

А. А. Буренин, А. В. Ткачева

ОСЕВОЕ ВРАЩЕНИЕ В КАЧЕСТВЕ ПРИЧИНЫ ПАДЕНИЯ НАТЯГА В СБОРКЕ СОСТАВНОГО ДИСКА, ПОЛУЧЕННОЙ СПОСОБОМ ГОРЯЧЕЙ ПОСАДКИ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. На примере составного диска, созданного посредством операции горячей посадки, изучается прочность такого соединения на отрыв. Отрывные усилия создаются в качестве центробежных инерционных сил при вращении диска относительно его центральной оси. Показывается, что созданный натяг в сборке имеет выраженную тенденцию к уменьшению. Однако для его обнуления необходимы достаточно значительные угловые скорости вращения. Приведен пример расчета придельной угловой скорости в зависимости от первоначального нагрева охватываемой детали сборки, термомеханических свойств материала сборки и геометрических параметров итоговой конструкции. Подобные расчеты в снижающемся натяге совершенно необходимы, когда эксплуатационные условия требуют принять вращение составного диска в качестве части его функциональных обязанностей.

Ключевые слова: упругость, пластичность, температурные напряжения, посадка с натягом, горячая посадка, напряжения во вращающемся диске.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.003

УДК: 539.374

Введение

Наиболее характерным и известным примером сборки цилиндрических деталей с натягом является предложение ординарного академика Петербургской Академии Наук Гадолина А.В. об использовании двухслойных стволов артиллерийских орудий [1]. Такие предварительно напряженные стволы позволяли выдерживать повышенные давления пороховых газов, способствуя тем самым повышению дальности и точности стрельбы. Собирались такие орудийные стволы способом горячей посадки [1],

© Буренин А. А., Ткачева А. В., 2021

Буренин Анатолий Александрович

e-mail: aab@imim.ru, главный научный сотрудник, доктор физ.-мат. наук, член корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Ткачева Анастасия Валерьевна

e-mail: nansi.valer@yandex.ru, старший научный сотрудник, кандидат физ.-мат. наук, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00147.

Поступила 11.11.2021

когда охватывающий слой нагревался и надевался на холодный охватываемый. Позднее подобные конструкции нашли применение в других отраслях машиностроения, а операция горячей посадки оказалась одной из важнейших в ряду технологий сборки с натягом. Расчет сформировавшихся в процессе посадки предварительных для конструкций напряжений проводился, как правило, в рамках теории температурных напряжений [2, 3] в упругих телах. Связанностью процессов деформирования и теплопередачи пренебрегалось. Учет пластических деформаций в процессе посадки привел к необходимости использования приближенных численных расчетов [4, 5, 5, 6]. В [7–10] на основе использования кусочно-линейных пластических потенциалов пластического течения удалось избежать дискретизации расчетных областей и получить решения в численно – аналитической форме, где приближенные численные методы используются только для графического представления результатов расчетов и выполнения краевых условий решением систем алгебраических уравнений. Однако такие действия необходимо выполнять на каждом временном шаге расчетов, поскольку область пластического течения в свою очередь разделяется на части, в которых пластическое течение подчинено разным граням и ребрам кусочно-линейных поверхностей нагружения. Переходы с грани призмы Треска и Ивлева на ребро и на следующую грань необходимо отслеживать в процессе расчетов.

Имеется ряд работ, где прочность сборки проверяется теоретически и экспериментально. Так в [11, 12] рассматривается кручение сборки, в [13, 14] изучается прочность соединения поворотом охватываемой детали, в [15] в условиях циклических нагружений и, наконец, в [16] сопротивление соединения осевой нагрузке. Здесь рассмотрим прочность соединения в сборке составного диска при его вращении вокруг неподвижной оси. Данную задачу часто называют задачей Ю. Н. Роботнова [17]. В теории ползучести и пластического течения она изучалась неоднократно. Укажем здесь только последние публикации [18, 19]. О других можно составить впечатление по ссылкам этих работ. Возникающие при быстром вращении силы инерции позволяют дать оценку прочности соединения именно на отрыв, что ранее не изучалось.

Соотношения модели упруго пластического тела. Локальные следствия законов сохранения импульса и энергии приводят к дифференциальным уравнениям

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{\chi} = \rho \mathbf{w} \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\gamma}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}); \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}; \rho = \text{const}; \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2}; \gamma = \gamma(\mathbf{d}, s)$$

В (1) и (2) принято, что приобретаемые деформации телом являются малыми, $\boldsymbol{\chi}$, γ , s – плотность распределения массовых сил, внутренней энергии и энтропии, \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{q} – векторы перемещений, скоростей перемещений и потока тепла, $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{d} , $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры напряжений, деформаций и скоростей деформаций Эйлера, ρ – плотность, t – время.

Полные деформации \mathbf{d} в теле полагаем состоящими из упругих \mathbf{e} и пластических \mathbf{p} составляющих

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \mathbf{e} + \mathbf{p} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}); \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{d\mathbf{d}}{dt} = \frac{d\mathbf{e}}{dt} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \end{aligned} \quad (3)$$

Следствием закона сохранения энергии (2) и второго закона термодинамики являются [20] зависимости

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi(\mathbf{e}, T)}{\partial \mathbf{e}} \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{1}{T} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T \quad (5)$$

$$\psi(\mathbf{e}, T) = \gamma(\mathbf{e}, s) - sT; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial s} = T; \quad \frac{\partial \psi}{\partial T} = -s;$$

$$\mathbf{J} = \rho s \mathbf{v} + T^{-1} \mathbf{q}$$

Здесь ψ - плотность распределения свободной энергии, \mathbf{J} - вектор потока энтропии, T - температура. Зависимость (4) часто называется формулой Мурнагана, а соотношение (5) уравнением баланса энтропии s . То обстоятельство, что термодинамические потенциалы (свободная и внутренняя энергия) зависят только от обратимых (упругих) деформаций \mathbf{e} и не зависят от необратимых (пластических) деформаций \mathbf{p} является принимаемой упрощающей гипотезой. Это обычное допущение [20, 21].

