Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 3 (49). С. 47–55

А. Н. Матвеева[1], *С. В. Матвеев*[2]

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛ ПРИ ОТРЫВЕ В СЛУЧАЕ ОБЩЕЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ

[1] *Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия*

[2] *Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия*

Аннотация. Работа посвящена решению общей плоской задачи, связанной с определением предельного состояния тел при отрыве. Уравнения, определяющие условия предельного состояния принимаются функциями, зависящими от среднего давления и направлений отрыва. В результате вычислений были получены характеристические уравнения для двух случаев: при достижении предельных значений отрыва двумя главными напряжениями и при достижении предельного значения отрыва одним главным напряжением. Для двух рассмотренных случаев были получены уравнения характеристик и соотношения вдоль них.

Ключевые слова: предельное состояние, анизотропия, отрыв, уравнения характеристик

DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.006

УДК: 539.374

Введение

В данной работе рассматривается общая плоская задача определения состояния тел в случае отрыва. Предельное состояние тел при отрыве, достигается в двух случаях

$$\sigma_1 = \sigma_2 = p, \;\; \sigma_3 < p,$$
$$\sigma_3 = p, \;\; \sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3, \;\; p = const.$$

Матвеева Алёна Николаевна
`e-mail:` roshtova@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и физики, Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.
Матвеев Сергей Владимирович
`e-mail:` sergio2100@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.09.2021

Задачи определения статически определимого состояния тел в случае отрыва рассматривались в работах [1–3], в работах [4, 5] было получено решение для пространственной задачи определения предельного состояния при отрыве, в случае зависимости функции отрыва от направлений осей главных напряжений и среднего напряжения. Полученные в работе [4] соотношения использовались в работах [6–10], для решения ряда задач определения состояния тел с учетом сопротивления отрыву. В данной работе приводится решение задачи определения статически определимого состояния тела при отрыве в случае общей плоской задачи. Общее плоское напряжённое состояние описывается тремя семействами характеристик. При этом p – функция отрыва, характеризующая свойства материала.

1. Предельное состояние для первого условия отрыва

Для первого случая отрыва будет справедливо выражение

$$\sigma_1 = \sigma_2 = p, \ \ \sigma_3 < p. \tag{1}$$

Запишем выражения для компонент напряжения

$$\begin{gathered} \sigma_x = p + 3\,(\sigma - p)\,n_1^2, \quad \tau_{xy} = 3\,(\sigma - p)\,n_1 n_2, \\ \sigma_y = p + 3\,(\sigma - p)\,n_2^2, \quad \tau_{yz} = 3\,(\sigma - p)\,n_2 n_3, \\ \sigma_z = p + 3\,(\sigma - p)\,n_3^2, \quad \tau_{xz} = 3\,(\sigma - p)\,n_1 n_3, \\ \sigma = \tfrac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right). \end{gathered} \tag{2}$$

Для направляющих косинусов третьего главного напряжения будет справедливо выражение

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,$$

где $n_1 = \cos\alpha$, $n_2 = \cos\beta$, $n_3 = \cos\gamma$ – направляющие косинусы.

Примем

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}, \ \ \sin\varphi = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma},$$

тогда

$$n_1 = \sin\gamma\cos\varphi, \ n_2 = \sin\gamma\sin\varphi, \ n_3 = \cos\gamma. \tag{3}$$

Из (2) с учетом (3) получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= p + 3\,(\sigma - p)\sin^2\!\gamma\cos^2\!\varphi, & \tau_{xy} &= 3\,(\sigma - p)\sin^2\!\gamma\cos\varphi\sin\varphi, \\ \sigma_y &= p + 3\,(\sigma - p)\sin^2\!\gamma\sin^2\!\varphi, & \tau_{yz} &= 3\,(\sigma - p)\sin\gamma\cos\gamma\sin\varphi, \\ \sigma_z &= p + 3\,(\sigma - p)\cos^2\!\gamma, & \tau_{xz} &= 3\,(\sigma - p)\sin\gamma\cos\gamma\cos\varphi. \end{aligned} \tag{4}$$

