqrt{6}}{12}c_1^{11} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{12}c_1^{12} + \frac{3\sqrt{2}}{4}c_1^{22}, \\ B_{1133} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} + \frac{\sqrt{6}}{6}c_1^{01} + \frac{\sqrt{2}}{6}c_1^{02} - \frac{\sqrt{6}}{3}c_1^{11} + \frac{\sqrt{2}}{3}c_1^{12},\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}
B_{1123} &= \frac{2\sqrt{3}}{3}c_1^{00} - \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{01} - \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{02} + \frac{\sqrt{6}}{3}c_1^{11} - \frac{\sqrt{6}}{3}c_1^{12}, \\
B_{2211} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}c_1^{01} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}c_1^{02} - \frac{\sqrt{6}}{12}c_1^{11} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{12}c_1^{12} - \frac{3\sqrt{2}}{4}c_1^{22}, \\
B_{2222} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}c_1^{01} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}c_1^{02} - \frac{\sqrt{6}}{12}c_1^{11} - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}c_1^{12} - \frac{3\sqrt{2}}{4}c_1^{22}, \\
B_{2233} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} + \frac{\sqrt{6}}{6}c_1^{01} - \frac{\sqrt{2}}{6}c_1^{02} - \frac{\sqrt{6}}{3}c_1^{11} - \frac{\sqrt{2}}{3}c_1^{12}, \\
B_{3311} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} - \frac{\sqrt{3}}{6}c_1^{01} + \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}c_1^{02} + \frac{\sqrt{6}}{6}c_1^{11} + \frac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{6}c_1^{12}, \\
B_{3322} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} - \frac{\sqrt{3}}{6}c_1^{01} + \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}c_1^{02} + \frac{\sqrt{6}}{6}c_1^{11} + \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}c_1^{12}, \\
B_{3333} &= \frac{\sqrt{3}}{3}c_1^{00} + \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{3}c_1^{01} + \frac{2\sqrt{6}}{3}c_1^{11}.
\end{aligned}$$

В квадратичной части определяющих соотношений 10 коэффициентов  $B_{ijk}$  линейно выражаются через 6 параметров  $c_1^{\alpha\beta}$ , поэтому линейно независимыми являются 6 констант  $B_{ijk}$ . В качестве независимых параметров выберем следующие:  $B_{1111}$ ,  $B_{1122}$ ,  $B_{1133}$ ,  $B_{2211}$ ,  $B_{2222}$ ,  $B_{3311}$ . Остальные 4 из 10 параметров  $B_{1123}$ ,  $B_{2233}$ ,  $B_{3322}$ ,  $B_{3333}$  линейно выражаются через них:

$$\begin{aligned}
B_{1123} &= \frac{255\sqrt{2} + 206\sqrt{3} - 145\sqrt{6} - 360}{2(26\sqrt{6} - 37\sqrt{3} - 45\sqrt{2} + 63)}B_{1111} + \\
&+ \frac{18965\sqrt{6} - 24302\sqrt{3} - 29791\sqrt{2} + 46540}{7256\sqrt{6} - 7918\sqrt{3} - 9694\sqrt{2} + 17746}B_{1122} + \\
&+ \frac{16\sqrt{6} - 29\sqrt{3} - 36\sqrt{2} + 39}{2(3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \sqrt{6} + 2)}B_{2211} + \frac{222\sqrt{2} + 183\sqrt{3} - 114\sqrt{6} - 279}{30\sqrt{2} + 20\sqrt{3} + 2\sqrt{6} + 6}B_{2222} + 2B_{3311}, \\
B_{2233} &= \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{6} + 2}{4}B_{1111} + \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6} - 2}{4}B_{1122} + B_{1133} + \\
&+ \frac{\sqrt{6} - 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 4}{4}B_{2211} + \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - 2}{4}B_{2222}, \\
B_{3322} &= \frac{6898\sqrt{3} - 8559\sqrt{2} - 4883\sqrt{6} + 12128}{1257\sqrt{2} - 954\sqrt{3} + 657\sqrt{6} - 1762}B_{1111} + \\
&+ \frac{26904\sqrt{3} - 47443\sqrt{2} - 18469\sqrt{6} + 68446}{232\sqrt{3} - 11069\sqrt{2} + 1267\sqrt{6} + 19172}B_{1122} + \\
&+ \frac{9\sqrt{6} - 8\sqrt{3} - 9\sqrt{2} + 22}{2(3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \sqrt{6} + 2)}B_{2211} + \frac{75\sqrt{2} + 58\sqrt{3} - 53\sqrt{6} - 132}{30\sqrt{2} + 20\sqrt{3} + 2\sqrt{6} + 6}B_{2222} + B_{3311}, \\
B_{3333} &= (3\sqrt{2} + 6)B_{3311} - \frac{126648\sqrt{2} + 101665\sqrt{3} + 71900\sqrt{6} + 179145}{17550\sqrt{2} + 15232\sqrt{3} + 10778\sqrt{6} + 24840}B_{1111} - \\
&- \frac{825\sqrt{2} + 450\sqrt{3} + 333\sqrt{6} + 1203}{556\sqrt{2} + 432\sqrt{3} + 298\sqrt{6} + 768}B_{1122} + (3\sqrt{2} + 3)B_{1133} -
\end{aligned} \tag{13}$$