При простейшем из возможных заданий термодинамического потенциала $\psi = \psi(\mathbf{e}, T)$ из (4) и (5) следует [2, 20] соотношения закона Дюамеля-Неймана и уравнение теплопроводности

$$\boldsymbol{\sigma} = (\lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - 3\alpha T_0 K \theta) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \Delta \theta - \frac{1}{c T_0} (\delta \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (7)$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_0}$$

Здесь λ, μ - параметры Ламе, $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ модуль всестороннего сжатия, T_0 - температура в свободном состоянии тела (комнатная температура), α, c - коэффициент линейного расширения и удельная теплоемкость материала, a - коэффициент температуропроводности, δ - коэффициент связанности.

Пластические деформации растут в материале только в условиях принадлежности напряжений поверхности нагружения (текучести) $f(\boldsymbol{\sigma}, k) = 0$ (k - предел текучести). В принимаемых далее условиях принципа максимума Мизеса уравнение поверхности нагружения выполняет роль пластического потенциала со следованием ассоциированного закона пластического течения

$$dp = d\eta \frac{df(\boldsymbol{\sigma}, k)}{d\boldsymbol{\sigma}}; \quad d\eta > 0 \quad (8)$$

В качестве поверхности нагружения принимаем далее боковую поверхность наклонной призмы Ивлева [22] в пространстве главных напряжений σ_j .

$$\max |\sigma_i - \sigma| = \frac{4}{3} k \quad (9)$$

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Данное условие пластического течения называется условием максимальных приведенных [22] напряжений или условием пластического течения Ишлинского-Ивлева.

Зависимость предела текучести $k = k(\theta)$ от температуры принимаем в простейшей ее форме

$$k(\theta) = k_0 (\theta_p - \theta) \theta_p^{-1} \quad (10)$$

Здесь $k_0 = const$ - предел текучести в опытах на сдвиг при комнатной температуре T_0 .

Сборка горячей посадкой. Протеклампированная во введении цель настоящей работы связана с анализом прочности соединения с натягом полученном в результате горячей посадки кольцевого диска на такой же диск, при последующем вращении сборки относительно центральной оси ортогональной общей плоскости соединенных дисков. Именно таким способом предполагается изучить прочность соединения на отрыв.

Итоговая конструкция представлена на рис. 1 (а). Составной деформируемый диск, насажен на жесткий вал радиуса $r = R_0$. Диск состоит из двух частей, воедино собранных с помощью операции горячей посадки. Охватываемая часть диска имеет размеры $R_0 \leq r \leq R_1$, охватывающая - $R_1 \leq r \leq R_2$. Соединение с валом полагается жестким и теплоизолированным. Вал может вращаться вокруг своей оси с переменной угловой скоростью ω . Изменение угловой скорости вращения со временем t задается так, как это представлено на рис. 1 (б), где t_1, t_2, t_3 ω_* назначенные параметры вращения. Очевидно, что, прежде чем приступить к расчету изменений в натяге и в напряжениях в материале составного диска за счет вращения, необходимо знать распределение напряжений и уровень натяга на линии сопряжения $r = R_1$ (иметь начальные условия). Получить такие начальные условия возможно только решением задачи, моделирующей операцию горячей посадки. Данные расчеты проведем в рамках теории температурных напряжений (несвязанной теории).

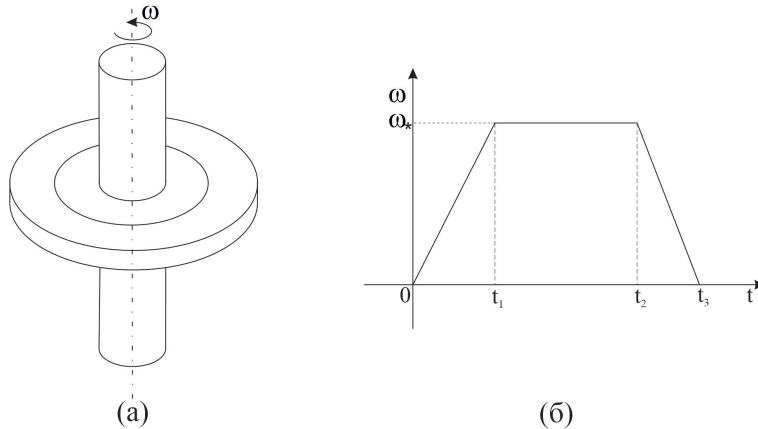


Рис. 1. Постановка задачи. а) вид сборки, б) изменение скорости вращения со временем

Температурная часть задачи состоит из уравнения теплопроводности (7), где связностью (последний слагаемый правой части) пренебрегается. В таком случае из (7) для рассматриваемого случая осевой симметрии в цилиндрических координатах r, φ, z имеем уравнение

$$\theta_{,t} = a (\theta_{,rr} + r^{-1} \theta_{,r}) - \beta \theta \quad (11)$$

Индексом после запятой здесь и в дальнейшем обозначается производная по данной независимой переменной. Последний слагаемый в (11) задает теплоотдачу с поверхности составного диска в окружающую среду, находящуюся при комнатной температуре; β - коэффициент такой теплоотдачи, полагаемый далее постоянным. Начальными условиями для уравнения теплопроводности (11) являются зависимости

$$\theta(R_0 \leq r \leq R_1, 0) = 0; \quad \theta(R_1 \leq r \leq R_2, 0) = \theta_* \quad (12)$$

В (12) $\theta_* = const$ - однородная безразмерная температура предварительного нагрева охватывающей детали сборки составного диска.

Граничными условиями в рассматриваемом случае становятся соотношения

$$\begin{aligned} \theta_{,r}(R_0, t) = 0; \quad \xi_2 \theta_{,r}(R_2, t) = \beta \theta; \\ \theta^+(R_1, t) = \theta^-(R_1, t); \quad \xi_2 \theta_{,r}^+(R_1, t) = \xi_1 \theta_{,r}^-(R_1, t) \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь ξ_1, ξ_2 - коэффициенты теплопроводности для материалов охватываемой и охватывающей деталей сборки; $\theta^+(r, t)$ распределение температуры в охватывающей детали и $\theta^-(r, t)$ в охватываемой детали. Первое соотношение в (13) задает условие теплоизоляции вала.

