Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 3 (49). С. 56–65

В. А. Ковалев, Е. В. Мурашкин

О ПОСТАНОВКЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ ПРОИЗВОДСТВА ТКАНЫХ МАТЕРИАЛОВ

[1]*Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия*

[2]*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

Аннотация. В статье обсуждаются проблемы постановка краевых задач при моделировании процессов аддитивного производства 3D материала, при учете наличия в нем дополнительных выделенных направлений (выкладки волокон в тканых материалах, арматуры в бетонных конструкциях, биоволокон в мышечной ткани и т.д.). Выводится общая форма тензорного соотношения на поверхности наращивания, при учете дополнительного выделенного направления. Определяется необходимая система независимых аргументов определяющей тензорной функции на поверхности наращивания в рассматриваемом случае. Определяется полный набор совместных рациональных инвариантов тензора напряжений и характерных директоров. Дается инвариантно–полная формулировка определяющих соотношений на поверхности наращивания. Предложены постановки краевых задач, моделирующих процессы синтеза тканых 3D материалов. Полученные дифференциальные ограничения конкретизируются для ортогональных систем координат, учитывающих геометрию процесса наращивания.

Ключевые слова: определяющая тензорная функция, псевдотензор, поверхность наращивания, тканый 3D-материал, микрополярная среда, рациональный инвариант

DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.009

УДК: 539.374

Вводные замечания. Современные методы проектирования и изготовления изделий и конструкций сложной формы основаны на различных технологических

Ковалев Владимир Александрович
e-mail: vlad_koval@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.
Мурашкин Евгений Валерьевич
e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.02.2021

процессах обработки материалов (ламинирование, фотополимеризация, стереолитография, намотка, наплавка, замораживание, абляция, сегментация, фронтальное и послойное отверждение). [1]. Эти производственные процессы аддитивных технологий связаны с синтезом изделий путем последовательного добавления материала на поверхность произвольной (часто ненормальной) формы. При этом следует отметить, что рассматриваемые ростовые процессы не включают процессы так называемого объемного роста. [2, 3]: образование твердого компонента в процессе химической реакции, рост биологических тканей, костей, естественные образования фруктов [4]. В то же время процедура выбора адекватных граничных условий на поверхности наращивания является актуальной фундаментальной проблемой современной механики сплошных сред и прикладной математики. Граничные условия играют важную роль в математических моделях растущих твердых тел. Кроме того, трехмерные материалы, используемые в аддитивном производстве, а также конечные продукты, обладают микроструктурными особенностями и механическими свойствами, которые лучше всего описываются асимметричными теориями механики сплошных сред. Следовательно, для разработки математических моделей таких технологических процессов обработки 3D-материалов и изготовления 3D-изделий необходимо использовать механику роста твердого тела и формализм неравновесной термодинамики в сочетании с подходами асимметричных теорий.

Относительные тензоры естественным образом возникают в математических моделях микрополярного материала. В частности, это: вектор микровращения, тензор кривизны, вектор и тензор напряжений пар, микроинерция, пары тел. Литературный поиск показывает, что применение относительных тензоров в теориях механики сплошных сред не имеет широкого распространения, несмотря на глубокие математические исследования (алгебра, теория инвариантов и дифференцирование относительных тензоров). [5–13].

Решение прикладной задачи механики роста твердого тела иногда является сложной и трудоемкой процедурой. [14, 15]. Существенной особенностью постановки краевых задач в рамках механики роста является постановка граничных условий на границе раздела между исходным материалом и добавляемой частью. [16].

