Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 3 (49). С. 75–84

В. Н. Орлов, Л. В. Мустафина

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе приводится доказательство теоремы существования и единственности аналитического решения класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка, правая часть которого представлена полиномом шестой степени, в комплексной области. Расширен класс рассматриваемых уравнений за счет новой замены переменных. Получена априорная оценка аналитического приближенного решения. Представлен вариант численного эксперимента оптимизации априорных оценок с помощью апостериорных.

Ключевые слова: существование и единственность, аналитическое решение, нелинейное дифференциальное уравнение, априорная оценка, апостериорная оценка.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.007

УДК: 539.374

Введение. Следует отметить, что нелинейные дифференциальные уравнения имеют приложения в разных областях: гидродинамике [1]; в задачах устойчивости свободного падения авторотирующего тела в сопротивляющейся среде [2]; в задачах физики при определении времени задержки сверхизлучательной бозонной лавины [3]; в задачах строительной механики [4–8]; в механике [9,10]; при расчетах атомных реакторов [11]; в нелинейной диффузии [12]. Авторы работы [13] в качестве основы математической модели волнового процесса в эластичной балке рассматривают неявное дифференциальным уравнением (1) с краевыми условиями (2).

$$u'''(t) + f(t, u(t)) = 0, \tag{1}$$

$$0 \le t \le 1, u(0) = u'(0) = u'(1) = 0. \tag{2}$$

Орлов Виктор Николаевич
e-mail: orlovvn@mgsu.ru, доктор физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия,
Людмила Витальевна Мустафина
e-mail: ludamust76@yandex.ru, магистрант первого курса, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Поступила 15.09.2021

В зависимости от структуры указанной функции$f\left(t,u\left(t\right)\right)$ уравнение (1) может иметь линейную структуру относительно искомой функции. В этом случае тогда трудностей в его решении не возникает,можно воспользоваться классическим методом решения. В случае функции $f\left(t,u\left(t\right)\right)$ нелинейной относительно $u(t)$, предлагаемый метод верхних и нижних границ не имеет обоснования. В этом случае препятствием для применяемого метода, являются подвижные особые точки нелинейного уравнения. Вторым недостатком является отсутствие формул для расчета области действия метода. В этой ситуации, в работе [14] предложен вариант решения нелинейного дифференциального уравнения (1) для вещественной области. В данной работе авторы предлагают вариант обобщения этих результатов на комплексную область. При проведении исследования, применяя новую замену переменных, удалось существенно расширить класс, рассматриваемых в работе [14], нелинейных дифференциальных уравнений. Отметим публикации [15–21], в которых применяемый математический аппарат успешно апробирован на других классах нелинейных дифференциальных уравнений, как в вещественной, так и комплексной областях. Предложенный в работе подход позволяет доказать как существование и единственность решения, так и получить формулу для области действия теоремы, а также построить структуру аналитического приближенного решения рассматриваемой задачи.

Результаты исследования и их обсуждение. Представленное дифференциальное уравнение

$$y''' = a_0(z)\cdot y^6 + a_1(z)\cdot y^5 + a_2(z)\cdot y^4 + a_3(z)\cdot y^3 + a_4(z)\cdot y^2 + a_5(z)\cdot y^1 + a_6(z), \quad (3)$$

приводится заменой переменной

$$y = \sqrt[5]{\frac{1}{a_0}}\cdot g(z) - \frac{a_1(z)}{6\cdot a_0}, \quad (4)$$

к нормальной форме

$$g''' = g^6 + (r(z)), \quad (5)$$

при условиях:

$$\begin{cases} a_0(z) = a_0 = const \neq 0, \\ a_2(z) = \frac{5a_1^2(z)}{4a_0},\ a_3(z) = \frac{-55a_1^3(z)}{54a_0^2},\ a_4(z) = \frac{145a_1^4(z)}{432a_0^3},\ a_5(z) = -\frac{624a_1^5(z)+870a_0a_1^4(z)}{1296a_0^4}, \\ r(z) = \frac{a_1'''(z)}{6\cdot a_0} + \frac{4439a_1^6(z)}{46656a_0^5} + \frac{870a_1^5(z)}{7776a_0^4} + a_6(z). \end{cases} \quad (6)$$