Температурная задача (11)-(13) имеет аналитическое решение. Но из-за того, что в механической задаче приходится использовать численные расчеты при выполнении граничных условий в каждый рассчитываемый момент времени, удобнее и в температурной задаче воспользоваться численными расчетами. Такие расчеты не содержат в себе дополнительных трудностей и доведены до простых пользовательских программ, поэтому далее считаем, что поле температур известно (найденно) решением задачи (11)-(13).

Сразу за моментом посадки материалы сборки деформируются обратимо (упруго). При этом деформации связаны с перемещениями зависимостями: $d_r = e_r = u_{r,r}$; $d_\varphi = e_\varphi = r^{-1}u_r$. Остальные компоненты тензора деформации равны нулю. Считая сопрягаемые диски достаточно тонкими, принимаем условия плоских напряженных состояний. Соотношения (6) в таком случае переписывается в форме

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (4\mu(\lambda + \mu)u_{r,r} + 2\mu\lambda r^{-1}u_r - 6K\mu\alpha T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1} \\ \sigma_\varphi &= (4\mu(\lambda + \mu)r^{-1}u_r + 2\mu\lambda u_{r,r} - 6K\mu\alpha T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1} \end{aligned} \quad (14)$$

Подстановка (14) в уравнение равновесия, следующее из (1) в рассматриваемых условиях

$$\sigma_{r,r} + r^{-1}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0, \quad (15)$$

позволяет записать уравнение (5) в перемещениях u_r

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) = \frac{3K\alpha T_0}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial \theta}{\partial r} \quad (16)$$

Интегрируя (16), имеем

$$u_r^{(v)} = 1.5K\alpha T_0(\lambda + \mu)^{-1} r^{-1} \int_b^r \rho \theta(\rho) d\rho + 0.5r C_1^{(v)}(t) + r^{-1} C_2^{(v)}(t) \quad (17)$$

В (17) $v = 1$ для охватываемого кольца, $v = 2$ - для охватывающего. Для внутреннего кольца в (17) следует принять $b = R_0$, для внешнего $b = R_1$.

Коэффициенты (функции времени) интегрирования $C_1^1, C_2^1, C_1^2, C_2^2$ в каждый рассчитываемый момент времени определяются выполнением граничных условий

$$\begin{aligned} u_r(R_0, t) = 0; \quad \sigma_{rr}(R_2, t) = 0; \\ u_r^{(1)}(R_1, t) = u_r^{(2)}(R_1, t), \quad \sigma_r^{(1)}(R_1, t) = \sigma_r^{(2)}(R_1, t) \end{aligned} \quad (18)$$

С ростом времени за счет перераспределения температуры по элементам сборки растут и напряжения (14). В некоторый момент времени выполняется условие пластического течения (9) в форме (расчетный факт) $2\sigma_\varphi - \sigma_r = 4k$. На рис. 2 представлено сечение призмы Ивлева плоскостью $\sigma_3 = 0$ в пространстве главных напряжений.

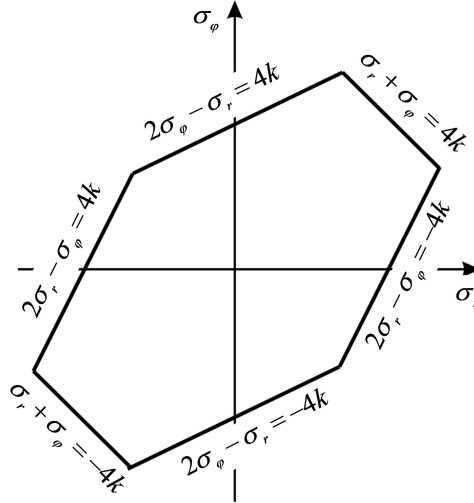


Рис. 2.

Местом первоначального выполнения условия соответствия напряжений грани (рис. 2) призмы Ивлева является поверхность $r = R_1$. Зарождающаяся упругопластическая граница $r = n_1(t)$ начинает с этого момента времени продвигаться по охватывающему диску. В увеличивающейся области пластического течения $R_1 \leq r \leq n_1(t)$ для компонент напряжения имеем в каждый момент времени зависимости учитывающие наличие необратимых деформаций

$$\begin{aligned} \sigma_r(r) &= (4\mu(\lambda + \mu)(u_{r,r} - p_r) + 2\mu\lambda(r^{-1}u_r - p_\varphi) - 6K\mu\alpha T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_\varphi(r) &= (4\mu(\lambda + \mu)(r^{-1}u_r - p_\varphi) + 2\mu\lambda(u_{r,r} - p_r) - 6K\mu\alpha T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1} \end{aligned} \quad (19)$$

Согласно ассоциированному с гранью $2\sigma_\varphi - \sigma_r = 4k$ призмы Ивлева закону пластического течения получаем, что $p_\varphi = -2p_r$. Учитывая это, последние зависимости для напряжений в пластической области, возможно, переписать в форме

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (12K\mu u_{r,r} + 6K\mu r^{-1}u_r - 4\mu k(r) - 18K\mu\theta(r))(3\lambda + 5\mu)^{-1} \\ \sigma_\varphi &= (6\mu K u_{r,r} + 3\mu K r^{-1}u_r + 2(3\lambda + 4\mu)k(r) - 9K\mu\theta(r))(3\lambda + 5\mu)^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

Если подставить (20) в уравнение равновесия (15) и проинтегрировать результат с учетом соответствия напряжений грани $2\sigma_\varphi - \sigma_r = 4k$, то получим, что в области пластического течения $R_1 \leq r \leq n_1(t)$, справедливы в любой момент времени

