Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 3 (49). С. 66–74

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

ОБОБЩЕННАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА СТОКСА ДЛЯ КОВАРИАНТНОГО ПСЕВДОТЕНЗОРНОГО ПОЛЯ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. Ориентируемые континуумы играют важную роль в микрополярной теории упругости, все реализации которой возможны только в рамках псевдотензорного формализма и представления об ориентируемом многообразии. Особенно это касается теории микрополярных гемитропных упругих сред. В настоящей работе рассматриваются различные формулировки интегральной теоремы Стокса для асимметричного ковариантного пседотензорного поля, заданного веса. Тем самым достигается распространение известной интегральной формулы Стокса на случай псевдотензоров. Последнее обстоятельство позволяет использовать, указанное обобщение для микрополярных континуумов. Исследование существенно опирается на класс специальных координатных систем.

Ключевые слова: псевдотензор, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, микрополярный гемитропный континуум, M-ячейка, репер, теорема Стокса

DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.010

УДК: 539.374

1. Введение. Теоремы преобразования объемных интегралов в поверхностные (теоремы: Стокса, Грина, Остроградского–Гаусса) играют чрезвычайно важную роль в механике сплошных сред. Особенно при вариационных формулировках законов сохранения и выводе уравнений баланса термодинамических переменных. Другим важным объектом современной геометрии, широко используемым в механике континуума, является понятие ориентируемого многообразия [1–3], естественным образом появляющееся в теории микрополярной упругости [4–6]. При формулировке интегральных

Мурашкин Евгений Валерьевич
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.
Радаев Юрий Николаевич
`e-mail:` y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.08.2021

теорем и законов сохранения особое внимание следует уделять согласованию ориентаций реперных направлений элементарных ячеек внутри континуума и на его границе. Все базовые понятия, связанные с измерениями тензорного объема ячейки, требуют привлечения аппарата псевдотензорного исчисления и фундаментального понятия об ориентируемых многообразиях [1–3, 7–9].

В ходе изложения вопросов связанных с многомерной геометрией, будем следовать терминологии и идеям [3]. Минимальные сведения о тензорных элементах объема и площади можно найти в [1, см. приложение Дж. Л. Эриксена] и [3]. Вопросы применения алгебры псевдотензоров к задачам механики растущих тел и микрополярной теории упругости обсуждались в работах [5–7, 10–13].

В представленной работе рассмотрим различные формулировки интегральной теоремы Стокса для асимметричного ковариантного пседотензорного поля, заданного целого веса. Тем самым достигается распространение известной интегральной формулы Стокса на случай псевдотензоров. Последнее обстоятельство позволяет использовать, указанное обобщение для микрополярных континуумов. Исследование существенно опирается на класс специальных координатных систем, характеризуемых условием $e^2 = \overset{[2]}{1}$, где e — фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр.

2. Ориентация M-многообразия. Псевдотензоры целого веса. Тензорный и псевдотензорный элементы объема. В данной работе мы не будем воспроизводить определение и свойства псевдотензоров. Подробное изложение алгебры псевдотензоров можно найти в руководствах по тензорному анализу [2, 3, 9] и в статьях [5,10]. В дальнейшем изложении сверху корневого символа относительного тензора в квадратных скобках будем отмечать его вес. Нулевой вес, присущий абсолютным тензорам, не отражается нами в обозначениях.

В N-мерном "плоском" пространстве выберем криволинейную систему координат x^k $(k = 1, 2, \dots, N)$. Будем называть M-многообразием — многообразие (поверхность) математической размерности M $(M \le N)$, погруженное в указанное внешнее пространство. Рассмотрим два репера с различными угловыми точками x^k и $\overline{x}^k$ и концевыми точками $x^k + \underset{\mathfrak{c}}{d}x^k$ и $\overline{x}^k + \underset{\mathfrak{c}}{\overline{dx}^k}$. Тогда внешние координаты векторов первого и второго реперов будут $\underset{\mathfrak{c}}{d}x^k$ и $\underset{\mathfrak{c}}{\overline{dx}^k}$ соответственно. Ориентируемые многообразия имеют исключительное значение в микрополярных теориях механики континуума [4]. Ясно, что ориентация репера в точке микрополярного тела задается нумерацией реперных направлений. При перестановке двух номеров реперных направлений ориентация всего репера изменяется на противоположную, т.е. правоориентированный репер становится левоориентированным. В механике континуума ориентацию *базисного* репера удобно задавать фундаментальным ориентирующим скаляром e [5, 10]. В трехмерном пространстве e определяется смешанным произведением базисных векторов