Рассмотрим задачу Коши

$$y''' = y^6 + r(z), \quad (7)$$

$$y(z_0) = y_0, \quad y'(z_0) = y_1, \quad y''(z_0) = y_2, \quad (8)$$

Теорема 1. Если выполняются условия:

$$\begin{array}{l} 1)\, r(z) \in C^1 \text{ в области } |z - z_0| < \rho_1, \quad 0 < \rho_1 = const; \\ 2)\, \exists M_n : \frac{|r^n(z_0)|}{n!} \leq M_n, \quad M_n = const, \quad n = 0, 1, 2, ... \end{array} \quad (9)$$

то решение задачи Коши (7)–(8) представимо в виде:

$$y(z) = \sum_0^\infty C_n(z - z_0)^n, \quad (10)$$

где, $\rho_2 = \min\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^5}}\}, \quad M = \max\{|y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup\frac{|r^n(z_0)|}{n!}\}, n = 0, 1, 2, ...$

Доказательство. Согласно условию теоремы имеем

$$r(z) = \sum_{0}^{\infty} B_n \cdot (z - z_0)^n. \tag{11}$$

Подставим (10), (11) в (7) и получим:

$$\sum_{0}^{\infty} C_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (z - z_0)^{n-3} = \sum_{0}^{\infty} \mathrm{C}_n^{***}(z - z_0)^n + \sum_{0}^{\infty} B_n (z - z_0)^n, \tag{12}$$

$\sum\limits_{0}^{\infty} C_n^* = \sum\limits_{0}^{n} C_i \cdot C_{n-i}$, $\sum\limits_{0}^{\infty} C_n^{**} = \sum\limits_{0}^{n} C_i^* \cdot C_{n-i}^*$, $\sum\limits_{0}^{\infty} C_n^{***} = \sum\limits_{0}^{\infty} C_i^* \cdot \sum\limits_{0}^{\infty} C_{n-i}^{**}$, где n=0,1,2....

Из формулы 12 следует рекуррентная формула для однозначного определения коэффициентов C_n:

$$\mathrm{C}_n(n(n-1)(n-2)) = C_{n-3}^{***} + B_{n-3}, \tag{13}$$

$$C_3 = \frac{1}{6} \cdot (C_0^6 + B_0), \quad C_4 = \frac{1}{24} \cdot (C_0^6 + B_0), \quad C_5 = \frac{1}{60}(15C_0^4 C_1^2 + 6C_0^5 C_2 + B_2),$$

$$C_6 = \frac{1}{120}(30C_0^4 C_1 C_2 + 18C_0^3 C_1^3 + 6C_0^5 C_3 + B_3) \le \frac{1}{2}(M+1)^6, ...,$$

где C_0, C_1, C_2 – определяются начальными условиями.

Коэффициенты C_n получены с помощью программного комплекса Maple. На основе полученных выше выражений выдвигаем гипотезу оценок коэффициентов C_n:

$$|C_{3k}| \le \frac{(M+1)^{5k+1}}{3k(3k-1)(3k-2)}, |C_{3k+1}| \le \frac{(M+1)^{5k+1}}{3k(3k+1)(3k-1)}, |C_{3k+2}| \le \frac{(M+1)^{5k+1}}{3k(3k+1)(3k+2)}.$$

Продемонстрируем технологию доказательство оценок в случае $n = 3k$:

$$|C_{3k+3}| \le \frac{(M+1)^{5k+6}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}. \tag{14}$$

