Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 3 (49). С. 42–46

Б. Г. Миронов[1], *Ю. Б. Миронов*[2]

К ВОПРОСУ КРУЧЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

[1]*Российский университет транспорта, г. Москва, Россия*
[2]*Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия*

Аннотация. Работа посвящена исследованию кручения неоднородных стержней из идеального жесткопластического материала, находящихся под действием переменного внешнего давления линейно меняющегося вдоль образующей стержня. Определены основные соотношения теории кручения исследуемых стержней. Найдены характеристики основных соотношений и определены соотношения вдоль характеристик. В работе получены интегралы основных соотношений при различных условиях предельного состояния стержня.

Ключевые слова: напряжение, пластичность, неоднородность, кручение, деформация.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.005

УДК: 539.735

Кручение является одним из распространенных видов деформации тел. Оно довольно часто встречается в инженерной практике. Теории кручения стержней из идеального жесткопластического материала посвящены многочисленные работы, в частности кручение изотропных и анизотропных стержней изложено в [1–3]. Работы [4, 5] и [6, 7] посвящены исследованию кручения неоднородных стержней из идеального жесткопластического материала. Кручение стержней из упрочняющегося материала приводит к определенным сложностям. В этом случае, задача не является статически определимой. Возникают трудности с точной постановкой задачи. Требует совместного рассмотрения поля напряжений и деформаций. Отдельные случаи в линеаризованной постановке рассмотрены в работе [8]. В [9] исследовано кручение стержней из анизотропного жесткопластического материала, находящегося под действием давления, меняющегося вдоль образующей.

Миронов Борис Гурьевич
`e-mail:` mbg.chspu@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математика и естественные науки», Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.
Миронов Юрий Борисович
`e-mail:` mistiam@gmail.com, кандидат технических наук, декан факультета «Сети и системы связи», Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия.

Поступила 01.11.2021

Рассмотрим неоднородный цилиндрический или призматический стержень из идеального жесткопластического материала. Предположим, что образующие стержня параллельны оси z. Стержень находится под действием переменного внешнего давления линейно меняющегося вдоль образующей стержня. Предположим также, что стержень закручивается вокруг своей оси. При этом боковая поверхность стержня свободна от нагрузок.

Напряженное состояние в стержне характеризуется следующими значениями компонент напряжения:

$$\begin{gathered} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\lambda z + \mu \;\; (\lambda,\, \mu - const) \\ \tau_{xy} = 0, \tau_{xz} = \tau_{xz}\left(x,\, y\right),\, \tau_{yz} = \tau_{yz}\left(x,\, y\right), \end{gathered} \tag{1}$$

определяется из уравнения равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \lambda \tag{2}$$

и условия пластичности

$$f\left(\tau_{xz},\; \tau_{yz},\, x,\, y\right) = 0. \tag{3}$$

Деформированное состояние в стержне характеризуется следующими компонентами скоростей деформаций

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0 \tag{4}$$

и определяется из соотношения ассоциированного закона пластического течения

$$\frac{\varepsilon_{xz}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{\varepsilon_{yz}}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} \tag{5}$$

где ε_{ij} – компоненты скоростей деформаций.

На контуре поперечного сечения стержня имеет место равенство

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}}, \tag{6}$$

Из (6) следует, что вектор $\vec{\tau} = (\tau_{xz},\; \tau_{yz})$ касательного напряжения на контуре поперечного сечения направлен по касательной к ней.

Дифференцируя соотношение (3) по переменной x, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \tag{7}$$

Согласно (7) из уравнения равновесия (2) получим

$$-\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}. \tag{8}$$

Из (8) следует

$$\frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{d\tau_{yz}}{\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} \tag{9}$$

Из соотношений (9) имеем уравнение характеристик

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}dx + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}dy = 0 \tag{10}$$

и соотношения вдоль характеристик

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}d\tau_{yz} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}\right)dx = 0,\;\; \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}d\tau_{yz} - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}\right)dy = 0. \tag{11}$$

Аналогично, дифференцируя соотношение (3) по переменной yи поставляя полученное в уравнение равновесия (2), имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}. \tag{12}$$

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}}=\frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}}=\frac{d\tau_{xz}}{\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} \tag{13}$$

Из соотношений (13) следует, что вдоль характеристик (10) справедливы соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}d\tau_{xz}-\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\right)dx=0,\ \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}d\tau_{xz}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\right)dy=0. \tag{14}$$

Соотношения (10), (11) и (14), в общем случае, проинтегрированы могут быть только численно. Для некоторых случаев условия пластичности (3) можно получить интегралы этих уравнений.