$$-\frac{3(4\sqrt{6} - 207\sqrt{2} - 156\sqrt{3} - 12)}{4(15\sqrt{2} + 10\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3)}B_{2211} + \frac{345\sqrt{2} + 284\sqrt{3} - 148\sqrt{6} - 372}{4(15\sqrt{2} + 10\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3)}B_{2222}.$$

Если параметры  $A_{ijj}$ ,  $B_{ijk}$  определены из экспериментов, то упругие константы материала  $c_0^{\alpha\beta}$ ,  $c_1^{\alpha\beta}$  можно найти, обращая соотношения (12).

**Определение параметров модели.** Часть параметров модели можно определить по результатам экспериментов с пластинами. Рассмотрим ортотропную пластину, у которой одна ось анизотропии  $\mathbf{a}_3$  перпендикулярна плоскости, а две другие  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  направлены по сторонам пластины. Направим оси декартовой системы координат вдоль сторон пластины.

При плоском напряжённом состоянии ( $S_{13} = S_{23} = S_{33} = 0$ ) определяющие соотношения (11) записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= A_{1111}S_{11} + A_{1122}S_{22} + B_{1111}S_{11}^2 + B_{1122}S_{22}^2 + 2B_{2211}S_{11}S_{22}, \\ \varepsilon_{22} &= A_{1122}S_{11} + A_{2222}S_{22} + B_{2211}S_{11}^2 + B_{2222}S_{22}^2 + 2B_{1122}S_{11}S_{22}, \\ \varepsilon_{33} &= A_{1133}S_{11} + A_{2233}S_{22} + B_{3311}S_{11}^2 + B_{3322}S_{22}^2 + B_{1123}S_{11}S_{22},\end{aligned}\quad (14)$$

$$\varepsilon_{12} = 2 \left( D_0^{(1)} + \frac{3}{2}D_1^{(1)} |S_{12}| \right) S_{12}.$$

В работе [4] приведены эксперименты по одноосному растяжению, сжатию и сдвигу пластин, у которых главные направления анизотропии совпадают с осями координат. Данные экспериментов позволили, используя метод наименьших квадратов, определить параметры материала  $A_{1111}$ ,  $A_{1122}$ ,  $A_{2222}$ ,  $B_{1111}$ ,  $B_{1122}$ ,  $B_{2211}$ ,  $B_{2222}$ ,  $D_0^{(1)}$ ,  $D_1^{(1)}$ , входящие в соотношения (14):

$$A_{1111} = 6,48 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-1}, \quad A_{1122} = -6,93 \cdot 10^{-12} \text{Па}^{-1}, \quad A_{2222} = 6,48 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-1};$$

$$B_{1111} = 6,58 \cdot 10^{-14} \text{Па}^{-2}, \quad B_{1122} = 2,32 \cdot 10^{-14} \text{Па}^{-2}, \quad B_{2211} = 2,32 \cdot 10^{-14} \text{Па}^{-2}, \quad (15)$$

$$B_{2222} = 6,58 \cdot 10^{-14} \text{Па}^{-2}; \quad D_0^1 = 5,364 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-1}; \quad D_1^1 = 1,36 \cdot 10^{-12} \text{Па}^{-2}.$$

Свойства материала композита, армированного стекловолокном, обусловлены направленным расположением армирующих элементов. В этом случае волокна располагаются в параллельных плоскостях в двух перпендикулярных направлениях. Это объясняет полученные результаты  $A_{1111} = A_{2222}$ ,  $B_{1111} = B_{2222}$  и  $B_{1122} = B_{2211}$ .

На рисунках 1, 2 представлены аппроксимирующие диаграммы, построенные по определяющим соотношениям (14) со значениями параметров материала (15).