Из (13) следует:

$$|C_{n+1}| = \left| \frac{C_{n-2}^{***} + B_{n-2}}{n(n+1)(n-1)} \right| \Rightarrow |C_{3k+3}| = \left| \frac{(\mathrm{C}_{3k-2}^{***} + B_{3k-2})}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} (\sum_{i=0}^{3k+1} C_{3k+1-i}^{**} \times C_i^* + B_{3k-2}) \right| =$$

$$= \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left| (\sum_{i=0}^{3k+1} (\sum_{j=0}^{3k+1-i} C_{3k+1-i-j}^* \times C_j^*) \times C_i^* + B_{3k-2}) \right| =$$

$$= \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left| (\sum_{i=0}^{3k+1} (\sum_{j=0}^{3k+1-i} (\sum_{l=0}^{3k+1-i-j} C_{3k+1-i-j-l} \times C_l) C_j^*) \times C_i^* + B_{3k-2}) \right| =$$

$$= \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}.$$

$$\cdot \left| (\sum_{i=0}^{3k+1} (\sum_{j=0}^{3k+1-i} (\sum_{l=0}^{3k+1-i-j} C_{3k+1-i-j-l} \times C_l) \cdot (\sum_{l=1}^{l-j} C_l \cdot C_{j-l})) \cdot (\sum_{m=1}^{i} C_m \cdot C_{i-m}) + B_{3k-2}) \right| \le$$

$$\leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left| (\sum_{i=0}^{3k+1} (\sum_{j=0}^{3k+1-i} (\sum_{l=0}^{3k+1-i-j} \frac{(M+1)^{5k+1-i-j-l}}{(3k+1)3k(3k-1)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{(M+1)^l}{l^*(l-1)^*(l-2)^*}) \cdot \frac{(M+1)^j}{j^*(j-1)^*(j-2)^*}) \cdot \sum_{m=0}^{i} C_{i-m}C_m + B_{3m-2} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left| (\sum_{i=0}^{3k+1} (\sum_{j=0}^{3k+1-i} (\frac{(M+1)^{5k+1-i}}{1} \cdot \left(\sum_{l=0}^{3k+1-i-j} \frac{1}{(3k+1-i-j-l)^*} \cdot \right. \right.\right.$$

$$\left. \cdot \frac{1}{(3k+1-i-j-l)^*(3k+1-i-j-l-2)^* \cdot l^*(l-1)^*(l-2)^*} \right) \cdot$$

$$\left. \cdot \frac{1}{j^*(j-1)^*(j-2)^*}) \sum_{m=0}^{i} C_{i-m}C_m + B_{3m-2} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \cdot \left| \left(\sum_{i=0}^{3k+1} \left(\sum_{j=0}^{3k+1-i} \left(\frac{(M+1)^{5k+1-i-j}}{1} \right. \right. \right. \right. \cdot$$

$$\cdot \frac{1(3k+1-i-j+1)}{(3k+1-i-j)^*(3k+1-i-j-1)^*(3k+1-i-j-2)^*2} \cdot \frac{(M+1)^j}{j^*(j-1)^*(j-2)^*}) \cdot$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{i} C_{i-m} \cdot C_{\ m} + B_{3m-2}| \leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left| (\sum_{i=0}^{3k+1} ((M+1)^{5k+1-i} \cdot \right.$$

$$(\sum_{j=0}^{3k+1-i} \cdot \frac{1}{(3k+1-i-j-1)^*(3k+1-i-j-1)^* j^*(j-1)^*(j-2)^*}) \cdot$$

$$\left. \cdot \sum_{k=0}^{i} C_{i-k}C_k + B_{3k-2} \right| \leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \cdot$$

$$\cdot \left| (\sum_{i=0}^{3k+1} (M+1)^{5k+1-i} \frac{(3k+1-i+1)}{(3k+1-i)(3k+1-i-2)2}) \cdot \sum_{k=0}^{i} C_{i-k} \cdot C_k + B_{3k-2} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left| (\sum_{i=0}^{3k+1} \frac{(M+1)^{5k+1-i}}{(3k+1-i)} \right.$$

$$(\sum_{k=0}^{i} \frac{(M+1)^k (M+1)^{i-k+1}}{k^*(k-1)^*(k-2)^*(i-k)(i-k-1)(i-k-2)(i-2)^*})) +$$

$$+B_{3k-2}| \leq \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \left| (\sum_{i=0}^{3k+1} \frac{(M+1)^{5k+2}}{(3k+1-i-2)^*(i-1)^*(i-2)^*}) + B_{3k-2} \right| \leq$$

$$\leq \frac{(M+1)^{5k+2}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} + M \leq \frac{(M+1)^{5k+6}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)},$$