Функцию отрыва будем считать функцией вида

$$p = p\,(\sigma, \varphi, \gamma)\,. \tag{5}$$

Примем, что компоненты напряжения (4) не зависят от координаты z и определяются значениями

$$\sigma = \sigma\,(x, y)\,, \quad \gamma = \gamma\,(x, y)\,, \quad \varphi = \varphi\,(x, y)\,. \tag{6}$$

С учетом (6) уравнения равновесия запишем в виде

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

Из (4) и (7) с учетом (5), (6) имеем

$$
\begin{aligned}
&\left[\tfrac{\partial p}{\partial\sigma} + 3\left(1-\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}\right)\sin^2\gamma\cos^2\varphi\right]\tfrac{\partial\sigma}{\partial x} + \left[\tfrac{3}{2}\left(1-\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}\right)\sin^2\gamma\sin2\varphi\right]\tfrac{\partial\sigma}{\partial y} + \\
&+\left[\tfrac{\partial p}{\partial\varphi} - 3\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\sin^2\gamma\cos^2\varphi - 3\left(\sigma-p\right)\sin^2\gamma\sin2\varphi\right]\tfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \\
&+\left[-\tfrac{3}{2}\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\sin^2\gamma\sin2\varphi + 3\left(\sigma-p\right)\sin^2\gamma\cos2\varphi\right]\tfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \\
&+\left[\tfrac{\partial p}{\partial\gamma} - 3\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin^2\gamma\cos^2\varphi + 3\left(\sigma-p\right)\sin2\gamma\cos^2\varphi\right]\tfrac{\partial\gamma}{\partial x} + \\
&+\left[-\tfrac{3}{2}\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin^2\gamma\sin2\varphi + \tfrac{3}{2}\left(\sigma-p\right)\sin2\gamma\sin2\varphi\right]\tfrac{\partial\gamma}{\partial y} = 0, \\
&\left[\tfrac{3}{2}\left(1-\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}\right)\sin^2\gamma\sin2\varphi\right]\tfrac{\partial\sigma}{\partial x} + \left[\tfrac{\partial p}{\partial\sigma} + 3\left(1-\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}\right)\sin^2\gamma\sin^2\varphi\right]\tfrac{\partial\sigma}{\partial y} + \\
&+\left[-\tfrac{3}{2}\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\sin^2\gamma\sin2\varphi + 3\left(\sigma-p\right)\sin^2\gamma\cos2\varphi\right]\tfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \\
&+\left[\tfrac{\partial p}{\partial\varphi} - 3\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\sin^2\gamma\sin^2\varphi + 3\left(\sigma-p\right)\sin^2\gamma\sin2\varphi\right]\tfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \\
&+\left[-\tfrac{3}{2}\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin^2\gamma\sin2\varphi + \tfrac{3}{2}\left(\sigma-p\right)\sin2\gamma\sin2\varphi\right]\tfrac{\partial\gamma}{\partial x} + \\
&+\left[\tfrac{\partial p}{\partial\gamma} - 3\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin^2\gamma\sin^2\varphi + 3\left(\sigma-p\right)\sin2\gamma\sin^2\varphi\right]\tfrac{\partial\gamma}{\partial y} = 0, \\
&\left[\tfrac{3}{2}\left(1-\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}\right)\sin2\gamma\cos\varphi\right]\tfrac{\partial\sigma}{\partial x} + \left[\tfrac{3}{2}\left(1-\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}\right)\sin2\gamma\sin\varphi\right]\tfrac{\partial\sigma}{\partial y} + \\
&+\left[-\tfrac{3}{2}\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\sin2\gamma\cos\varphi - \tfrac{3}{2}\left(\sigma-p\right)\sin2\gamma\sin\varphi\right]\tfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \\
&+\left[-\tfrac{3}{2}\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\sin2\gamma\sin\varphi + \tfrac{3}{2}\left(\sigma-p\right)\sin2\gamma\cos\varphi\right]\tfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \\
&+\left[-\tfrac{3}{2}\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin2\gamma\cos\varphi + 3\left(\sigma-p\right)\cos2\gamma\cos\varphi\right]\tfrac{\partial\gamma}{\partial x} + \\
&+\left[-\tfrac{3}{2}\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin2\gamma\sin\varphi + 3\left(\sigma-p\right)\cos2\gamma\sin\varphi\right]\tfrac{\partial\gamma}{\partial y} = 0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Для определения соотношений вдоль характеристик дополним систему уравнений (8) соотношениями