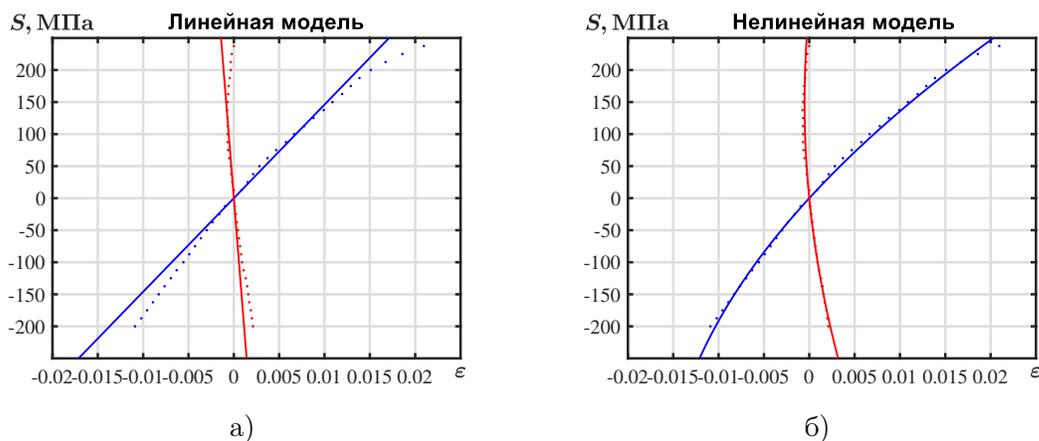


Рис. 1. Зависимости напряжений от деформаций: а) линейные определяющие соотношения; б) квадратичные определяющие соотношения

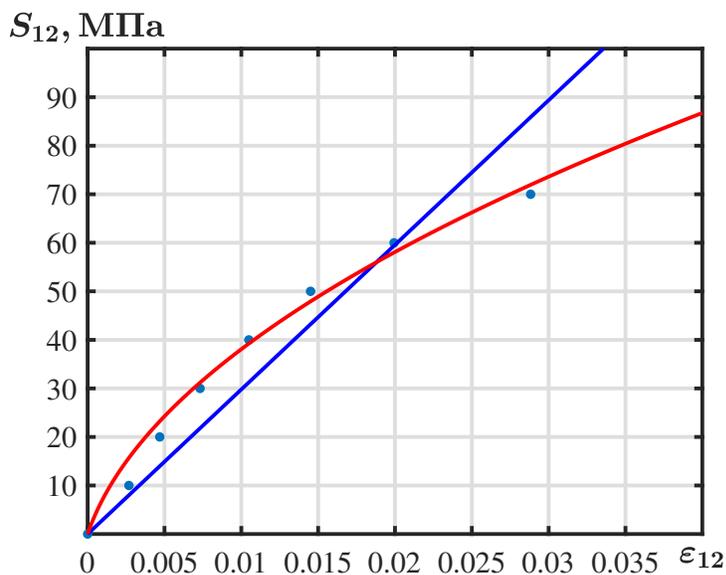


Рис. 2. Зависимость касательных напряжений от деформации сдвига в плоскости пластины

На рисунке 1 точками обозначены экспериментальные данные, сплошными линиями – результаты расчётов по предложенной модели; синим цветом обозначены продольные деформации вдоль оси  $\mathbf{a}_1$ , красным – поперечные. На рисунке 2 точками обозначены экспериментальные данные, синим цветом обозначены результаты расчётов по линейной модели, красным – по квадратичной модели.

Графики на рисунке 1 показывают, что определяющие соотношения в виде (11), учитывающие квадратичную зависимость деформаций от напряжений, позволяют описать результаты экспериментов с анизотропным материалом более адекватно, чем

линейные соотношения обобщённого закона Гука. Они позволяют описывать разносопротивляемость анизотропного материала растяжению и сжатию, наблюдаемую в эксперименте.

Экспериментальные данные, приведённые в [4], использованы также в статье [7] для идентификации и верификации модели, учитывающей нелинейную зависимость сдвиговых деформаций от касательных напряжений, но постулирующей линейную связь между деформациями и напряжениями при растяжении и сжатии вдоль главных осей анизотропии. Рассмотренная в настоящей работе модель (11) учитывает нелинейность в упругом поведении анизотропного материала не только при сдвиге, но и при одноосном нагружении, а её параметры идентифицируются по данным таких экспериментов.