где

$$i^* = \begin{cases} 1, i = 0 \\ i, i = 1, 2, 3... \end{cases}, \quad (i-1)^* = \begin{cases} 1, i = 1 \\ (i-1), i = 0, 2, 3... \end{cases},$$

$$l^* = \begin{cases} 1, l = 0 \\ l, l = 1, 2, 3... \end{cases} \quad (l-1)^* = \begin{cases} 1, l = 1 \\ (l-1), l = 0, 2, 3... \end{cases},$$

$$k^* = \begin{cases} 1, k = 0 \\ k, k = 1, 2, 3... \end{cases} \quad (k-1)^* = \begin{cases} 1, k = 1 \\ (k-1), k = 0, 2, 3... \end{cases},$$

$$j^* = \begin{cases} 1, j = 0 \\ j, j = 1, 2, 3... \end{cases} \quad (j-1)^* = \begin{cases} 1, j = 1 \\ (j-1), j = 0, 2, 3... \end{cases},$$

$$(3k+1-i-j-l)^* = \begin{cases} 1, l = 3k+1-i-j \\ 3k+1-i-j-l, l \neq 3k+1-i-j \end{cases},$$

$$(3k+1-i-2)^* = \begin{cases} 1, i = 3k+1 \\ i \neq 3k+1 \end{cases},$$

$$(3k+1-i-j-l-1)^* = \begin{cases} 1, l = 3k-i-j \\ 3k+1-i-j-l-1, l \neq 3k-i-j \end{cases},$$

$$(3k+1-i-j-l-2)^* = \begin{cases} 1, l = 3k+1-i-j \\ 3k+1-i-j-l-2, l \neq 3k+1-i-j \end{cases},$$

$$(3k+1-i-j)^* = \begin{cases} 1, j = 3k+1-i \\ 3k+1-i-j, j \neq 3k+1-i \end{cases}$$

$$(3k+1-i-j-1)^* = \begin{cases} 1, j = 3k-i \\ 3k+1-i-j-1, j \neq 3k-i \end{cases},$$

$$(3k+1-i-j-2)^* = \begin{cases} 1, j = 3k+1-i \\ 3k+1-i-j-2, j \neq 3k+1-i \end{cases}.$$

Оценки для вариантов $n = 3k+1$, $n = 3k+2$ получаем аналогичным образом.

Для ряда (13) составляем мажорирующий ряд

$$\sum_{0}^{\infty} V_n (z-z_0)^n = \sum_{k=1}^{\infty} V_{3k}(z-z_0)^{3k} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{3k+1}(z-z_0)^{3k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{3k+2}(z-z_0)^{3k+2} \quad (15)$$

Ряды в правой части (15) является сходящимися в области, определяемой формулой:

$$|z - z_0| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^5}}.$$

В конечном итоге, для решения (10)) получаем область сходимости, при этом

$$\rho_2 = \min\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^5}}\}.$$

Теорема 1 позволяет построить аналитическое приближенное решение:

$$y_N(z) = \sum_{0}^{N} C_n (z-z_0)^n. \quad (16)$$

Теорема 2. В предположении пунктов 1 и 2 теоремы 1, для аналитического приближенного решения (16) задачи (7)-(8) в области $|z - z_0| < \rho_2$ верна оценка :

$$\Delta y_N(z) \leq \frac{M(M+1)^{\frac{5(N+1)}{3}} |z - z_0|^{N+1}}{1 - M(M+1)|z - z_0|^3}.$$

$$\cdot\left(\frac{1}{N(N-1)(N+1)}+\frac{|z-z_0|}{N(N+1)(N+2)}+\frac{|z-z_0|^2}{(N+1)(N+2)(N+3)}\right),$$

при $N+1=3k$,

$$\Delta y_N(z)\le\frac{M(M+1)^{\frac{5N}{3}}\,|z-z_0|^{N+1}}{1-M(M+1)\,|z-z_0|^3}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{N(N-1)(N-2)}+\frac{|z-z_0|}{N(N-1)(N+1)}+\frac{|z-z_0|^2}{N(N+1)(N+2)}\right),$$