$$
\frac{\partial\sigma}{\partial x}dx + \frac{\partial\sigma}{\partial y}dy = d\sigma,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = d\varphi,\ \frac{\partial\gamma}{\partial x}dx + \frac{\partial\gamma}{\partial y}dy = d\gamma. \tag{9}
$$

Решение системы уравнений (8), (9) будем искать относительно компонент

$$
\frac{\partial\sigma}{\partial x}, \frac{\partial\sigma}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\gamma}{\partial x}, \frac{\partial\gamma}{\partial y}.
$$

Будут справедливы выражения

$$
\frac{\partial\sigma}{\partial x} = \frac{\Delta_1}{\Delta},\quad \frac{\partial\sigma}{\partial y} = \frac{\Delta_2}{\Delta},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\Delta_4}{\Delta},\quad \frac{\partial\gamma}{\partial x} = \frac{\Delta_5}{\Delta},\quad \frac{\partial\gamma}{\partial y} = \frac{\Delta_6}{\Delta}, \tag{10}
$$

где $\Delta,\ \Delta_i,\ \ i = 1,\, 2, ..., 6$ определяются по правилу Крамера. Уравнения характеристик и соотношений вдоль них определим из условий

$$
\Delta = \Delta_i = 0. \tag{11}
$$

Согласно (8), (9), (11), уравнения характеристик получим из кубического уравнения

$$\begin{aligned}
&(dy)^3\left[3ab\sin^2\gamma\cos^3\varphi-\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}b\left(\cos2\varphi\cos2\gamma+2\sin^2\varphi\cos^2\gamma\right)\cos\varphi-\right.\\
&\left.-\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\cos^2\varphi\sin\varphi+\tfrac12\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin2\gamma\cos^3\varphi\right]-dxdy^2\left[9ab\sin^2\gamma\cos^2\varphi\sin\varphi\right.\\
&-\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}b\left(\cos2\varphi\cos2\gamma+2\cos^2\gamma\sin^2\varphi\right)\sin\varphi+\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\cos\varphi\left(\cos^2\varphi-2\sin^2\varphi\right)+\\
&\left.+\tfrac32\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin2\gamma\cos^2\varphi\sin\varphi\right]+(dx)^2dy\left[9ab\sin^2\gamma\sin^2\varphi\cos\varphi\right.\\
&-\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}b\left(2\cos^2\gamma\cos^2\varphi-\cos2\varphi\cos2\gamma\right)\cos\varphi-\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\sin\varphi\left(\sin^2\varphi-2\cos^2\varphi\right)+\\
&\left.+\tfrac32\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin^2\varphi\sin2\gamma\cos\varphi\right]-(dx)^3\left[3ab\sin^2\gamma\sin^3\varphi\right.\\
&-\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}b\sin\varphi\left(\sin^2\varphi\cos2\gamma+\sin^2\gamma\cos^2\varphi\right)+\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\sin^2\varphi\cos\varphi+\\
&\left.+\tfrac12\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin2\gamma\sin^3\varphi\right]=0,
\end{aligned}\tag{12}$$