зависимости

$$\begin{aligned}
\sigma_r(r) &= r^{-0.5}C_1 + 2r^{-0.5} \int_{R_1}^r \rho^{-0.5}k(\rho) d\rho, \sigma_\varphi(r) = 2k(r) + 0.5\sigma_r, \\
u_r(r) &= 1.5r^{-0.5} \int_{R_1}^r \rho^{0.5}\theta(\rho) d\rho - (3\lambda + 5\mu)(3\mu K)^{-1} r^{0.5} \int_{R_1}^r \rho^{-0.5}k(\rho) d\rho + \\
&+ (K + \mu)(\mu K)^{-1} r^{-0.5} \int_{R_1}^r \rho^{0.5}k(\rho) d\rho + r^{0.5}(K + \mu)(4\mu K)^{-1} C_1^{(3)} + r^{-0.5}C_2^{(3)} \\
p_r(r) &= 0.5\theta(r) + (\lambda + \mu)(3\mu K)^{-1} k(r) - \\
&- (\lambda + \mu)(2\mu K)^{-1} \left(r^{-1.5} \int_{R_1}^r \rho^{0.5}k(\rho) d\rho + r^{-0.5} \int_{R_1}^r \rho^{-0.5}k(\rho) d\rho \right) - \\
&- (\lambda + \mu)(8K\mu r^{0.5})^{-1} C_1^{(3)} - 0.5r^{-1.5}C_2^{(3)}
\end{aligned} \tag{21}$$

Постоянные интегрирования в каждый рассчитываемый момент времени необходимо определить решением системы линейных уравнений, следующей из краевых условий (18) и условий непрерывности u_r , σ_r на упругопластической границе $r = n_1(t)$. Вместе с (18) имеем в таком случае семь алгебраических уравнений для определения в любой момент времени шести постоянных $C_1^1, C_2^1, C_1^2, C_2^2, C_1^3, C_2^3$ и положения линии $n_1(t)$. Эти расчеты необходимо проводить на каждом последующем шаге по времени. Более того, количество подобных постоянных (функций времени) с последующими шагами по времени будет возрастать с появлением новых областей пластического течения, соответствующих иным граням поверхности текучести (рис. 2). Эволюция областей пластического течения указана на рис. 3, где время расчетов продвигается сверху вниз. Формирование подобной схемы возникновения и исчезновения областей пластического течения подробно описано в предыдущих наших публикациях, например в [8, 10]. Здесь данный способ, практически, повторяем. На рис. 3 указаны последовательно возникающие области пластического течения с указанием их соответствия разным граням (рис.2) призмы Ивлева до полного остывания сборки. В итоговом состоянии области пластического течения отсутствуют, но присутствуют накопленные пластические деформации. Упругие итоговые деформации создают требуемый натяг в сборке. Поэтому совершенно непонятным и бессмысленным оказывается заявление авторов статьи [23]: «Решение задачи Гадолина в упругопластической постановке длительное время не представляло особого интереса, что не удивительно в виду основной ориентации этой задачи на проектирование орудийных стволов, которые, очевидно, должны быть без пластического слоя». О каком пластическом слое идет речь в цитируемом предложении. Авторы [23] не понимают операцию горячей посадки как процесс. Отсюда и допущенная бессмысленность в целом полезной научной статье.

В качестве примера дальнейшего укажем только одну последующую операцию расчетов, когда образуется вторая область течения (рис.3 в). В условиях развития первичной пластической области (рис. 3. в) напряжения в сборке продолжают своей рост. В некоторый момент времени на поверхности $r = R_1$ наряду с условием $2\sigma_\varphi - \sigma_r = 4k$ выполняется еще и соотношение $\sigma_\varphi - 2\sigma_r = 4k$. Таким образом, напряженное состояние будет соответствовать ребру призмы Ивлева (рис. 2) . Однако в [24] нами было показано, что при зависимости предела текучести от температуры пластическое течение в соответствии плоских напряжений ребру (рис. 2) Ивлева невозможно. Осуществляется переход на соседнюю грань, не задерживаясь на общем ребре, и поэтому