1. Условия на поверхности наращивания в материалах с характерными выделенными направлениями. На протяжении всей статьи будем применять описание в эйлеровых координатах. Терминология и обозначения в основном соответствуют аналогичным в работах [17–20]. Определим распространяющуюся поверхность наращивания Σ в трехмерном евклидовом пространстве неявным уравнением

$$t = \underset{*}{\tau}(x^i). \tag{1}$$

На элемент поверхности наращивания dS с вектором единичной нормали n_i действуют векторы поверхностных сил $\mathbf{t}$ и моментов $\overset{[-1]}{\mathbf{m}}$ (см. рис. 1), выселяющихся через компоненты тензора актуальных силовых $\boldsymbol{\sigma}$ и моментных $\overset{[-1]}{\boldsymbol{\mu}}$ напряжений согласно формулам

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \overset{[-1]}{\mathbf{m}} = \mathbf{n} \cdot \overset{[-1]}{\boldsymbol{\mu}}. \tag{2}$$

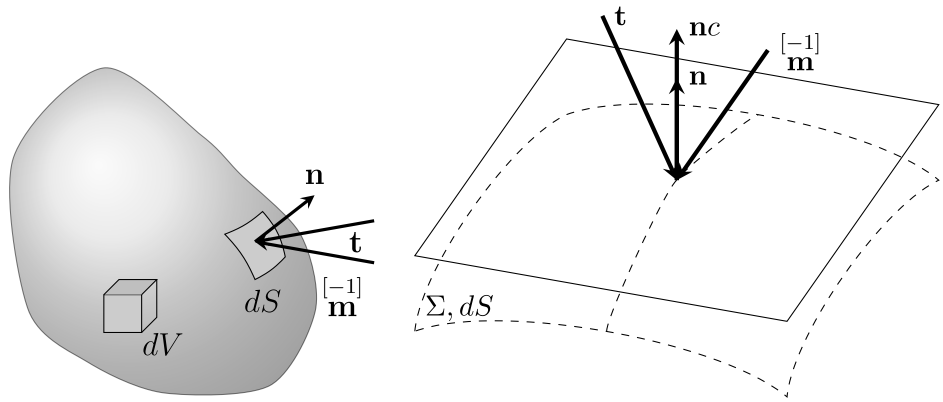

Рис. 1. Caption

Тогда единичный вектор нормали n_i на наращиваемой поверхности Σ направленный в сторону ее распространения, связан с пространственным градиентом (1)

$$n_i = c\,\partial_i \underset{*}{\tau}, \quad c = |\boldsymbol{\nabla} \underset{*}{\tau}|^{-1} \quad (t = \underset{*}{\tau}), \tag{3}$$

где c — линейная скорость распространения поверхности наращивания в нормальном направлении n_k.

Ранее в работах подробно обсуждался вывод краевых условий на поверхности наращивания (см., Например, [17–19]). Приведем здесь лишь окончательные формулы для актуальных компонент тензора силовых напряжений σ^{ij}

$$\sigma^{ij} = \int\limits_{\underset{*}{\tau}+0}^{t} [\partial.\sigma^{ij}(x^s, t')]dt' + \mathcal{S}^{ji} + \underset{*}{\sigma}^{ij}(x^s), \tag{4}$$

$$\mathcal{S}^{ij} = \int\limits_{\underset{*}{\tau}-0}^{\underset{*}{\tau}+0} [\partial.\sigma^{ij}(x^s, t')]dt', \tag{5}$$

$$c[\nabla_j \underset{*}{\sigma}^{ji}(x^s) + \nabla_j \mathcal{S}^{ji} + \underset{*}{X}^i(x^s)] - n_j \partial.\sigma^{ji}(x^s, t) = 0 \quad (t = \underset{*}{\tau} + 0). \tag{6}$$

и для компонент тензора моментных напряжений

$$\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k} = \int\limits_{\underset{*}{\tau}+0}^{t} [\partial.\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(x^s, t')]dt' + \overset{[-1]}{\mathcal{M}}{}^{i\cdot}_{\cdot k} + \underset{*}{\overset{[-1]}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(x^s), \tag{7}$$

$$\overset{[-1]}{\mathcal{M}}{}^{i\cdot}_{\cdot k} = \int\limits_{\underset{*}{\tau}-0}^{\underset{*}{\tau}+0} [\partial.\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(x^s, t')]dt', \tag{8}$$

$$c[\nabla_i \underset{*}{\overset{[-1]}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(x^s) + \nabla_i \overset{[-1]}{\mathcal{M}}{}^{i\cdot}_{\cdot k} - 2\underset{*}{\overset{[-1]}{\tau}}{}_k + \underset{*}{\overset{[-1]}{Y}}{}_k] - n_i \partial.\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(x^s, t) = 0 \quad (t = \underset{*}{\tau} + 0). \tag{9}$$