где $a=1-\frac{\partial p}{\partial\sigma}$, $b=\sigma-p$. Соотношения вдоль характеристик (12) определим из условия $\Delta_5=0$.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left[-Ad\sigma+B\left(d\gamma+d\varphi\right)\right]+\left(\frac{dy}{dx}\right)\left[Cd\sigma-Dd\gamma-Ed\varphi\right]+Fd\gamma=0,\tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
&A=-\tfrac32\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\cos\varphi+b\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}\right)^2\sin\varphi\right)\sin2\gamma,\\
&B=\tfrac32\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}b\sin\varphi+\left(\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\right)^2\cos\varphi+3b^2\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}\sin^2\gamma\cos\varphi\right)\sin2\gamma,\\
&C=\tfrac32\left(-\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\sin\varphi+b\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}\right)^2\cos\varphi\right)\sin2\gamma,\\
&D=-\tfrac92b\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin^2\gamma\sin2\gamma\sin^2\varphi\cos\varphi-\tfrac32b\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}\left(\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}+\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\right)\sin2\gamma\cos\varphi+\\
&+\tfrac32\left(\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\right)^2\sin\varphi\sin2\gamma+3b\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\sin\varphi\cos2\gamma+9b\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\sin^2\gamma\sin^3\varphi+\\
&+9b^2\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}\sin^2\gamma\sin\varphi\left(\sin2\varphi+\tfrac12\sin2\gamma\right)-27ab^2\sin^4\gamma\sin^2\varphi\cos\varphi,\\
&E=\tfrac32\left(-b\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\cos\varphi+\left(\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\right)^2\sin\varphi+3b^2\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}\sin^2\gamma\sin\varphi\right)\sin2\gamma,\\
&F=-9\left(\tfrac12b\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin2\gamma\sin\varphi+b\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\sin^2\varphi\cos\varphi+\right.\\
&\left.+b^2\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}\sin\varphi\left(\sin^2\varphi\cos2\gamma+\sin^2\gamma\cos^2\varphi\right)+3ab^2\sin^2\gamma\sin^3\varphi\right)\sin^2\gamma.
\end{aligned}$$

2. Предельное состояние для второго условия отрыва

Второе условие отрыва запишем в виде

$$\sigma_3=p,\ \ \sigma_1=\sigma_2<\sigma_3.\tag{14}$$

Выражения для компонент напряжения примем в виде

$$\begin{aligned}
&\sigma_x=\tfrac{3\sigma-p}{2}+\tfrac{3(p-\sigma)}{2}\sin^2\gamma\cos^2\varphi, && \tau_{xy}=\tfrac{3(p-\sigma)}{4}\sin^2\gamma\sin2\varphi,\\
&\sigma_y=\tfrac{3\sigma-p}{2}+\tfrac{3(p-\sigma)}{2}\sin^2\gamma\sin^2\varphi, && \tau_{yz}=\tfrac{3(p-\sigma)}{4}\sin2\gamma\sin\varphi,\\
&\sigma_z=\tfrac{3\sigma-p}{2}+\tfrac{3(p-\sigma)}{2}\cos^2\gamma, && \tau_{xz}=\tfrac{3(p-\sigma)}{4}\sin2\gamma\cos\varphi.
\end{aligned}\tag{15}$$