**Заключение.** В статье приведен вариант определяющих соотношений для нелинейно упругого анизотропного материала в виде квадратичной связи между компонентами деформаций и напряжений, который удовлетворяет требованиям обобщения частного постулата А.А. Ильюшина на анизотропные материалы [8]. Установлены линейные соотношения между константами модели, следующие из условия существования потенциала Гиббса. Выявлена линейная зависимость между коэффициентами квадратичной части соотношений, которая является следствием увеличения числа коэффициентов при переходе от соотношений между инвариантами деформаций и напряжений к связям между компонентами тензора деформаций и тензора напряжений.

Проведена идентификация параметров модели по данным экспериментов [4]. Показано, что предложенная модель позволяет описывать наблюдаемую в экспериментах [4] нелинейность зависимости между напряжениями и деформациями не только в процессах сдвига, но и в процессах растяжения и сжатия вдоль главных осей анизотропии, а также разносопротивляемость анизотропных материалов.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соколова М.Ю., Христоч Д.В., Рудаков В.В. Нелинейная модель пластин из композиционных материалов // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. Т. 37, № 3. С. 100–106.
- [2] Христоч Д.В. Идентификация анизотропных материалов и моделирование процессов конечного деформирования гипопругих тел. Дисс. ... д.ф.-м.н. Тула. 2015.
- [3] О нелинейном деформировании углепластиков: эксперимент, модель, расчет / Е.В. Амелина, С.К. Голушко, В.С. Ерасов [и др.] // Вычислительные технологии. 2015. Т. 20, № 5. С. 27–52.
- [4] Smith E., Pascoe K. The role of shear deformation in the fatigue failure of a glass fiber-reinforced composite // Composites. 1977. no. 8. P. 237–243.
- [5] Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. Москва: Физматлит, 2013. 320 с.
- [6] Sokolova M., Rudakov V., Khristich D. Strains of plates of nonlinear anisotropic materials // IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1203. p. 012024 (11 pages).
- [7] Lomakin E., Fedulov B. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // Meccanica. 2015. Vol. 50, no. 6. P. 1527–1535.
- [8] Маркин А.А., Соколова М.Ю., Христоч Д.В. Постулат А.А. Ильюшина для анизотропных материалов и вариант определяющих соотношений // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 1. С. 38–45.

S. T. Nguyen, D. V. Khristich

## IDENTIFICATION OF THE PARAMETERS OF THE QUADRATIC MODEL OF THE ELASTIC ANISOTROPIC MATERIAL

*Tula State University, Tula, Russia*

**Abstract.** A second-order elasticity model for an orthotropic material is considered. The analysis shows that the quadratic part of the proposed model contains thirteen elastic constants, nine of which are linearly independent. The parameters of the model are determined from the data of experiments with composite plates. The model allows one to describe experimentally observed nonlinear dependences of stresses and strains in the processes of tension, compression, and shear, as well as the difference in resistance of anisotropic materials.

**Keywords:** nonlinear constitutive relations, anisotropic materials, identification, composites.

### REFERENCES

- [1] Sokolova M.Yu., Khristich D.V., Rudakov V.V. A nonlinear model of plates made of composite materials // Vestnik ChGPU Yakovleva. *Mechanika predelnogo sostoyaniya*. 2018. T. 37, № 3. С. 100–106. (in Russian).
- [2] Khristich D.V. Identification of anisotropic materials and modeling of processes of finite deformation of hypoelastic bodies. Dissertation for the Degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences. 2015. (in Russian).
- [3] Nonlinear deformation of carbon fibers: experiment, model, calculation / E.V. Amelina, S.K. Golushko, V.S. Erasov [и др.] // *Computational Technologies*. 2015. T. 20, № 5. С. 27–52. (in Russian).
- [4] Smith E., Pascoe K. The role of shear deformation in the fatigue failure of a glass fiber-reinforced composite // *Composites*. 1977. no. 8. P. 237–243.
- [5] Markin A.A., Sokolova M.Yu. *Thermomechanics of elastoplastic deformation*. Moscow: FizMatLit, 2013. 320 с.
- [6] Sokolova M., Rudakov V., Khristich D. Strains of plates of nonlinear anisotropic materials // IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1203. p. 012024 (11 pages).
- [7] Lomakin E., Fedulov B. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // *Meccanica*. 2015. Vol. 50, no. 6. P. 1527–1535.
- [8] Markin A., Sokolova M., Khristich D. A.A. Il'yushin's postulate for anisotropic materials and a version of constitutive relations // *Mechanics of Solids*. 2011. Vol. 46, no. 1. P. 30–35.

---

*Nguyen Sy Toan*, postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia.

*Khristich Dmitrii Viktorovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.