$$e = \overset{[+1]}{e} = \lceil \underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{3}{\boldsymbol{\imath}} \rfloor = (\underset{1}{\boldsymbol{\imath}} \times \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}) \cdot \underset{3}{\boldsymbol{\imath}}. \tag{1}$$

Обратим внимание, что псевдоскаляр (1) с точностью до знака совпадает с объемом параллелепипеда построенного на векторах $\underset{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{\imath}}$. Нетрудно показать, что

$$e^2 = g. \tag{2}$$

Ясно, что $e > \overset{[+1]}{0}$ для правоориентированной координатной системы, $e < \overset{[+1]}{0}$ для левоориентированной координатной системы.

Отметим, что фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр позволяет легко преобразовывать псевдотензоры произвольного веса W в абсолютные тензоры. Введем тензор $\mathbf{T}$ согласно

$$\mathbf{T} = e^{-W} \overset{[W]}{\mathbf{T}}. \tag{3}$$

Сравнивая веса, приходим к заключению о том, что $\mathbf{T}$ является абсолютным тензором. В дальнейшем изложении у фундаментальных символов, таких как ϵ и e, указание на их вес будем опускать.

Ковариантная производная относительного тензора $T^{lm\cdots n}_{ij\cdots k}$ веса W вычисляется по аналогии с соответствующей операцией для обычных тензоров [2, 3, 9, 10]:

$$\begin{gathered}\nabla_p \overset{[W]}{T}{}^{lm\cdots n}_{ij\cdots k} = \partial_p \overset{[W]}{T}{}^{lm\cdots n}_{ij\cdots k} + \overset{[W]}{T}{}^{sm\cdots n}_{ij\cdots k}\Gamma^l_{sp} + \cdots + \overset{[W]}{T}{}^{lm\cdots s}_{ij\cdots k}\Gamma^s_{ip} - \\ - \Gamma^l_{sp}\overset{[W]}{T}{}^{lm\cdots n}_{sj\cdots k} - \cdots - \Gamma^l_{sp}\overset{[W]}{T}{}^{lm\cdots n}_{ij\cdots s} - W\overset{[W]}{T}{}^{lm\cdots n}_{ij\cdots k}\Gamma^s_{sp}.\end{gathered} \tag{4}$$

В частности для псевдоскаляра ковариантная производная примет вид

$$\nabla_p \overset{[W]}{T} = \partial_p \overset{[W]}{T} - W \overset{[W]}{T}\Gamma^s_{sp}, \tag{5}$$

где

$$\Gamma^s_{sp} = \frac{\partial_p e}{e}.$$

Учитывая свойства символов Кристоффеля Γ^s_{sp} и соотношение (2) получим выражение для ковариантной производной (5)

$$\nabla_p \overset{[W]}{T} = \partial_p \overset{[W]}{T} - e^{-1}W \overset{[W]}{T}\partial_p e. \tag{6}$$

Пусть, рассматриваемое дифференцируемое M-многообразие, можно задать его Гауссовой (intrinsic) параметризацией u^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, M)$

$$x^k = x^k(u^1, u^2, \ldots, u^M). \tag{7}$$

В формуле (7) x^k являются внешними координатами для M-многообразия, а u^α — внутренними.