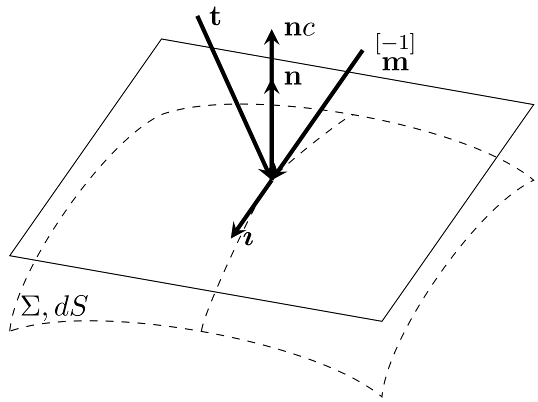

Рис. 2. Геометрическая визуализация векторов действующих на плоский касательный элемент T к поверхности наращивания Σ.

В приведенных выше уравнениях (4)–(9) введены следующие обозначения: $\mathcal{S}^{ji}$ — интеграл, связанный со скачком напряжений, $\underset{*}{\sigma}^{ij}(x^s) = \sigma^{ij}(x^s, t)|_{t=\underset{*}{\tau}(x^s)-0}$ — компоненты тензора напряжений, соответственно, вычисленные в момент $t = \underset{*}{\tau}(x^s) - 0$ прямо перед включением элемента в основное твердое тело, $\underset{*}{X}^i(x^s) = X^i(x^s, t)\big|_{t=\underset{*}{\tau}(x^s)+0}$. Момент $t = \underset{*}{\tau}(x^s) + 0$ соответствует моменту сразу после прикрепления элемента к поверхности наращивания, $\overset{[-1]}{\mathcal{M}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ — интеграл, связанный со скачком моментных напряжений, $\underset{*}{\overset{[-1]}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(x^s) = \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}(x^s, t)|_{t=\underset{*}{\tau}(x^s)-0}$ компоненты тензора моментных напряжений, вычисленные во время $t = \underset{*}{\tau}(x^s) - 0$.

2. Тензорные функции связи актуальных силовых и моментных напряжений с напряжениями в наращиваемом элементе с учетом выделенного направления. В процессах производства тканых материалов можно выделить харатерные направления на поверхности наращивания. Обозначим направляющий вектор такого направления $\boldsymbol{\imath}$ (см. рис. 2), где черный круг означает момент создания наращиваемого элемента. В этом случае тензорные функции связи силовых $\underset{*}{\sigma}^{ij}$ и моментных напряжений $\underset{*}{\overset{[-1]}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ с актуальными напряжения и моментами на поверхности наращивания можно принять в форме

$$\underset{*}{\sigma}^{ij} = \mathfrak{F}^{ij}(\sigma^{ij}, \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot j}, n_j, \imath_j, \ldots), \quad \underset{*}{\overset{[-1]}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot j} = \overset{[-1]}{\mathfrak{Z}}{}^{i\cdot}_{\cdot j}(\sigma^{ij}, \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot j}, n_j, \imath_j, \ldots), \tag{10}$$

и если возможно обратно

$$\underset{*}{\sigma}^{ij} = \mathfrak{K}^{ij}(\underset{*}{\sigma}^{ij}, \underset{*}{\overset{[-1]}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot j}, n_j, \imath_j, \ldots), \quad \underset{*}{\overset{[-1]}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot j} = \overset{[-1]}{\mathfrak{M}}{}^{i\cdot}_{\cdot j}(\sigma^{ij}, \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot j}, n_j, \imath_j, \ldots), \tag{11}$$