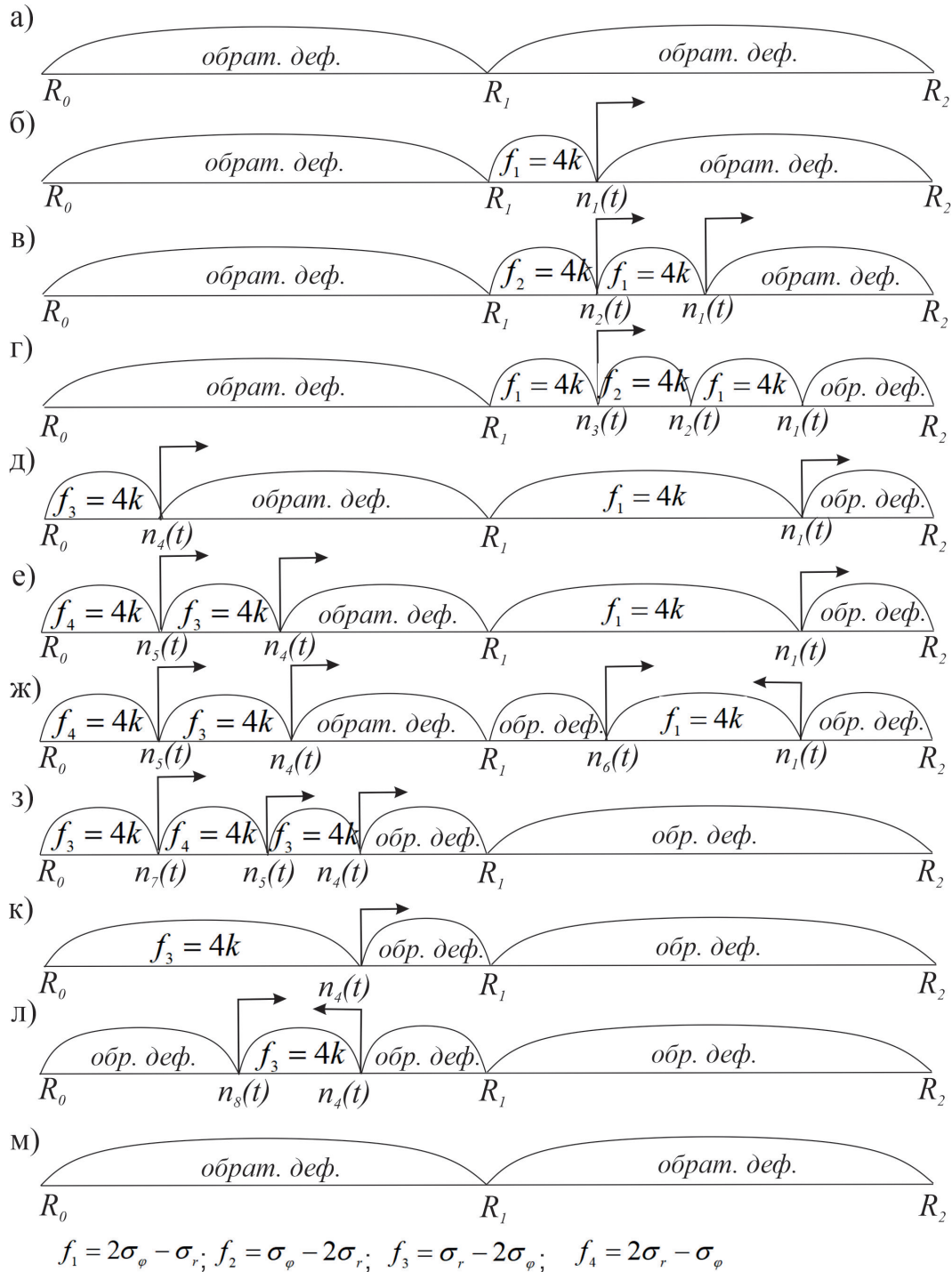


Рис. 3. Схема возникновения и исчезновения разных областей пластического течения в процессе сборки горячей посадкой

развиваемая пластическая область предстает двумя своими частями (рис. 3 в). В одной из них $n_2(t) \leq r \leq n_3(t)$ пластическое течение соответствует грани $2\sigma_\varphi - \sigma_r = 4k$, а в другой грани $\sigma_\varphi - 2\sigma_r = 4k$. Для напряжений в последней области будем иметь зависимости, справедливые в рассматриваемый момент времени

$$\begin{aligned}\sigma_r(r) &= (4\mu(\lambda + \mu)(u_{r,r} - p_r - p_r^0) + 2\mu\lambda(r^{-1}u_r - p_\varphi - p_\varphi^0))(\lambda + 2\mu)^{-1} - \\ &\quad - 6K\mu\theta(\lambda + 2\mu)^{-1} \\ \sigma_\varphi(r) &= (4\mu(\lambda + \mu)(r^{-1}u_r - p_\varphi - p_\varphi^0) + 2\mu\lambda(u_{r,r} - p_r - p_r^0))(\lambda + 2\mu)^{-1} - \\ &\quad - 6K\mu\theta(\lambda + 2\mu)^{-1}\end{aligned}\quad (22)$$

В (22) p_r^0, p_φ^0 - необратимые деформации, накопленные в прежней области (при $2\sigma_\varphi - \sigma_r = 4k$) пластического течения. Если $p_r = p_r(r, t)$ и $p_\varphi = p_\varphi(r, t)$, то $p_r^0 = p_r^0(r)$ и $p_\varphi^0 = p_\varphi^0(r)$. Время в последних функциональных зависимостях фиксируется моментом прихода в рассматриваемую точку деформируемого материала граничной поверхности $r = n_2(t)$, разделяющей пластическую область на части. Далее со временем p_r^0, p_φ^0 не меняются. В процессе вычислений распределения необратимых деформаций накапливаются в памяти компьютера и используются в надлежавший момент. Если точка материала участвовала в нескольких процессах течения, то в качестве p_r^0, p_φ^0 принимается итоговая пластическая деформация от всех предшествующих областей необратимого деформирования.

Подстановка (22) в уравнение равновесия (15) с учетом следствия ассоциированного с данной гранью закона пластического течения $p_\varphi = -0.5p_r$ и интегрирование следствия такой подстановки позволяет записать решение задачи для этой области в рассматриваемый момент времени

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 4r \int_{R_1}^r \frac{k(\rho)}{\rho^2} d\rho + C_1^{(4)} r; \sigma_\varphi = 2\sigma_r + 4k; \\ u_r(r) &= C_1^{(4)} r^2 (K + \mu) (4K\mu)^{-1} + C_2^{(4)} r^{-2} + \\ &\quad + r^{-2} \int_{R_1}^r \rho^2 (2p_r^0(\rho) + p_\varphi^0(\rho)) d\rho + \\ &\quad + \alpha T_0 \left(\left(3r^{-2} + r^{-2} (\lambda + \mu) (K\mu)^{-1} \right) \int_{R_1}^r \rho^2 \theta(\rho) d\rho \right) \\ &\quad + \alpha T_0 \left(r^2 (K + \mu) (K\mu)^{-1} \int_{R_1}^r \rho^{-2} \theta(\rho) d\rho \right)\end{aligned}\quad (23)$$

$$\begin{aligned}p_{rr}(r) &= (3K + \mu) r (6K\mu)^{-1} C_1^{(4)} - 2r^{-3} C_2^{(4)} - 6r^{-3} \alpha T_0 \int_{R_1}^r \rho^2 \theta(\rho) d\rho - \\ &\quad - 2r^{-3} \int_{R_1}^r \rho^2 (p_r(\rho) + 2p_\varphi(\rho)) d\rho + 2r (3K + \mu) (3K\mu)^{-1} \int_{R_1}^r \rho^{-2} k(\rho) d\rho + \\ &\quad + 8(\lambda + \mu) (3K\mu)^{-1} k(r) + 2\alpha T_0 \theta(r) + \\ &\quad + 2(\lambda + \mu) r^{-3} (\mu K)^{-1} \int_{R_1}^r \rho^2 k(\rho) d\rho + 2p_\varphi(r)\end{aligned}$$

Значение постоянных в рассматриваемый момент времени $C_1^{(4)}$ и $C_2^{(4)}$ вычисляться посредством выполнения граничных условий (18) и условий непрерывности перемещения u_r и напряжения σ_r на продвигающихся поверхностях $r = n_1(t)$ и $r = n_2(t)$. При этом в каждый рассчитываемый момент времени пересчитываются значения постоянных $C_1^1, C_2^1, C_1^2, C_2^2, C_1^3, C_2^3$ и положения n_1 и n_2 продвигающихся граничных линий. Таким способом имеем восемь алгебраических уравнений для восьми неизвестных. Далее количество последних будет только расти.