Из (7) и (15) с учетом (5), (6) имеем

$$\begin{gathered}
\left[\tfrac{1}{2}\left(3-\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}\right)+\tfrac{3}{2}\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}-1\right)\sin^2\!\gamma\cos^2\!\varphi\right]\tfrac{\partial\sigma}{\partial x}+\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}-1\right)\times\\
\times\sin^2\!\gamma\sin 2\varphi\tfrac{\partial\sigma}{\partial y}+\left[-\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}+\tfrac{3}{2}\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\sin^2\!\gamma\cos^2\!\varphi-\right.\\
\left.-\tfrac{3}{2}(p-\sigma)\sin^2\!\gamma\sin 2\varphi\right]\tfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\left[\tfrac{3}{4}\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\sin^2\!\gamma\sin 2\varphi+\right.\\
\left.+\tfrac{3}{2}(p-\sigma)\sin^2\!\gamma\cos 2\varphi\right]\tfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\left[-\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}+\tfrac{3}{2}\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin^2\!\gamma\cos^2\!\varphi+\right.\\
\left.+\tfrac{3}{2}(p-\sigma)\sin 2\gamma\cos^2\!\varphi\right]\tfrac{\partial\gamma}{\partial x}+\left[\tfrac{3}{4}\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin^2\!\gamma\sin 2\varphi+\right.\\
\left.+\tfrac{3}{4}(p-\sigma)\sin 2\gamma\sin 2\varphi\right]\tfrac{\partial\gamma}{\partial y}=0,\\
\left[\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}-1\right)\sin^2\!\gamma\sin 2\varphi\right]\tfrac{\partial\sigma}{\partial x}+\\
+\left[\tfrac{1}{2}\left(3-\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}\right)+\tfrac{3}{2}\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}-1\right)\sin^2\!\gamma\sin^2\!\varphi\right]\tfrac{\partial\sigma}{\partial y}+\\
+\left[\tfrac{3}{4}\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\sin^2\!\gamma\sin 2\varphi+\tfrac{3}{2}(p-\sigma)\sin^2\!\gamma\cos 2\varphi\right]\tfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\\
+\left[-\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}+\tfrac{3}{2}\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\sin^2\!\gamma\sin^2\!\varphi+\tfrac{3}{2}(p-\sigma)\sin^2\!\gamma\sin 2\varphi\right]\tfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\\
+\left[\tfrac{3}{4}\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin^2\!\gamma\sin 2\varphi+\tfrac{3}{4}(p-\sigma)\sin 2\varphi\sin 2\gamma\right]\tfrac{\partial\gamma}{\partial x}+\\
+\left[-\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}+\tfrac{3}{2}\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin^2\!\gamma\sin^2\!\varphi+\tfrac{3}{2}(p-\sigma)\sin^2\!\varphi\sin 2\gamma\right]\tfrac{\partial\gamma}{\partial y}=0,\\
\left[\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}-1\right)\sin 2\gamma\cos\varphi\right]\tfrac{\partial\sigma}{\partial x}+\left[\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}-1\right)\sin 2\gamma\sin\varphi\right]\tfrac{\partial\sigma}{\partial y}+\\
+\left[\tfrac{3}{4}\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\sin 2\gamma\cos\varphi-\tfrac{3}{4}(p-\sigma)\sin 2\gamma\sin\varphi\right]\tfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\\
+\left[\tfrac{3}{4}\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\sin 2\gamma\sin\varphi+\tfrac{3}{4}(p-\sigma)\sin 2\gamma\cos\varphi\right]\tfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\\
+\left[\tfrac{3}{2}(p-\sigma)\cos 2\gamma\cos\varphi+\tfrac{3}{4}\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin 2\gamma\cos\varphi\right]\tfrac{\partial\gamma}{\partial x}+\\
+\left[\tfrac{3}{4}\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin 2\gamma\sin\varphi+\tfrac{3}{2}(p-\sigma)\cos 2\gamma\sin\varphi\right]\tfrac{\partial\gamma}{\partial y}=0.
\end{gathered}\tag{16}$$

Уравнения характеристик, согласно (9), (11), (16) найдем из уравнения

$$(\cos\varphi dy-\sin\varphi dx)\left\{\bar A(dy)^2+\bar B dxdy+\bar C\,(dx)^2\right\}=0,\tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}
&\bar A=-\tfrac{1}{6}\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}+3\right)b\sin^2\!\gamma\cos^2\!\varphi-\tfrac{1}{6}b\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}-3\right)+\tfrac{1}{3}\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\sin\varphi\cos\varphi-\\
&-\tfrac{1}{3}\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin\gamma\cos\gamma\cos^2\!\varphi,\\
&\bar B=\tfrac{1}{3}\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\cos 2\varphi+\tfrac{1}{6}\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin 2\gamma\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}+3\right)b\sin^2\!\gamma\sin\varphi\cos\varphi,\\
&\bar C=-\tfrac{1}{3}\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin\gamma\cos\gamma\sin^2\!\varphi-\tfrac{1}{3}\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\sin\varphi\cos\varphi-\tfrac{1}{6}b\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}-3\right)-\\
&-\tfrac{1}{6}\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}+3\right)b\sin^2\!\gamma\sin^2\!\varphi.
\end{aligned}$$

Уравнения характеристик, согласно (11) (17) запишутся в виде

$$\begin{gathered}
\left(\tfrac{dy}{dx}\right)_1=tg\varphi,\\
\left(\tfrac{dy}{dx}\right)_{2,3}=\tfrac{-\bar B\pm\sqrt{\bar D}}{2\bar A},
\end{gathered}\tag{18}$$

где

$$\bar D=\left(\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\right)^2-b^2\left(\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}\right)^2-9\right)\sin^2\!\gamma-b^2\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}-3\right)^2-b\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma}-3\right)\sin 2\gamma.$$

Соотношения вдоль характеристик (18) определим из условия .