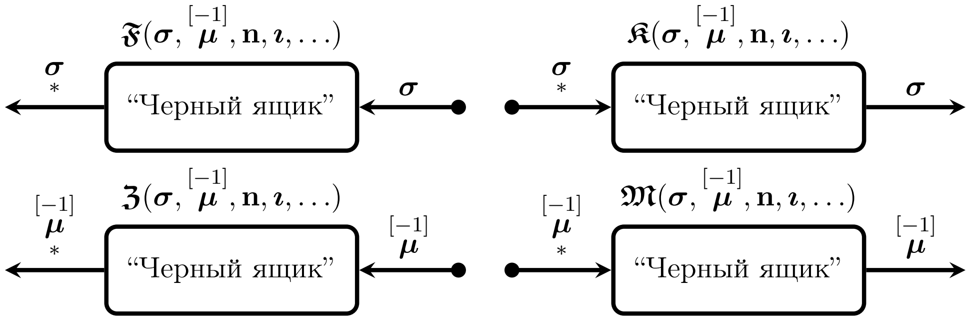

Рис. 3. Идея физического принципа “Черного ящика” в механике наращиваемых тел.

Соотношения (10) и (11) необходимо уточнить путем экспериментального определения функций $\mathfrak{F}_{ij}$, $\overset{[-1]}{\mathfrak{Z}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$, $\mathfrak{K}_{ij}$ и $\overset{[-1]}{\mathfrak{M}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$. Схематически процесс определения необходимых параметров процесса наращивания изображен на рис. 3. В этом случае под “черным ящиком” понимаются возможные изменения параметров напряженно деформированного состояния материала во временном промежутке от момента создания наращиваемого элемента до момента его присоединения к основному телу, т.е. во временном интервале $\underset{*}{\tau}-0 \leq t \leq \underset{*}{\tau}+0$. “Черный ящик” может быть связан с различными физическими явлениями. В частности, тензорные функции $\mathfrak{F}_{ij}$, $\overset{[-1]}{\mathfrak{Z}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$, $\mathfrak{K}_{ij}$ и $\overset{[-1]}{\mathfrak{M}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ при производстве тканых материалов могут зависеть от подвижных выделенных направлений, связанных с распространяющейся поверхностью наращивания. Физический смысл дополнительных направляющих может быть связан с характерными направлениями укладки волокон в тканых композитных материалах, направлениях армирования более жесткими волокнами, направлениями наматывания нитей в бобину и т. д. Важное ограничение, накладываемое на тензорные функции $\mathfrak{F}_{ij}$, $\overset{[-1]}{\mathfrak{Z}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$, $\mathfrak{K}_{ij}$ и $\overset{[-1]}{\mathfrak{M}}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$, которое следует принять — является инвариантность их аргументов относительно поворотов подвижной системы координат вокруг единичного вектора нормали n_j к поверхности наращивания. В этом случае необходимо выбрать систему совместных инвариантов тензорных σ^{ij}, $\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot j}$ и векторных $n_j, \imath_j$ величин, удовлетворяющих условию ротационной инвариантности относительно вектора n_j.

3. Способы построения систем совместных алгебраических относительных инвариантов тензора второго ранга и вектора. Как видно из обсуждения в предыдущем разделе, для дальнейшей конкретизации определяющих тензорных функций на поверхности наращивания необходимо определить систему совместных инвариантов тензорных σ^{ij}, $\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot j}$ и векторных $n_j, \imath_j$. В дальнейшем разумно учесть, что единичный вектор нормали n_i и касательный к поверхности наращивания вектор $\imath_j$ определяют ее локальную. Введем специальную ортонормированную систему координат, с базисными векторами: единичным вектором нормали n_i касательным вектором $\imath_j$ и вектором в касательной плоскости к поверхности наращивания, который можно определить через векторы n_i и $\imath_j$ согласно правилу

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\imath}. \tag{12}$$

В этом случае система трех взаимно-ортогональных векторов $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\imath}$ и $\boldsymbol{\tau}$ будет правоориентированной.