Не останавливаясь на совершенно подобных дальнейших расчетах, заметим только, в каждой из последующих возникающих областей течения уравнение равновесия возможно проинтегрировать в любой момент времени и получить конечные зависимости для деформаций и напряжений от известного (найденного) распределения температуры. Данную возможность представляет использование кусочно-линейных пластических потенциалов. В рассматриваемом случае это условие максимальных приведенных напряжений [22] (условие пластичности Ишлинского - Ивлева). Условие пластического течения Треска-Сен-Венана, то есть условие максимальных касательных напряжений [22], использовалось нами в расчетах неустановившихся температурных напряжений в [8].

Для дальнейших расчетов необходимы сведения об уровне и распределении остаточных деформаций и напряжений. Для них в качестве итога расчетов согласно приведенной (рис. 3) схеме эволюции областей пластического течения следуют зависимости

$$\begin{aligned}
u_r(r) &= 0.5rC_1^{(i)}(t) + r^{-1}C_2^{(i)}(t) + \\
&+ 3K(4(\lambda + \mu)r)^{-1} \left(\int_b^r \rho (p_r^0(\rho) + p_\varphi^0(\rho)) d\rho \right) + \\
&+ (\lambda + 2\mu)(4(\lambda + \mu))^{-1} r \left(\int_b^r \rho^{-1} (p_r^0(\rho) - p_\varphi^0(\rho)) d\rho \right) \\
\sigma_r(r) &= 1.5K\mu(\lambda + \mu)^{-1} \left(\int_b^r \rho^{-1} (p_r^0(\rho) - p_\varphi^0(\rho)) d\rho \right) - 6\mu K\theta_0(\lambda + 2\mu)^{-1} \\
&- 1.5K\mu(\lambda + \mu)^{-1} r^{-2} \left(\int_b^r \rho (p_r^0(\rho) + p_\varphi^0(\rho)) d\rho \right) + \\
&+ 3\mu K(\lambda + 2\mu)^{-1} C_1^{(i)}(t) - 2\mu r^{-2} C_2^{(i)}(t) \\
\sigma_\varphi(r) &= 3\mu K(\lambda + 2\mu)^{-1} C_1^{(i)}(t) + 2\mu r^{-2} C_2^{(i)}(t) + \\
&+ 3\mu K(\lambda + \mu)^{-1} p_\varphi(r) - 6\mu K\theta_0(\lambda + 2\mu)^{-1} + \\
&+ 1.5\mu K(r(\lambda + \mu))^{-1} \left(r^{-1} \left(\int_b^r \rho (p_r^0(\rho) + p_\varphi^0(\rho)) d\rho \right) \right) \\
&+ 1.5\mu K(r(\lambda + \mu))^{-1} \left(r \left(\int_b^r \rho^{-1} (p_r^0(\rho) - p_\varphi^0(\rho)) d\rho \right) \right)
\end{aligned} \tag{24}$$

В (24) p_r^0 и p_φ^0 итоговые распределения остаточных пластических деформаций. Они снабжены индексом "ноль" с целью подчеркнуть аналогичность их расчетов с предыдущими вычислениями. Для охватываемого элемента сборки $\theta_0 = 0$ $b = R_0$, для охватывающего $\theta_0 = \theta_*$ - задаваемая температура нагрева $b = R_1$.

Характерное распределение остаточных напряжений представлено рис. 4. Конкретные численные значения остаточных напряжений получены в условиях, когда охватываемая и охватывающая детали сборки изготовлены из одного материала (Ст45). Геометрия сборки представлена на рис. 4. Термомеханические параметры материала сборки принимались равными: $a = 0.944 \cdot 10^{-6}$, $\alpha = 11.1 \cdot 10^{-6}$, $k_0 = 360.0$ МПа, $T_p = 1400^\circ\text{C}$, $E = 210.0$ ГПа, $\nu = 0.27$, температура первоначального нагрева охватывающего кольца $T_0 = 700^\circ\text{C}$.

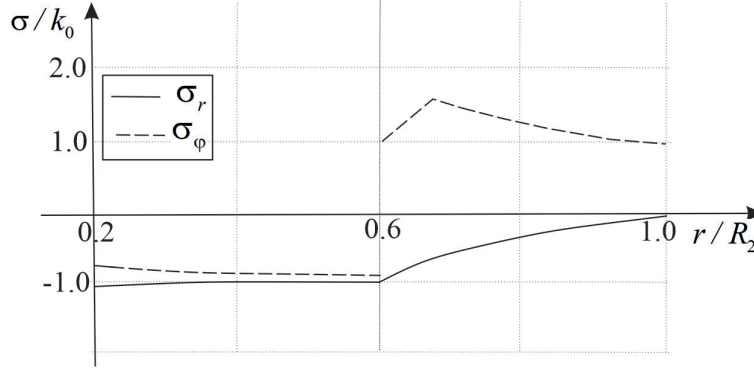


Рис. 4. Распределение остаточных напряжений в материале сборки

Падение напряжений при вращении Теперь считаем, что сборка (рис.1) ускоренно вращается вокруг своей оси. Считая изменения угловой скорости $\omega = \omega(t)$ медленным, пренебрегаем угловым ускорением. Тогда уравнение движения (1) сводится [18, 19, 25] к одному уравнению

$$\sigma_{r,r} + r^{-1}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = -\rho r \omega^2 \quad (25)$$

Учитывая условия изотермичности процесса деформирования, задаваемого воздействием центробежных сил инерции, найдем

$$\begin{aligned} u_r(r, t) &= u_r(r) - (\lambda + 2\mu)^{-1} (32\mu)^{-1} (\lambda + \mu)^{-1} \rho \omega^2 r^4 \\ \sigma_r(r, t) &= \sigma_r(r) - (9\lambda + 8\mu)^{-1} (16)^{-1} (\lambda + \mu)^{-1} \rho \omega^2 r^3 \\ \sigma_\varphi(r, t) &= \sigma_\varphi(r) - (3\lambda + \mu)^{-1} (8)^{-1} (\lambda + \mu)^{-1} \rho \omega^2 r^3 \end{aligned} \quad (26)$$

В (26) $u_r(r)$, $\sigma_r(r)$, $\sigma_\varphi(r)$ - перемещение и напряжения, созданные в ходе операции посадки. Это зависимости (24), то есть остаточное перемещение и остаточные напряжения накопленные в материале составного диска до начала его вращения.