если N+1=3k+1, а для варианта N+1=3k+2 будем иметь оценку:

$$\Delta y_N(z)\le\frac{M(M+1)^{\frac{5(N-1)}{3}}\,|z-z_0|^{N+1}}{1-M(M+1)\,|z-z_0|^3}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{(N-1)(N-2)(N-3)}+\frac{|z-z_0|}{N(N-1)(N-2)}+\frac{|z-z_0|^2}{N(N-1)(N+1)}\right),$$

где

$$\rho_2=\min\{\rho_1,\frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^5}}\},0<\rho_2=const,$$

$$M=\max\{|y_0|,|y_1|,|y_2|,\sup\frac{|r^{(n)}(z_0)|}{n!}\},n=0,1,2...$$

Доказательство. Проведем рассуждения случае $N+1=3k$. Классический подход, с учетом оценок для C_n позволяет получить:

$$\Delta y_N(z)=|y(z)-y_N(z)|=\left|\sum_{N+1}^{\infty}C_n(z-z_0)^n\right|=$$

$$=\left|\sum_{N+1}^{\infty}C_n(z-z_0)^n|\le\left|\sum_{N+1}^{\infty}C_{3k}(z-z_0)^{3k}\right|+\left|\sum_{N+1}^{\infty}C_{3k+1}(z-z_0)^{3k+1}\right|+\right.$$

$$+\left|\sum_{N+1}^{\infty}C_{3k+2}(z-z_0)^{3k+2}\right|\le\sum_{N+1}^{\infty}\frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k-1)(3k-2)}|z-z_0|^{3k}+$$

$$+\sum_{N+1}^{\infty}\frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k-1)(3k+1)}|z-z_0|^{3k+1}+\sum_{N+1}^{\infty}\frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k+1)(3k+2)}|z-z_0|^{3k+2}\le$$

$$\le\frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k-1)(3k-2)}|z-z_0|^{3k}\sum_{k=1}^{\infty}(1+M(M+1)^{5k}|z-z_0|^{3k})+$$

$$+\frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k-1)(3k+1)}|z-z_0|^{3k+1}\sum_{k=1}^{\infty}(1+M(M+1)^{5k}|z-z_0|^{3k})+$$

$$+\frac{(M+1)^{5k}}{3k(3k+1)(3k+2)}|z-z_0|^{3k+2}\sum_{k=1}^{\infty}(1+M(M+1)^{5k}|z-z_0|^{3k})=$$

$$=\frac{(M+1)^{5k}}{1-M(M+1)|z-z_0|^{3k}}|z-z_0|^{3k}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{3k(3k-1)(3k-2)}+\frac{|z-z_0|}{3k(3k-1)(3k+1)}+\frac{|z-z_0|^2}{3k(3k+1)(3k+2)}\right)=$$

$$= \frac{(M+1)^{\frac{5(N+1)}{3}} \cdot |z-z_0|^{N+1}}{1-M(M+1)\cdot|z-z_0|^3} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{N(N-1)(N+1)} + \frac{|z-z_0|}{N(N+1)(N+2)} + \frac{|z-z_0|^2}{(N+1)(N+2)(N+3)} \right),$$

в случае $N \geq 3$.

По аналогии доказываем структуру оценки для вариантов $N+1 = 3k+1$, $N+1 = 3k+2$ в области $|z-z_0| < \rho_2$, где, $\rho_2 = \min\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^5}}\}$, $M = \max\{|y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup \frac{|r^n(z_0)|}{n!}\}, n = 0, 1, 2, ...$

Пример. Для задачи Коши (6)-(7), $z_0 = 0$; $y(z_0) = y_0 = 0,7 + i; y'(z_0) = y_1 = 1 + i$; y" $(z_0) = y_2 = 0{,}5i$; $r(z) = 0$.