Алгоритм построения систем совместных рациональных инвариантов подробно рассмотрены в монографии [8]. Следуя методологии, изложенной в [8], для рассматриваемого здесь случая получим рациональную систему алгебраических рациональных инвариантов тензора силовых напряжений σ^{ij} и векторов n_k и $\imath_i$

$$\begin{gathered}
\mathbf{t}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}, \quad \underset{2}{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}^2\cdot\mathbf{n}, \quad \mathbf{t}\cdot\mathbf{t}, \quad \mathbf{t}_\perp\cdot\mathbf{t}_\perp, \\
\mathbf{t}\cdot\underset{2}{\mathbf{t}}, \quad \mathbf{t}_\perp\cdot\underset{2}{\mathbf{t}}_\perp, \quad \underset{2}{\mathbf{t}}\cdot\underset{2}{\mathbf{t}}, \quad \underset{2}{\mathbf{t}}_\perp\cdot\underset{2}{\mathbf{t}}_\perp.
\end{gathered} \tag{13}$$

тогда для псевдоаффинора моментных напряжений $\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ и векторов n_k и $\imath_i$ записывается в виде

$$\begin{gathered}
\overset{[-1]}{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\overset{[-1]}{\boldsymbol{\mu}}\cdot\mathbf{n}, \quad \underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\overset{[-1]}{\boldsymbol{\mu}}\cdot\overset{[-1]}{\boldsymbol{\mu}}\cdot\mathbf{n}, \quad \overset{[-1]}{\mathbf{m}}\cdot\overset{[-1]}{\mathbf{m}}, \quad \overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp\cdot\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp, \\
\overset{[-1]}{\mathbf{m}}\cdot\underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}}, \quad \overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp\cdot\underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}}_\perp, \quad \underset{2}{\mathbf{m}}\cdot\underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}}, \quad \underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}}_\perp\cdot\underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}}_\perp.
\end{gathered} \tag{14}$$

Совместные инварианты тензоров σ^{ij} и $\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ определяются согласно

$$\begin{gathered}
\mathbf{t}\cdot\overset{[-1]}{\mathbf{m}}, \quad \mathbf{t}_\perp\cdot\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp \quad \mathbf{t}\cdot\underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}}, \quad \mathbf{t}_\perp\cdot\underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}}_\perp, \\
\overset{[-1]}{\mathbf{m}}\cdot\underset{2}{\mathbf{t}}, \quad \overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp\cdot\underset{2}{\mathbf{t}}_\perp, \quad \underset{2}{\mathbf{t}}\cdot\underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}}, \quad \underset{2}{\mathbf{t}}_\perp\cdot\underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}}_\perp.
\end{gathered} \tag{15}$$

При построении системы совместных инвариантов (13)–(15) векторы $\mathbf{t}_\perp$, $\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp$, $\underset{2}{\mathbf{t}}_\perp$ и $\underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}}_\perp$ есть проекции векторов $\mathbf{t}$, $\overset{[-1]}{\mathbf{m}}$, $\underset{2}{\mathbf{t}}$ и $\underset{2}{\overset{[-2]}{\mathbf{m}}}$, соответственно, в касательную плоскость к поверхности наращивания.

Очевидно, что система совместных алгебраических рациональных относительных инвариантов, представленная уравнениями (13)–(15) является полной. Вместе с этим совместные инварианты, входящие в нее, не являются независимыми и частично могут быть исключены из рассмотрения с помощью рациональных сизигий. Более того, совместные алгебраические рациональные инварианты высоких порядков, включающие кубы и биквадраты тензора силовых и псевдотензора моментных напряжений следует исключить в силу теоремы Гамильтона–Кэли [8].