Зависимости (26) не являются окончательными, так как в (24) входят неизвестные постоянные в каждый рассчитываемый момент времени $C_1^{(i)}$, $C_2^{(i)}$. Для каждого элемента сборки они разные. Окончательно зависимости (26) будут решать задачу только после определения этих постоянных в текущий момент времени из граничных условий (18). Более того при высоком нагреве охватывающей детали сборки в условиях вращения составного диска в нем возможны новые области пластического течения. В проведенных расчетах, когда $T_0 = 700^\circ\text{C}$ и местом сборки диска делиться так, что $R_1 - R_0 = R_2 - R_1$, пластического течения при вращении не возникало. На рис. 5 показано распределение напряжений по диску в материале в момент обращения в ноль натяга в сборке.

Расчетное значения угловой скорости при следующем обращении в ноль натяга в сборке оказалось равной $\omega = \omega_* = 9.2 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ или $n_* = 5.95 \cdot 10^4 \text{ об/мин}$.

Следовательно сборка может использоваться в качестве диска, закрепленного на валу только при умеренном его вращении, когда угловая скорость не превысит пороговых своих значений. В случае иных термомеханических свойств материалов составного диска и иных геометрических размерах такие пороговые значения для угловой

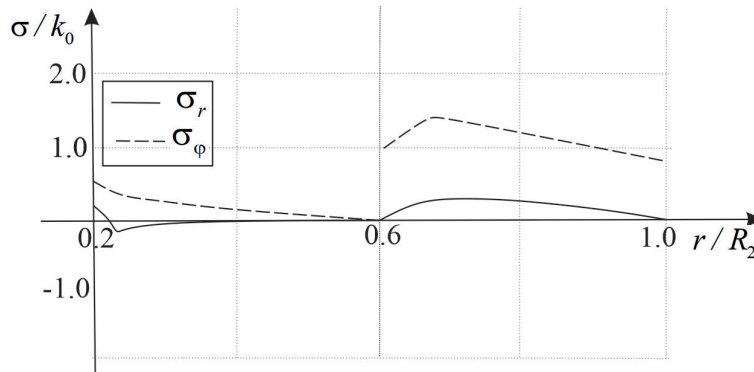


Рис. 5. Распределение напряжений в момент отрыва внешнего кольца

скорости будут иными и требуют своего перерасчета согласно приведенному алгоритму. Когда функциональной обязанностью составного диска оказывается его вращение вокруг неподвижной оси расчет падения натяга обязан быть осуществлен так, как это проведено выше.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гадолин А. В. Теория орудий, скрепленных обручами // Артелл. журнал. 1861. № 12. С. 1033–1071.
- [2] Паркус Г. Неустоявшиеся температурные напряжения. Москва: Физматлит, 1963. 252 с.
- [3] Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. Москва: Мир, 1964. 512 с.
- [4] Mack W. Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft // Arch. Appl. Mech. 1993. № 63. С. 42–50.
- [5] Bengeri M., Mack W. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit // Acta Mechanica. 1994. № 103. С. 243–257.
- [6] Kovacs A. Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits // Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng. 1996. no. 2(40). P. 103–112.
- [7] Дац Е. П., Петров М. Р., Ткачева А. В. Кусочно-линейные пластические потенциалы в задачах теории температурных напряжений о сборки горячей посадкой // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева Серия механика предельного состояния. 2015. № 4(26). С. 163–179.
- [8] Буренин А. А., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А. К расчету неустоявшихся температурных напряжений в упругопластических телах // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. № 3(10). С. 245–259.
- [9] Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности / Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин, А. В. Ткачева [и др.] // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 1. С. 32–43.
- [10] Буренин А. А., Ткачева А. В. О сборке двухслойной металлической трубы способом горячей посадки // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 3. С. 86–99.
- [11] Antoni N. Contact separation and failure analysis of a rotating thermoelasticplastic shrink-fit assembly // Appl. Math. Modelling. 2013. № 37. С. 2352–2363.
- [12] Arstan E., Mack W. Shrink fit with solid inclusion and functionally graded hub // Composite Struct. 2015. № 121. С. 217–224.
- [13] Askink – fit shaft subject to torsion / A. Sackfield, J. R. Barber, D. A. Hills [и др.] // Europ. J. Meh. Sol. 2002. № 21. С. 73–84.
- [14] Effect of fitted position on stress distribution and strength of a bonded shrink fitted joint subjected to torsion / Airoshi Kawamura, Toshiyuki Sawab, Masahiro Yonenoa [и др.] // Int. J. Adhesion Adhesiveb. 2003. № 23. С. 131–140.