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \left[-Ad\sigma + B\left(d\gamma + d\varphi\right)\right] + \left(\frac{dy}{dx}\right)\left[Cd\sigma - Dd\gamma - Ed\varphi\right] + Fd\gamma = 0, \qquad (19)$$

где

$$A = \tfrac{3}{16}\sin 2\gamma\left[b\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma} - 3\right)^2 \sin\varphi - 2\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma} - 3\right)\cos\varphi\right],$$

$$B = \tfrac{3}{16}\sin 2\gamma\left[b^2\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma} - 3\right)\sin^2\gamma\cos\varphi + 2\left(\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\right)^2\cos\varphi - \tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma} - 3\right)\sin\varphi\right],$$

$$C = -\tfrac{3}{16}\sin 2\gamma\left[b\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma} - 3\right)^2\cos\varphi - 2\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma} - 3\right)\sin\varphi\right],$$

$$D = -\tfrac{9}{8}b^2\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma} + 3\right)\sin^4\!\gamma\sin^2\!\varphi\cos\varphi - \tfrac{3}{8}b\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma} - 3\right)\cos 2\gamma\sin\varphi +$$
$$+\tfrac{9}{8}b\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\left(a + 2\sin^2\varphi\right)\sin^2\gamma\sin\varphi - \tfrac{27}{64}b\tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin 2\gamma\left[\tfrac{3}{8}\sin^2\!\gamma\sin^2\!\varphi\cos\varphi +\right.$$
$$\left.+8a\sin^4\!\gamma\sin^4\!\varphi\cos\varphi - \tfrac{4}{9}\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma} - 3\right)\cos\varphi\right] -$$
$$-\tfrac{3}{16}\sin 2\gamma\left[b^2\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma} - 3\right)\sin^2\gamma\sin\varphi - 2\left(\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\right)^2\sin\varphi - \tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma} - 3\right)\cos\varphi\right],$$

$$E = -\tfrac{3}{16}\sin 2\gamma\left[b^2\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma} - 3\right)\sin^2\gamma\sin\varphi - 2\left(\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\right)^2\sin\varphi - \tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma} - 3\right)\cos\varphi\right],$$

$$F = -\tfrac{9}{8}b\sin^2\gamma\sin\varphi\left[\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}\sin 2\varphi + b\left(\tfrac{\partial p}{\partial\sigma} - 3\right)\left(2\cos^2\!\varphi\cos^2\!\gamma - \cos 2\varphi\cos 2\gamma\right) +\right.$$
$$\left.+\ \tfrac{\partial p}{\partial\gamma}\sin 2\gamma\sin^2\!\varphi - 3ab\sin^2\!\gamma\sin^2\!\varphi\right].$$

3. Обсуждение

Для первого случая отрыва из (12) при $p = const$ получим

$$(dy)^3 - 3\,\mathrm{tg}\,\varphi(dy)^2dx + 3\,\mathrm{tg}^2\,\varphi dy(dx)^2 - \mathrm{tg}^3\varphi(dx)^3 = 0, \qquad (20)$$

тогда уравнение характеристик запишутся в виде

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2,3} = \mathrm{tg}\,\varphi. \qquad (21)$$