На основании исходных данных $M = 2^{0,5}$, в приближенном решении (16) $N = 6$, радиус

$$\rho_2 = 0,230165658; \quad z_1 = 0,15 + 0,17i; \quad z_1 \in |z-z_0| < \rho_2.$$

Числовые характеристики аналитического приближенного решения рассматриваемого примера представлены в таблице 1.

z_1	$y_6(z_1)$	$\Delta y_5(z_1)$	Δ_1
0,15+0,17i	0,6506166+1,3223273i	0.00522	0.00007

Таблица 1. Расчеты аналитического приближенного решения

Обозначения: $y_6(z_1)$ - приближенное решение; $\Delta y_6(z_1)$ - апостериорная погрешность; Δ_1 - априорная погрешность. Для $\Delta_1 = 0.00007$ на основании теоремы 2 имеем $N = 17$. Слагаемые с $N = 7$ по 17 в общей сумме, меньше заданной точности $\varepsilon = 7 \cdot 10^{-5}$. Следовательно, приближенное решение $y_5(z_1)$ будет иметь погрешность $\varepsilon = 0.00007$.

Заключение. В статье авторами дано теоретическое обоснование применение разработанного метода аналитического приближенного решения к рассматриваемому классу нелинейных дифференциальных уравнений. Теоретические результаты подтверждены численным экспериментом. Априорная погрешности аналитического приближенного решения оптимизирована с помощью апостериорной.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дышко А. Л., Конюхова А. И., Б.Суков Н. О сингулярной задаче для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка, возникающего в гидродинамике // Журнал вычислительной математике и математической физики. 2007. Т. 47, № 7. с. 1158–1178.

[2] Привалов В. А., Самсонов А. В. Сопоставление свойств устойчивости двух режимов авторотации // Изв. РАН. ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. с. 37–48.

[3] Самодуров А. А. Простой способ определения времени задержки сверхизлучательной бозонной лавины // Докл. АН БССР. 1985. № 1. с. 9–10.

[4] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 456. p. 012122.

[5] Orlov. V. N., Kovalchuk O. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions // E3S Web Conf. XXII International Scientific Conference “Construction the Formation of Living Environment” (FORM-2019). 2019. Vol. 97. p. 03031.

[6] Orlov V. N. Features of mathematical modelling in the analysis of console-type structures // E3S Web Conf. XXII International Scientific Conference “Construction the Formation of Living Environment” (FORM-2019). Vol. 97. P. 03036,.

[7] Orlov. V. N., Kovalchuk O. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2020. Vol. 1425. p. 012127.

[8] Orlov. V. N., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order // Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2020. Vol. 1425. p. 012129.

[9] Hill J. M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings // Internat. J. Solids Structures. 1977. Vol. 13. p. 93–104. ISSN 1998-4812.

[10] Ockendon J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems // Proc. Symp. Moving Boundary Problems / Ed. by D. G. Wilson, A. D. Solomon, P. T. Boggs. New York: 1978. p. 129–145.

[11] Axford R. A. The exact solution of singular arc problems in reactor core optimization // Proc. Nuclear Utilities Planning Methods Symp. Tennessee. 1974. p. 1–14.

[12] R. R. A. A. Differential equations invariant urber two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion // Los Alamos Report. 1970. LA – 4514, UC – 34).

[13] Yuqiang F. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. Vol. 56. p. 2507–2514.

[14] Orlov V. N., Разакова Р. В. Приближенное решение одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка в области аналитичности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. Т. 1, № 43. с. 92–99.

[15] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modelling the complex structures // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 365.

[16] Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk, E. P. Linnik et al. // Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ.im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat.Sci. 2018. no. 4. p. 24–35.

[17] Орлов В. Н., Ив Б. Б. Теорема существования решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка с полиномиальной правой частью второй степени в окрестности подвижной особой точки // Вестник Башкирского университета. 2018. Т. 23, № 4. с. 980–986.

[18] Orlov V. N., Zheglova Y. G. Mathematical modeling of building structures and nonlinear differential equations // International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. 2020. Vol. 11, no. 3. p. 2050026.

[19] Орлов В. Н., Лукашевич Н. А. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 10. с. 1829–1832.

[20] Орлов В. Н. Точные границы для приближенного решения дифференциальной уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). с. 399–405.

[21] Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. О расширении области для аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области // Вестн. Сам. Гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. с. 1.