Разобьем M-многообразие на систему M-ячеек (M-cell). Каждая M-ячейка задается угловым репером, который характеризуется угловой вершиной (с внешними координатами x^k и внутренними координатами u^α) и концевыми точками репера, имеющими внутренние координаты

$$u^\alpha + \underset{\mathfrak{c}}{d}u^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, M \tag{8}$$

и внешние координаты

$$x^k + \underset{\mathfrak{c}}{d}x^k, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{9}$$

где индекс шрифта “фрактур” $\mathfrak{c}$ нумерует реперные направления ($\mathfrak{c} = 1, 2, \ldots, M$). С внешней (пространственной) точки зрения направления рассматриваемого репера задаются абсолютными контравариантными векторами

$$\underset{1}{d}x^k, \underset{2}{d}x^k, \ldots, \underset{M}{d}x^k, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{10}$$

Тензорный элемент объема M-ячейки определим согласно формуле

$$d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = M! \underset{1}{d} x^{[i_1} \underset{2}{d} x^{i_2} \cdots \underset{M}{d} x^{i_M]}. \tag{11}$$

Здесь в квадратные скобки заключены индексы по которым выполняется антисимметризация.

Учитывая следующую формулу для дифференциалов внешних координат вдоль реперных направлений M-ячейки

$$\underset{\mathfrak{b}}{d} x^k = (\partial_\alpha x^k) \underset{\mathfrak{b}}{d} u^\alpha, \tag{12}$$

соотношение (11) можно записать в виде [3, с. 256–257]

$$d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_M} \partial_{\alpha_1} x^{i_1} \partial_{\alpha_2} x^{i_2} \cdots \partial_{\alpha_M} x^{i_M} \det(\underset{\mathfrak{b}}{d} u^\gamma). \tag{13}$$

Последний множитель в (13) называется внутренним (intrinsic) объемом M-ячейки. Пользуясь представлением о внутреннем объеме M-ячейки, можно построить алгоритм, ориентирующий M-многообразие (детали имеются в книге [3]).

Если элементарные M-ячейки нарезаны с помощью координатных поверхностей $u^\alpha = c^\alpha$, то для случая $M = N$ получим

$$d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_N} = \overset{[-1]}{d\tau}{}^{12\ldots N} \epsilon^{i_1 i_2 \ldots i_N}, \tag{14}$$

где $\overset{[-1]}{d\tau}{}^{12\ldots N}$ — естественный элемент объема, представляющий собой псевдоскаляр веса -1, который определяется, следующим образом

$$\overset{[-1]}{d\tau}{}^{12\ldots N} = \det(\partial_\alpha x^k) du^1 du^2 \cdots du^N = dx^1 dx^2 \cdots dx^N. \tag{15}$$

3. Обобщенная псевдотензорная формулировка интегральной теоремы Стокса. Важную роль в механике и термомеханике континуума, особенно при формулировке законов сохранения, играют теоремы преобразования интегралов. Для любого дифференцируемого асимметричного ковариантного поля $A_{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}}$ можно сформулировать теорему Стокса [3, p. 269]

$$\int \partial_{i_M} A_{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}} d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = \oint\limits_{\partial} A_{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}} d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}}, \tag{16}$$

где $d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M}$ вычисляется с использованием внутренней параметризации u^1, u^2, $\ldots$, u^M, а $d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}}$ с использованием внутренней параметризации $\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2, \ldots, \widetilde{u}^{M-1}$. Отметим, что в формулировке (16) подразумевается, что поле $A_{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}}$ может вообще не иметь тензорной природы. В силу этого, теорема Стокса в равной мере будет справедлива и для псевдотензорного поля целого веса W

$$\int \partial_{i_M} \overset{[W]}{A}_{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}} d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = \oint\limits_{\partial} \overset{[W]}{A}_{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}} d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}}. \tag{17}$$

Инвариантный (абсолютно инвариантный) интеграл на ориентируемом M-многообразии для ковариантного псевдотензорного поля $\overset{[W]}{A}_{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}}$ веса W записывается в форме

$$\int \overset{[W]}{A}_{i_1 i_2 \ldots i_M} e^{-W} d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M}. \tag{18}$$

Подчеркнем, что интеграл (18) является абсолютным инвариантом.