В случае $p = const$ выражение (13) может быть записано в виде

$$d\gamma\left(\cos\varphi dy - \sin\varphi dx\right) = 0. \qquad (22)$$

Из уравнения характеристик для первого условия отрывы (21) при $p = const$, получим

$$y - x\,\mathrm{tg}\,\varphi = const. \qquad (23)$$

Очевидно, что при $p = const$, согласно (5) будет справедливо $\varphi = const$. Анализируя выражение (22) можно получить тривиальное решение $\gamma = const$. Согласно (23), в качестве характеристических поверхностей выступают плоскости, чьи проекции на плоскость Oxy образуют прямые. Для прямых возможны два случая, в первом случае будет неизменна величина угла наклона φ первого главного напряжения σ_1 к оси Ox, во втором случае неизменным будет угол наклона третьего главного напряжения σ_3 к оси Oz. Если принять, что функция отрыва p зависит только от среднего напряжения

$p = p(\sigma)$, тогда из (12) получим $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \operatorname{tg}\varphi$. Два других решения определяются из уравнения

$$3a\sin^2\gamma(dy\cos\varphi - dx\sin\varphi)^2 -$$
$$-\frac{\partial p}{\partial\sigma}\left[\left(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma\cos 2\varphi\right)(dy)^2 + \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos 2\gamma\right)(dx)^2\right] = 0.$$

В случае, если функция отрыва не зависит от среднего напряжения и находится в зависимости от направления, $p = p\,(\varphi, \gamma)$, с учетом $\frac{\partial p}{\partial\sigma} = 0$ из (12) получим

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \operatorname{tg}\varphi, \left(\frac{dy}{dx}\right)_3 = \frac{3\,(\sigma - p)\,tg\varphi\sin^2\gamma + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial\gamma}\sin 2\gamma\operatorname{tg}\varphi + \frac{\partial p}{\partial\varphi}}{3\,(\sigma - p)\sin^2\gamma + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial\gamma}\sin 2\gamma - \frac{\partial p}{\partial\varphi}\operatorname{tg}\varphi}.$$

Для второго случая отрыва, при $p = const$ из (18) следует

$$\begin{aligned} &\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \operatorname{tg}\varphi, \\ &\left(\frac{dy}{dx}\right)_{2,3} = \frac{\sin^2\gamma\sin\varphi\cos\varphi \pm \sqrt{\sin^2\gamma - 1}}{\sin^2\gamma\cos^2\varphi - 1}. \end{aligned} \qquad (24)$$

Из (24) при условии $\sin^2\gamma = 1$ получим выражения для характеристических поверхностей

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{2,3} = -\operatorname{ctg}\varphi. \qquad (25)$$

Учитывая выражение $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = tg\varphi$, при $p = const$ уравнение (19) запишем в виде

$$\cos\gamma d\sigma - b\sin\gamma\cos^2\varphi d\gamma = 0. \qquad (26)$$

При $\sin^2\gamma = 1,\ \cos\gamma = 0$ из уравнения (26) следует $\gamma = const$.

Заключение

В работе были определены выражения для определения предельного состояния общей плоской задачи при условии зависимости функции отрыва от среднего давления σ и направления осей напряжения. На основании полученных общих соотношений были рассмотрены частные случаи, зависимости функции отрыва только от среднего гидростатического давления: только от направления главных осей тензора напряжений и случай $p = const$. Варьируя данными параметрами, можно задавать разные анизотропные свойства материала. Таким образом, в работе получены общие соотношения для статически определимых плоских задач предельного состояния при отрыве для анизотропных сред.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. Наука: Москва, 1966. 232 с.

[2] Предельное состояние деформируемых тел и горных пород / Д.Д. Ивлев, Л.А. Максимова, Р.И. Непершин [и др.]. ФИЗМАТЛИТ: Москва, 2008. 832 с.

[3] Ивлев Д.Д., Матченко Н.М. О преддельном состоянии при отрыве // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород. Сборник статей к 75-летию Е.И. Шемякина. 2006. С. 288–290.

[4] Роштова А. Н. Об общих предельных условиях при отрыве для сжимаемых анизотропных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 2. С. 131–134.