(1) Рассмотрим случай, когда условие пластичности (3) не зависит от x и y:

$$f\left(\tau_{xz},\, \tau_{yz}\right)=0. \tag{15}$$

Согласно (11) вдоль характеристик (10), в этом случае, имеют место соотношения

$$\tau_{yz}=\lambda y+c_{11},\ \tau_{xz}=c_{12}\left(y\right), \tag{16}$$

где $c_{11}=const,\ f\left(c_{12}\left(y\right),\ \lambda y+c_{11}\right)=0$.

Уравнение характеристик (10) примет вид

$$x=\int\frac{b_{11}(y)}{a_{11}(y)}dy+c_1 \tag{17}$$

где $a_{11}\left(y\right)=\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}\left(c_{12}\left(y\right),\ \lambda y+c_{11}\right),\ b_{11}\left(y\right)=\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\left(c_{12}\left(y\right),\ \lambda y+c_{11}\right),\ c_1=const$

Согласно (14) вдоль характеристик (10), в этом случае, имеют место соотношения

$$\tau_{xz}=\lambda x+c_{13},\ \tau_{yz}=c_{14}\left(x\right), \tag{18}$$

где $c_{13}=const,\ f\left(\lambda x+c_{13}, c_{14}\left(x\right)\right)=0$.

Уравнение характеристик (10) примет вид

$$y=\int\frac{a_{12}(x)}{b_{12}(x)}dx+c_2 \tag{19}$$

где $a_{12}\left(x\right)=\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}\left(\lambda x+c_{13}, c_{14}\left(x\right)\right),\ b_{12}\left(x\right)=\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\left(\lambda x+c_{13}, c_{14}\left(x\right)\right),\ c_2=const$

(1) В случае, когда условие текучести (3) не зависит от x

$$f\left(\tau_{xz},\, \tau_{yz},\, y\right)=0, \tag{20}$$

соотношения вдоль характеристик (10), имеют вид

$$\tau_{yz}=\lambda y+c_{21},\ \tau_{xz}=c_{22}\left(y\right), \tag{21}$$

где $c_{21}=const,\ f\left(c_{22}\left(y\right),\ \lambda y+c_{21},\ y\right)=0$.

Уравнение характеристик (10) примет вид

$$x=\int\frac{b_{21}(y)}{a_{21}(y)}dy+c_3 \tag{22}$$

где $a_{21}\left(y\right)=\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}\left(c_{22}\left(y\right),\ \lambda y+c_{21},\ y\right),\ b_{21}\left(y\right)=\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\left(c_{22}\left(y\right),\ \lambda y+c_{21},\ y\right),\ c_3=const$

Согласно (14) вдоль характеристик (10), в этом случае, имеют место соотношения

$$\tau_{xz} = \lambda x + c_{23},\ \tau_{yz} = c_{24}\left(x\right), \tag{23}$$

где $c_{13} = const,\ f\left(\ \lambda x + c_{13}, c_{14}\left(x\right)\right) = 0.$

Аналогично, когда условие текучести (3) не зависит от y

$$f\left(\tau_{xz},\ \tau_{yz},\ x\right) = 0, \tag{24}$$

соотношения вдоль характеристик (10), примут вид

$$\tau_{xz} = \lambda x + c_{23},\ \tau_{xz} = c_{24}\left(x\right), \tag{25}$$

где $c_{23} = const,\ f\left(\ \lambda x + c_{24},\ c_{24}\left(x\right), x\right) = 0.$

Уравнение характеристик (10) примет вид

$$y = \int \frac{a_{22}(x)}{b_{22}(x)} dx + c_4 \tag{26}$$

где $a_{22}\left(x\right) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}\left(c_{24}\left(x\right),\ \lambda x + c_{23},\ x\right),\ b_{22}\left(x\right) = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\left(c_{24}\left(x\right),\ \lambda x + c_{23},\ x\right),\ c_4 = const.$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соколовский В. В. Теория пластичности. Москва: Высшая школа, 1969. 608 с.