- [15] Gaul L., Schmidt A. Finite element simulation and experiments on a disk assembly by shrink fits // *Mech. Syst. and Signal Proc.* 2019. № 127. С. 412–422.
- [16] Lopes J. P., Hills D. A., Paynter R. J. H. The axisymmetric shrink fit problem subjected to axial force // *J. of Mech. Solids*. 2018. № 70. С. 172–180.
- [17] Роботнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. Москва: Наука, 1966. 752 с.
- [18] Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion under mechanical loading and unloading // *ZAMM*. 2020. № 3(100). С. 19–25.
- [19] Прокудин А. Н., Буренин А. А. Упругопластическое Деформирование Вращающегося Сплошного Цилиндра Из Линейно-Упрочняющегося Материала // *Прикладная Математика И Механика*. 2021. № 2(85). С. 172–192.
- [20] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
- [21] Годунов С. К., Роменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Научная книга, 1998. 267 с.
- [22] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [23] Бухалов В. И., Попов А. А., Целубеев Д. А. Задача Годолина в упругопластической постановке // *Прикладная Математика И Механика*. 2018. № 6(82). С. 804–812.
- [24] Буренин А. А., Ткачева А. В. Кусочно-линейные пластические потенциалы как средство расчетов плоских неустановившихся температурных напряжений // *Механика твердого тела*. 2020. № 6. С. 40–49.
- [25] Mack W., Plochl M. Transient heating of a rotating elastic-plastic shrink fit // *Int. J. Eng. Science*. 2000. № 38. С. 921–938.

A. A. Burenin , A. V. Tkacheva

AXIAL ROTATION AS A CAUSE OF LOSS OF INTERFERENCE IN A SHRINK FITTED SPLIT DISC ASSEMBLY

Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur, Russia

Abstract. On the example of a composite disk, created by means of a hot-fit operation, the pull-off strength of such a disk is studied. Separation forces as centrifugal forces with relative rotation of its central axis. It is shown that the created interference fit in the assembly has a pronounced tendency to decrease. However, for vanishing, sufficiently significant angular velocities of rotation are required. An example of calculating the near-limit angular velocity, depending on the original covered part of the assembly, of the thermomechanical properties of the material and the geometric characteristics of the final structure is given. Such computations in decreasing interference are essential when operating conditions require the rotation of the composite disc to be accepted as part of its functionality.

Keywords: elasticity, plasticity, thermal stresses, interference fit, shrink fit, stresses in a rotating disc.

REFERENCES

- [1] Gadolin A. V. Theory of guns held together by hoops. // *Artell. magazine*. 1861. no. 12. P. 1033–1071.
- [2] Parkus G. Unstable temperature stresses. Moscow: Fizmatlit, 1963. 252 p. (in Russian).

Burenin Anatoly Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics Sci., Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur, Russia.

Tkacheva Anastasia Valerevna, Can. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur, Russia.

- [3] Bolly B., Weiner J. The theory of thermal stress. Moscow: Mir, 1964. 517 p.
- [4] Mack W. Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft. 1993. P. 42–50.
- [5] Bengeri M., Mack W. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit. 1994. p. 243–257.
- [6] Kovacs Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits // *Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng.* 1996. no. 40(2). P. 103–112.
- [7] Dats E. P., Petrov M. R., Tkacheva A. V. Piecewise-linear plastic potentials in thermal stress theory problems of shrink fit assemblies // *Bulletin of ChGPU im. AND I. Yakovleva Series of Limit State Mechanics.* 2015. no. 4 (26). P. 163–179.
- [8] Burenin A. A., Tkacheva A. V., Shcherbatyuk G. A. To the calculation of unstable temperature stresses in elastoplastic bodies. // *Computational Continuum Mechanics.* 2017. no. 3 (10). P. 245–259.
- [9] Thermal stresses in an elastoplastic pipe depending on the choice of the plasticity condition. / E. P. Dats, E. V. Murashkin, A. V. Tkacheva et al. // *Izv. RAS. MTT.* 2018. no. 1. P. 32–43.
- [10] Burenin A. A., Tkacheva A. V. About shrink fit a two-layer metal pipe // *Izv. RAS. MTT.* 2019. no. 3. P. 86–99.
- [11] Antoni N. Contact separation and failure analysis of a rotating thermoelasticplastic shrink-fit assembly // *Appl. Math. Modelling.* 2013. no. 37. P. 2352–2363.
- [12] Arstan E., Mack W. Shrink fit with solid inclusion and functionally graded hub // *Composite Struct.* 2015. no. 121. P. 217–224.
- [13] Shrink-fit shaft subject to torsion / A. Sackfield, J. R. Barber, D. A. Hills et al. // *Europ. J. Mech. Sol.* 2002. no. 21. P. 73–84.
- [14] Effect of fitted position on stress distribution and strength of a bonded shrink fitted joint subjected to torsion / A. Kawamura, T. Sawab, M. Yoneno et al. // *Int. J. Adhesion Adhesive.* 2003. no. 23. P. 131–140.
- [15] Gaul L., Schmidt A. Finite element simulation and experiments on rotor dampers assembled by disc shrink fits // *Mech. Syst. and Signal Proc.* 2019. no. 127. P. 412–422.
- [16] Lopes J. P., Hills. D. A., Paynter R. J. H. The axisymmetric shrink fit problem subjected to axial force // *Intern. J. of Mech. Solids.* 2018. no. 70. P. 172–180.
- [17] Robotnov Y. N. Creep of structural elements. Moscow: Science, 1966. 752 p.
- [18] Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion under mechanical loading and unloading // *ZAMM.* 2020. no. 3(100).
- [19] Prokudin A. N., Burenin A. A. Elastoplastic Deformation of a Rotating Solid Cylinder Made of Linear Hardened Material // *Applied Mathematics and Mechanics.* 2021. no. 2 (85). p. 172–192.
- [20] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. Large irreversible deformations and elastic action. Vladivostok: Dalnauka, 2013. 312 p.
- [21] Godunov S. K., Romensky E. I. Elements of continuum mechanics and conservation laws. Novosibirsk: Scientific book, 1998. 267 p.
- [22] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of Plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p.
- [23] Bukhalov V. I., Popov A. A., Tselubeev D. A. Elastoplastic problem of Godolin // *Applied Mathematics and Mechanics.* 2018. no. 6 (82). P. 804–812.
- [24] Burenin A. A., Tkacheva A. V. Piecewise-linear plastic potentials as a means of calculating plane unspecified temperature stresses // *Rigid Body Mechanics.* 2020. no. 6. P. 40–49.
- [25] Mack W., Plochl M. Transient heating of a rotating elastic-plastic shrink fit // *Int. J. Eng. Science.* 2000. no. 38. P. 921–938.