V. N. Orlov, L. V. Mustafina

ANALYTICAL SOLUTION OF A CLASS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER IN THE COMPLEX AREA

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract. The article presents a proof of the theorem of the existence and uniqueness of the analytical solution of the class of nonlinear differential equations of the third order, with a polynomial right-hand side of the sixth degree, in the complex domain. The class of the considered equations has been extended by means of a new change of variables. An a priori estimate of the analytical approximate solution is obtained. A variant of the numerical experiment of optimizing a priori estimates using a posteriori estimates is presented.

Keywords: Existence and uniqueness, analytical solution, nonlinear differential equation, a priori estimation, a posteriori estimation.

REFERENCES

[1] Dyshko A. L., Konyukhova A. I., N.B.Sukov. About the singular problem for a nonlinear ordinary differential equation of the third order arising in hydrodynamics // Zhurnal vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika Izdatel'stvo. 2007. T. 47, № 7. C. 1158–1178.

[2] Privalov V. A., Samsonov A. V. Comparison of stability properties of two autorotation modes // Izv. RAN. PMM. 1994. T. 58. Issue 2. c. 37–48.

[3] Samodurov A. A. An ordinary method for determining the delay time of a supersonic bosonic avalanche // Dokl. AN BSSR. 1985. № 1. C. 9–10.

[4] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 456. p. 012122.

[5] Orlov. V. N., Kovalchuk O. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions // E3S Web Conf. XXII International Scientific Conference "Construction the Formation of Living Environment" (FORM-2019). 2019. Vol. 97. p. 03031.

[6] Orlov V. N. Features of mathematical modeling in the analysis of console-type structures // E3S Web Conf. XXII International Scientific Conference "Construction the Formation of Living Environment" (FORM-2019). Vol. 97. P. 03036,.

[7] Orlov. V. N., Kovalchuk O. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction // Modeling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2020. Vol. 1425. p. 012127.

[8] Orlov. V. N., Chichurin A. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order // Modeling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2020. Vol. 1425. p. 012129.

[9] Hill J. M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings // Internat. J. Solids Structures. 1977. Vol. 13. p. 93–104. ISSN 1998-4812.

[10] Ockendon J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems // Proc. Symp. Moving Boundary Problems / Ed. by D. G. Wilson, A. D. Solomon, P. T. Boggs. New York: 1978. P. 129–145.

[11] Axford R. A. The exact solution of singular arc problems in reactor core optimization // Proc. Nuclear Utilities Planning Methods Symp. Tennessee. 1974. P. 1–14.

Viktor Nikolaevich Orlov, Dr. Phys. & Math. Sci., Associate Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Ludmila Vitaljevna Mustafina, Undergraduate, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

[12] R. R. A. A. Differential equations invariant urber two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion // Los Alamos Report. 1970. LA - 4514, UC - 34).
[13] Yuqiang F. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. Vol. 56. p. 2507–2514.
[14] Orlov V. N., Razakova R. V. Approximate solution of a class of nonlinear differential equations of the third order in the field of analyticity // Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State. 2020. T. 1, № 43. c. 92–99.
[15] Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modeling the complex structures // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 365.
[16] Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk, E. P. Linnik et al. // Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ.im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat.Sci. 2018. no. 4. p. 24–35.
[17] Orlov V.N., Yves B. B. The existence theorem for the solution of one class of fourth-order nonlinear differential equations with polynomial right-hand side of the second degree in the neighborhood of a movable singular point // Vestnik Bashkirskogo universiteta. 2018. T. 23, № 4. C. 980–986.
[18] Orlov V. N., Zheglova Y. G. Mathematical modeling of building structures and nonlinear differential equations // International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. 2020. Vol. 11, no. 3. p. 2050026.
[19] Orlov V. N., Lukashevich N. A. Investigation of the approximate solution of the second Penleve equation // Differentsialnyye uravneniya. 1989. T. 25, № 10. C. 1829–1832.
[20] Orlov V. N. Exact boundaries for the approximate solution of the Abel differential equation in the vicinity of the approximate value of a moving singular point in the complex domain // Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State. 2010. № 2 (8). c. 399–405.
[21] Orlov V. N., Leontyeva T. Yu. On the expansion of the domain for an approximate analytical solution of a class of second-order nonlinear differential equations in the complex domain // Vestn. Sam. Gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki,. 2020. T. 24. c. 1.