Таким образом, неприводимая полная система совместных алгебраических рациональных относительных инвариантов тензора силовых напряжений σ^{ij}, псевдотензора моментных напряжений $\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ и векторов n_k и $\imath_i$ может быть принята в виде

$$\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}, \quad \mathbf{t}\cdot\mathbf{t}, \quad \overset{[-1]}{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{n}, \quad \overset{[-1]}{\mathbf{m}}\cdot\overset{[-1]}{\mathbf{m}}, \quad \mathbf{t}\cdot\overset{[-1]}{\mathbf{m}}, \quad \mathbf{t}_\perp\cdot\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp. \tag{16}$$

Отметим еще раз, что система инвариантов (16) не чувствительна к вращениям локальной ортогональной системы координат с базисными ортами n_i, $\imath_i$, τ_i вокруг единичного орта n_i.

4. Определяющие тензорные функции в специфической ортогональной системе координат. Рассмотрим инвариантно–геометрическую интерпретацию случая в специальной ортогональной системе координат с ортами n_i, $\imath_i$, τ_i. Пусть на поверхности наращивания известны поверхностные усилия $\mathbf{t}$ и моменты $\overset{[-1]}{\mathbf{m}}$. В этом случае, определяющие тензорные функции (10) на поверхности наращивания в терминах полной системы совместных инвариантов (16) для сужения на двумерный плоский касательный элемент T тензора $\overset{*}{\boldsymbol{\tau}}$, примет вид

$$\underset{*}{\sigma}^{ij} = \overset{[-1]}{\mathfrak{F}}{}^{ij}(\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}, \mathbf{t}\cdot\mathbf{t}, \overset{[-1]}{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{n}, \overset{[-1]}{\mathbf{m}}\cdot\overset{[-1]}{\mathbf{m}}, \mathbf{t}\cdot\overset{[-1]}{\mathbf{m}}, \mathbf{t}_\perp\cdot\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp). \tag{17}$$

$$\overset{[-1]}{\underset{*}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot j} = \overset{[-1]}{\mathfrak{Z}}{}^{i\cdot}_{\cdot j}(\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}, \mathbf{t}\cdot\mathbf{t}, \overset{[-1]}{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{n}, \overset{[-1]}{\mathbf{m}}\cdot\overset{[-1]}{\mathbf{m}}, \mathbf{t}\cdot\overset{[-1]}{\mathbf{m}}, \mathbf{t}_\perp\cdot\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp). \tag{18}$$

Для проекций векторов $\mathbf{t}_\perp$ и $\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp$ в касательной плоскости T к поверхности наращивания следует

$$\begin{aligned} &|\mathbf{t}_\perp|^2 = |\mathbf{t}_\perp\cdot\boldsymbol{\imath}|^2 + |\mathbf{t}_\perp\cdot\boldsymbol{\tau}|^2, \\ &|\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp|^2 = |\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp\cdot\boldsymbol{\imath}|^2 + |\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp\cdot\boldsymbol{\tau}|^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Квадраты совместных инвариантов и длины векторов (16) и длины проекций (19) легко вычисляются через актуальные значения $\mathbf{t}$ и $\overset{[-1]}{\mathbf{m}}$ на поверхности наращивания, т.е. через актуальные компоненты силовых и моментных напряжений, согласно формулам

$$\begin{aligned} &|\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}| = |\sigma_{33}|, \quad |\mathbf{t}_\perp\cdot\boldsymbol{\imath}|^2 = \sigma_{31}^2, \quad |\mathbf{t}_\perp\cdot\boldsymbol{\tau}|^2 = \sigma_{32}^2, \\ &|\overset{[-1]}{\mathbf{m}}\cdot\mathbf{n}| = |\mu_{33}|, \quad |\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp\cdot\boldsymbol{\imath}|^2 = \mu_{31}^2, \quad |\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp\cdot\boldsymbol{\tau}|^2 = \mu_{32}^2, \\ &|\mathbf{t}\cdot\mathbf{t}| = |\sigma_{3s}\sigma_{s3}| = |\sigma_{31}\sigma_{13} + \sigma_{32}\sigma_{23} + \sigma_{33}^2|, \\ &|\overset{[-1]}{\mathbf{m}}\cdot\overset{[-1]}{\mathbf{m}}| = |\mu_{3s}\mu_{s3}| = |\mu_{31}\mu_{13} + \mu_{32}\mu_{23} + \mu_{33}^2|. \end{aligned} \tag{20}$$