Теорему (16) можно сформулировать в следующем виде

$$\int \partial_{i_M}\Big(\overset{[W]}{A}_{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}} e^{-W}\Big) d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = \oint\limits_{\partial} \overset{[W]}{A}_{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}} e^{-W} d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}}, \tag{19}$$

где в круглые скобки заключено абсолютное тензорное поле.

Очевидно, что подинтегральное выражение в (19) можно преобразовать следующим образом:

$$\partial_{i_M}\Big(e^{-W} \overset{[W]}{A}_{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}}\Big) = -We^{-W}\frac{\partial_{i_M} e}{e} \overset{[W]}{A}_{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}} + e^{-W}\partial_{i_M} \overset{[W]}{A}_{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}}. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19), получим

$$\begin{gathered} -\int We^{-W}\frac{\partial_{i_M} e}{e} \overset{[W]}{A}_{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}} d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} + \\ + \int e^{-W}\partial_{i_M} \overset{[W]}{A}_{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}} d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = \\ = \oint\limits_{\partial} \overset{[W]}{A}_{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}} e^{-W} d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}}. \end{gathered} \tag{21}$$

С другой стороны, в (19) подынтегральное выражение в интеграле слева, при учете того, что

$$d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = d\tau^{[i_1 i_2 \ldots i_M]} \tag{22}$$

преобразуется следующим образом

$$\begin{gathered} \partial_{i_M}\Big(\overset{[W]}{A}_{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}} e^{-W}\Big) d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = \\ = \partial_{[i_M}\Big(\overset{[W]}{A}_{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}]} e^{-W}\Big) d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = \\ = \nabla_{[i_M} \frac{\overset{[W]}{A}_{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}]}}{e^W} d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M}. \end{gathered} \tag{23}$$

Учитывая свойство фундаментального ориентирующего псевдоскаляра, т.е. его *ковариантное постоянство*

$$\nabla_i e^m = \overset{[m]}{0} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Соотношение (23) преобразуется к виду

$$\nabla_{[i_M} \frac{\overset{[W]}{A}_{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}]}}{e^W} d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = e^{-W}\nabla_{[i_M} \overset{[W]}{A}_{i_1 i_2 \ldots i_{M-1}]} d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M}. \tag{24}$$

Теорема Стокса (19) записывается следующим образом

$$\int e^{-W}\nabla_{[i_M}\overset{[W]}{A}_{i_1 i_2\ldots i_{M-1}]}d\tau^{i_1 i_2\ldots i_M}d\tau^{i_1 i_2\ldots i_M} = \oint\limits_{\partial} e^{-W}\overset{[W]}{A}_{i_1 i_2\ldots i_{M-1}}d\tau^{i_1 i_2\ldots i_{M-1}}, \tag{25}$$

что еще раз подтверждает справедливость формулировки (17).

Сравнивая формулировки теоремы Стокса (21) и (25) приходим к выводу, что

$$\int e^{-W}\frac{\partial_{i_M}e}{e}\overset{[W]}{A}_{i_1 i_2\ldots i_{M-1}}d\tau^{i_1 i_2\ldots i_M} = 0. \tag{26}$$

Последнее соотношение заведомо будет выполнено, если

$$\partial_{i_M}e = \overset{[+1]}{0} \quad (i_M = 1, 2, \ldots, N). \tag{27}$$

Полученное условие (27) мы будем интерпретировать, следуя статье [16], как выбор специальных систем координат, характеризуемых условием

$$\sqrt{g} = \overset{[+1]}{1} \tag{28}$$

или более широким условием, учитывающем левостороннюю и правостороннюю ориентацию системы координат,

$$e = \pm\overset{[+1]}{1}. \tag{29}$$

Это оказывается существенным в механике гемитропных микрополярных сред, когда определяющие тензоры чувствительны к изменениям ориентации пространства. Подчеркнем, что при $e = -\overset{[+1]}{1}$ возникает неоднозначность вычисления степени e^{-W}.[1] Последнее означает, что псевдотензоры не могут иметь дробно-рационального веса.