[5] On limit statically determinated detachment conditions for compressible anisotropic material / A.N. Matveeva, S.V. Matveev, S.V. Tikhonov [и др.] // Journal of Physics: Conference Series. "1st International Conference on Physics, Mathematics and Statistics, ICPMS 2018". 2018. c. 012037.
[6] Матвеев С.В., Матвеева А.Н., Рыбакова Т.И. Равномерное растяжение тонкой анизотропной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 4(34). С. 59–65.
[7] Матвеев С.В., Матвеева А.Н., Тихонов С.В. Равномерное растяжение тонкой анизотропной пластины с круговым отверстием, подкрепленной включением, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 4(34). С. 95–103.
[8] Равномерное растяжение тонкой неоднородной пластины с круговым отверстием, при условии предельного сопротивления отрыву / В.Г. Ефремов, С.В. Матвеев, А.Н. Матвеева [и др.] // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 3(41). С. 95–103.
[9] Матвеев С.В., Матвеева А.Н., Тихонов С.В. Равномерное растяжение многослойной тонкой анизотропной пластины с эллиптическим отверстием, при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 1(39). С. 94–101.
[10] Матвеев С.В., Матвеева А.Н. Двуосное растяжение тонкой пластины из упругопластического материала при условии сопротивления отрыву // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 4(46). С. 182–189.

A. N. Matveeva[1], *S. V. Matveev*[2]

THE LIMITING STATE OF BODIES DURING SEPARATION IN THE CASE OF THE GENERAL PLANE PROBLEM

[1] *I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

[2] *I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

Abstract. The work is devoted to the solution of the general plane problem related to the determination of the limiting state of bodies during separation. The equations defining the conditions for the limiting state are taken as functions that depend on the average pressure and directions of separation. As a result of calculations, the characteristic equations were determined for two cases: when the limiting values of separation by two main stresses are reached and when the limiting value of separation by one main stress is reached. For the two considered cases, equations of characteristics and relations along them were obtained.

Keywords: limiting state, anisotropy, separation, equations of characteristics.

REFERENCES

[1] Ivlev D. The theory of ideal plasticity. Science: Moscow, 1966. 232 p.
[2] Limit state of deformable bodies and rocks / D.D. Ivlev, L.A. Maksimova, R.I. Nepershin [и др.]. FIZMATLIT: Moscow, 2008. 832 c.

Matveeva Alena Nikolaevna, Ph.D. Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.
Matveev Sergey Vladimirovich, Ph.D. Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

[3] Ivlev D., Matchenko N. About breakaway limit state // Problems in the mechanics of deformable solids and rocks. Collection of articles dedicated to the 75th anniversary of E.I. Shemyakin. 2006. P. 288–290.

[4] Roshtova A. On general separation limiting conditions for compressible anisotropic media // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2007. no. 2. P. 131–134.

[5] On limit statically determinated detachment conditions for compressible anisotropic material / A. Matveeva, S. Matveev, S. Tikhonov et al. // Journal of Physics: Conference Series. "1st International Conference on Physics, Mathematics and Statistics, ICPMS 2018". 2018. p. 012037.

[6] Matveev S.V.and Matveeva A., Rybakova T. Uniform stretching of a thin anisotropic plate weakened by an elliptical hole, subject to pull-off resistance // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2017. no. 4 (34). P. 59–65.

[7] Matveev S.V.and Matveeva A., Tikhonov S. Uniform stretching of a thin anisotropic plate with a circular hole, reinforced by inclusion, subject to pull-off resistance // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2017. no. 4 (34). P. 95–103.

[8] Uniform stretching of a thin non-uniform plate with a circular hole, subject to ultimate pull-off strength / V. Efremov, S. Matveev, A. Matveeva et al. // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2019. no. 3 (41). P. 95–103.

[9] Matveev S., Matveeva A., Tikhonov S. Uniform stretching of a multilayer thin anisotropic plate with an elliptical hole, subject to tear resistance // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2019. no. 1 (39). P. 94–101.

[10] Matveev S.V., Matveeva A.N. Biaxial tension of a thin plate made of elastoplastic material under the condition of resistance to separation // Bulletin of the Chuvash state pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev Series: Mechanics of Limit State. 2020. № 4(46). C. 182–189.