Определяющие тензорные функции (17) и (18) на поверхности наращивания с учетом выражений (20) и приняв следующие обозначения для инвариантов,

$$\begin{aligned} &I = |\sigma_{33}|, \quad II = \sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2, \quad III = |\sigma_{31}\sigma_{13} + \sigma_{32}\sigma_{23} + \sigma_{33}^2|, \\ &IV = |\mu_{33}|, \quad V = \mu_{31}^2 + \mu_{32}^2, \quad VI = |\mu_{31}\mu_{13} + \mu_{32}\mu_{23} + \mu_{33}^2|, \\ &VII = |\sigma_{33}\mu_{33}|. \end{aligned} \tag{21}$$

можно выписать в форме

$$\underset{*}{\sigma}^{ij} = \overset{[-1]}{\mathfrak{F}}{}^{ij}(I, II, III, IV, V, VI, VII). \tag{22}$$

$$\overset{[-1]}{\underset{*}{\mu}}{}^{i\cdot}_{\cdot j} = \overset{[-1]}{\mathfrak{Z}}{}^{i\cdot}_{\cdot j}(I, II, III, IV, V, VI, VII). \tag{23}$$

Граничные условия в форме дифференциальных ограничений на поверхности наращивания (6), (9) обладают необходимыми свойствами чувствительности к геометрии поверхности наращивания и характерным направлениям выкладки материала в процессах намотки нитей или производстве тканных композитов.

5. Заключение. В статье обсуждаются проблемы постановки граничных условий и конкретизации определяющих соотношений при моделировании процессов аддитивного производства 3D материала, при учете наличия в нем дополнительных выделенных направлений (выкладки волокон в тканых материалах, арматуры в бетонных конструкциях, биоволокон в мышечной ткани и т.д.). Приведена общая форма тензорного соотношения на поверхности наращивания, при учете дополнительного выделенного направления. Определена необходимая система независимых аргументов определяющей тензорной функции на поверхности наращивания в указанном случае. Определен полный набор совместных рациональных инвариантов тензора силовых и моментных напряжений и характерных директоров. Дана инвариантно–полная формулировка определяющих соотношений на поверхности наращивания. Предложены постановки краевых задач, моделирующих процессы синтеза тканых 3D материалов. Полученные дифференциальные ограничения конкретизируются для специальных ортогональных систем координат, учитывающих геометрию процесса наращивания.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Berman B. 3-D printing: The new industrial revolution // Business Horizons. 2012. Vol. 55. P. 155–162.

[2] Epstein M., Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // International Journal of Plasticity. 2000. Vol. 16. P. 951–978.

[3] Maugin G. A. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials // Journal of Mechanics of Materials and Structures. 2009. p. 731–741.

[4] Goriely A. The mathematics and mechanics of biological growth. New York: Springer, 2017. xxii + 646 p.

[5] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377.

[6] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: Cambridge University Press, 1927. 102 c.

[7] Levi-Civita T. The absolute differential calculus (calculus of tensors). London & Glasgow: Blackie & Son Limited, 1927. 450 p.

[8] Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen: P. Noordhoff, 1964.

[9] Einstein A. General Relativity; an Einstein Centenary Survey. Cambridge: Cambridge University Press, 1979. 937 p.

[10] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1951. 434 p.

[11] Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p.

[12] Synge J. L. S. A. Tensor calculus. New York: Courier Corporation, 1978. Vol. 5. 334 p.

[13] Das A. J. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Springer Science & Business Media, 2007. xii+290 p.