Отметим, что ограничение $\sqrt{g} = \overset{[+1]}{1}$ часто используется не только в астрономии и теории относительности [17], но и в механике деформируемого твердого тела [18]. В монографии [17, с. 135–142] условие $\sqrt{g} = \overset{[+1]}{1}$ используется при выводе уравнения тяготения в 4-пространстве–времени, что существенно упрощает уравнения теории поля. В монографии [18] условие (28) используется в процессе разделения изостатических координат в основных уравнениях математической теории пластичности.

Заключение. В настоящей работе рассматриваются различные формулировки интегральной теоремы Стокса для асимметричного ковариантного пседотензорного поля, заданного целого веса.

(1) Обсуждаются понятия ориентируемого многобразия и континуума, играющие важную роль в микрополярной теории упругости. В особенности это касается теории гемитропных упругих сред.

(2) В статье приведено обсуждение фундаментальных тензоров, характеризующих метрические и ориентационные свойства трехмерного пространства. Обсуждается представление о фундаментальном ориентирующем псевдоскаляре.

(3) Приводится правило перехода от псевдотензоров к абсолютным, характерное для микрополярных теорий.

[1]Например, если $e = -\overset{[+1]}{1}$ и $W = \frac{1}{2}$, то $e^W = \overset{[+1/2]}{i}$, что невозможно, оставаясь в рамках вещественной схемы построения теории.

(4) Вводятся понятия тензорного и псевдотензорного элемента объема (площади) M-ячейки.

(5) Обобщенная псевдотензорная формулировка интегральной теоремы Стокса уточняется для класса специальных координатных систем, характеризуемых условием $e^2 = \overset{[2]}{1}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. 226–902 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6_2.

[2] Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. – 456 с. [Eng. Trans. Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.]

[3] Synge J. L. and Schild A. Tensor calculus. New York, Dover Publications Inc., 1978. xi+324 pp.

[4] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin : Springer, 1972. 285 p.

[5] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a micropolar theory of growing solids // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020.Т. 24, No 3. С. 424–444.

[6] Murashkin E. V., Radaev Y. N. On a differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing solids //Mechanics of Solids. 2019. Vol. 54. P. 1157–1164.

[7] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. К теории ориентированных тензорных элементов площади микрополярного континуума, погруженного во внешнее плоское пространство // Известия РАН: Механика твердого тела. 2022. № 2. (В печати)

[8] Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: Изд-во иностранной литературы, 1948. 139 с.

[9] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. 408 с.

[10] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, No 4. С. 399–412.

[11] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона–Кэли // Известия РАН: Механика твердого тела. 2021. № 6. С. 130–138.

[12] Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев Об одном псевдотензорном обобщении связывающих двусторонних граничных условий Югонио-Адамара // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 104–114.

[13] Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 115–127.

[14] Шилов Г. Е. Введение в теорию линейных пространств. ГИТТЛ, 1956. 340с.

[15] Сушкевич А. К. Основы высшей алгебры. М.: ОНТИ, 1937. 476 с.

[16] Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев, “Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах”, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 25:3 (2021), 457–474

[17] Kopff A. Mathematical Theory of Relativity. Dutton: Dutton Press, 1921. 214 pp.

[18] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности.Самара: Самарский университет, 2006. 340 с.

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

THE GENERALIZED STOKES INTEGRAL THEOREM FOR A COVARIANT PSEUDOTENSOR FIELD

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. Oriented continua play an important role in the micropolar theory of elasticity, all realizations of which are possible only within the framework of the pseudotensor formalism and the orientable manifold concept. This especially concerns the theory of micropolar hemitropic elastic media. In this paper, we consider various formulations of the Stokes integral theorem for an asymmetric covariant pseudotensor field of a given weight. This extends the well-known Stokes integral formula to the case of pseudotensors. The latter circumstance makes it possible to use the manifistated generalization for micropolar continua. The study relies heavily on the class of special coordinate systems.