[2] Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. Москва: ИЛ, 1956. 398 с.

[3] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. Москва: Наука, 1966. 232 с.

[4] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. Москва: Мир, 1964. 156 с.

[5] Миронов Б. Г. К теории кручения неоднородных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4(22). С. 236–240.

[6] Mironov B. G., Mironov Y. B. Torsion anisotropic and composite cylindrical rod // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1203. p. 012009.

[7] Mironov B. G., Mironov Y. B. Torsion of Non-Uniform Cylindrical and Prismatic Rods Made of Ideally Plastic Material under Linearized Yield Criterion // Mechanics of solids. 2020. Vol. 55. Issue 6. P. 813–819.

[8] Ивлев Д. Д. Механика пластических сред: в 2-х т. — Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. Москва: Физматлит, 2002. 448 с.

[9] Миронов Б. Г., Козлова Л. С. Кручение призматических стержней при действии давления, линейно меняющегося вдоль образующей // Известия РАН. МТТ. 2014. № 3. С. 107–113.

B. G. Mironov[1], *Yu. B. Mironov*[2]

ON THE ISSUE OF TORSION OF INHOMOGENEOUS RODS UNDER THE INFLUENCE OF EXTERNAL PRESSURE

[1] *Russian University of transport, Moscow, Russia*
[2] *Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia*

Abstract. The work is devoted to the investigation of the torsion of inhomogeneous rods made of ideal hard-plastic material under the action of variable external pressure linearly varying along the generatrix rod. The basic relations of the theory of torsion of the investigated rods. The characteristics of the basic relations are found and relationships along characteristics. The integrals of the basic ratios under different conditions of the limiting state of the bar.

Keywords: stress, plasticity, inhomogeneity, torsion, deformation.

REFERENCES

[1] Sokolovskij V. V. Theory of plasticity. Moscow: Higher school, 1969. 608 p. (in Russian).
[2] Prager V., Hoge F. G. Theory of ideally plastic bodies. Moscow: IL, 1956. 398 p. (in Russian).
[3] Ivlev D. D. Theory of ideal plasticity. Moscow: Science, 1966. 232 p. (in Russian).
[4] Ivlev D. D. Mechanics of plastic media: in 2 vol. — V. 2. General issue. Rigid-plastic and elastic-plastic state of bodies. Strengthening. Deformation theories. Complex environment. Moscow: Fizmatlit, 2002. 448 p. (in Russian).
[5] Olshak V., Ryhlevskiy Y., Urbanovskiy B. Theory of plasticity of inhomogeneous bodies. Moscow: Mir, 1964. 156 p. (in Russian).
[6] Mironov B. G. On the theory of torsion of inhomogeneous rods // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ja. Yakovlev. Series: Mechanics of a limit state. 2014. no. 4(22). P. 236–240. (in Russian).
[7] Mironov B. G., Kozlova L. S. Torsion of prismatic rods under the action of pressure varying linearly along the generatrix // Izvestiya RAN. MTT. 2014. no. 3. P. 107–113. (in Russian).
[8] Mironov B. G., Mironov Y. B. Torsion anisotropic and composite cylindrical rod // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1203. p. 012009.
[9] Mironov B. G., Mironov Y. B. Torsion of Non-Uniform Cylindrical and Prismatic Rods Made of Ideally Plastic Material under Linearized Yield Criterion // Mechanics of solids. 2020. Vol. 55. Issue 6. P. 813–819.

Boris Gurjevich Mironov, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Russian University of transport, Moscow, Russia.
Yuri Borisovich Mironov, Candidate of technical Sciences, Moscow technical University of communications and Informatics, Moscow, Russia.