[14] Southwell R. V. An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists. London: Oxford Univ. Press, 1936.

[15] Kovalev V. A. R. Y. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2014. Vol. 14. P. 199–209.

[16] Arutyunyan N. K., Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // J. Appl. Math. Mech. 1984. Vol. 48. P. 1–10.

[17] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. 2019. Vol. 23. P. 646–656.

[18] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном классе определяющих уравнений на растущей поверхности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 3(41). С. 11–29.

[19] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids // Mechanics of Solids. 2019. Vol. 54. P. 1157–1164.

[20] Мурашкин Е. В. О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3d материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 1(47). С. 114–121.

V. A. Kovalev[1], *E. V. Murashkin*[2]

ON THE STATEMENTS OF BOUNDARY CONDITIONS IN MODELS OF THE WOVEN MATERIALS PRODUCTION

[1]*Moscow City University of Management, Moscow, Russia*
[2]*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia*

Abstract. The article discusses the problem of boundary value problems in models of the additive production processes of a 3D material, taking into account the presence of additional selected directions in it (laying out fibers in woven materials, reinforcement in concrete structures, biofibers in muscle tissue, etc.). The general form of the tensor relation on the growing surface is shown, taking into account the additional selected direction. The necessary system of independent arguments of the constitutive tensor function on the growing surface in the considered case is determined. A complete set of joint rational invariants of the stress tensor and characteristic directors is determined. An invariant-complete formulation of the constitutive relations on the growing surface is given. The formulation of boundary value problems that simulate the processes of synthesis of woven 3D materials are proposed. The resulting differential constraints are specified for orthogonal coordinate systems taking account of the geometry of the growing process.

Keywords: pseudotensor, growing surface, 3D woven material, micropolar medium, rational invariant

REFERENCES

[1] B. Berman. 3-D printing: The new industrial revolution // Business Horizons. 2012. T. 55. C. 155–162.
[2] Epstein M. Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // International Journal of Plasticity. 2000. T. 16. C. 951–978.
[3] A. Maugin G. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials // Journal of Mechanics of Materials and Structures. 2009. c. 731–741.
[4] A. Goriely. The mathematics and mechanics of biological growth. New York: Springer, 2017. xxii + 646 c.
[5] Veblen O. Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. T. 26. C. 373–377.
[6] O. Veblen. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: Cambridge University Press, 1927. 102 c.
[7] T. Levi-Civita. The absolute differential calculus (calculus of tensors). London & Glasgow: Blackie & Son Limited, 1927. 450 c.
[8] B. Gurevich G. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen: P. Noordhoff, 1964.
[9] A. Einstein. General Relativity; an Einstein Centenary Survey. Cambridge: Cambridge University Press, 1979. 937 c.
[10] A. Schouten J. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1951. 434 c.

Kovalev Vladimir Alexandrovich
`e-mail:` vlad_koval@mail.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow City University of Management, Moscow, Russia.
Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

[11] S. Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 с.
[12] Synge J. L. Schild A. Tensor calculus. New York: Courier Corporation, 1978. Т. 5. 334 с.
[13] J. Das A. Tensors: the mathematics of relativity theory and continuum mechanics. Springer Science & Business Media, 2007. xii+290 с.
[14] V. Southwell R. An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists. London: Oxford Univ. Press, 1936.
[15] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2014. Т. 14. С. 199–209.
[16] Arutyunyan N. Kh. Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // J. Appl. Math. Mech. 1984. Т. 48. С. 1–10.
[17] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids // Mechanics of Solids. 2019. Т. 54. С. 1157–1164.
[18] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. 2019. Т. 23. С. 646–656.
[19] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a class of constitutive equations on propagating growing surface // Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2019. С. 11–29.
[20] В. Мурашкин Е. On the boundary conditions formulation in the problems of synthesis of woven 3d materials // Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2021. С. 114–121.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research projects nos. 19-51-60001, 20-01-00666.