Keywords: pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, micropolar hemitropic continuum, M-cell, frame, Stokes theorem

REFERENCES

[1] Radaev Yu.N., Murashkin E.V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of Strength and Plasticity. 2020.Vol. 82, No. 4, pp. 399–412.
[2] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a micropolar theory of growing solids // Bulletin of the Samara State Technical University. Series Physics and Mathematics. 2020, T. 24, No 3.P. 424–444.
[3] Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation // Bulletin of Samara State Technical University, Series " Physics and Mathematics. " 2020, vol. 24, no. 4, pp. 752–761.
[4] Murashkin E.V., Radaev Yu.N. On one differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing bodies // Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Rigid Body Mechanics. 2019. No. 6. P. 38—46.
[5] Weierstrass K. Note zur vorstehender Abhandlung. Walter de Gruyter, Berlin / New York Berlin, New York, 1865.
[6] Erdmann G. Ueber unstetige L "o sungen in der Variationsrechnung. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1877.
[7] Rankine W. J. M. On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance // Proceedings of the Royal Society of London. London: The Royal Society, 1870. Vol. 18, P. 80–83.
[8] Hugoniot P.H. Sur la propagation du mouvement dans les corps et sp 'e cialement dans les gaz parfaits, 2e Part // Journal de l' 'E cole Polytechnique, 1887. Vol. 57. P. 3-97.
[9] Thomas T. Plastic flow and fracture in solids. New York, Academic Press, 1961. 267 p.
[10] Bykovtsev G.I., Myasnyankin Yu.M. Sliding surfaces in three-dimensional rigid-plastic bodies // DAN SSSR 1966. Vol. 167. No. 6. pp. 1260-1262.
[11] Bykovtsev G.I., Kretova L.D. On waves of accelerations in ideal elastoplastic bodies // Inzh. magazine MTT. 1967. No. 1. P.102-110.
[12] Bykovtsev G.I., Vlasova I.A. Properties of the equations of the spatial problem of the theory of ideal plasticity // Mekh. deformed. solid, solid, Vol. 2. Kuibyshev, 1977. S. 33-68.
[13] Ivlev D.D., Bykovtsev G.I. The theory of a hardening plastic body. Moscow: Nauka, 1971.232 p.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Yuri N. Radayev, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

[14] Bykovtsev G.I., Ivlev D.D.The theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998.528 p.
[15] Veblen O. and Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 26, No. 3 (Jul., 1924), pp. 373-377 https://www.jstor.org/stable/1989146
[16] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: Encyclopedia of Physics. Vol. III / 1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960.226-902 pp. DOI: 10.1007/ 978-3-642-45943-6_2.
[17] Gurevich GB Foundations of the theory of algebraic invariants. M., L .: OGIZ, GITTL, 1948.408 p. [Eng. Trans. G. B. Gurevich, Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 pp.]
[18] Schouten Ya. A. Tensor analysis for physicists. M .: Science. 1965 .– 456 s. [Eng. Trans. Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.]
[19] Sokolnikov I. S. Tensor analysis. Theory and applications in geometry and in continuum mechanics. Moscow: Nauka, 1971.376 p. [Eng. Trans. Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 pp.]
[20] Synge J. L. and Schild A. Tensor calculus. New York, Dover Publications Inc., 1978. xi + 324 pp.
[21] Besdo D. Ein beitrag zur nichtlinearen theorie des Cosserat-kontinuums // Acta Mechanica. 1974. T. 20.No. 1.S. 105-131.
[22] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972.285 p.
[23] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986.383 pp.
[24] Kopf A. Foundations of Einstein's theory of relativity. Moscow: GTTI, 1933.175 p.
[25] Radaev Yu. N. A spatial problem of the mathematical theory of plasticity. Samara: Samara University, 2006.340 p.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research projects nos. 19-51-60001, 20-01-00666.