

Ю. В. Немировский^{1,2}, С. В. Тихонов³

ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ ФИЗИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК

¹Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия

³Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В работе рассматриваются экспериментальные диаграммы деформирования бетонов марок В10, В30, В50. Методом наименьших квадратов приведены аппроксимации диаграмм деформирования полиномами второго и третьего порядка. Указанные расчеты выполнены как для случая одинаковых коэффициентов для зон растяжения и сжатия, так и различных. Приведен алгоритм решения задачи продольно-поперечного изгиба балки в случае использованных данных аппроксимаций диаграмм.

Ключевые слова: балка, диаграмма деформирования бетона, продольно-поперечный изгиб, статическая определимость, изгибающий момент, композиты

DOI: 10.37972/chgru.2021.49.3.008

УДК: 539.374

Направим ось OX вдоль оси балки, ось OZ вертикально вверх, начало координат поместим на нижнюю грань балки. Рассмотрим трехслойную бетонную балку, имеющую однотавровое поперечное сечение (рис. 1), которое одинаковое вдоль всей ее длины, причем ось OZ являются осью симметрии для рассматриваемого сечения.

Обозначим через h_1 , h_2 , h_3 – высоты соответственно первого, второго и третьего слоя, номера соответствующий слоев обозначим на рисунке римскими цифрами,

© Немировский Ю. В., Тихонов С. В. 2021

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiruy@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия, профессор Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович

e-mail: strangheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий Чувашского государственного университета им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00038.

Поступила 05.11.2021

причем примем $h_0 = 0$. Длины слоев в поперечном сечении для рассматриваемого од-
нотаврового поперечного сечения примем равными $2b_1, 2b_2, 2b_2$ для соответствующих
слоев.

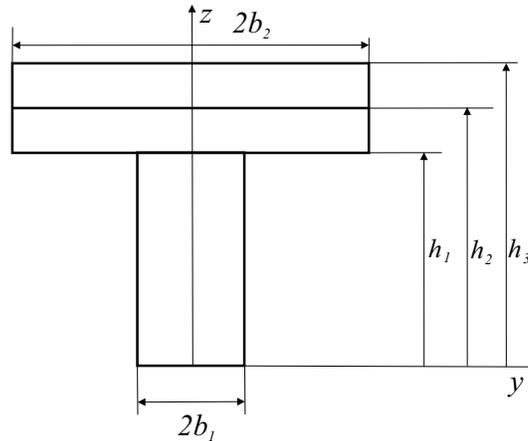


Рис. 1. Поперечное сечение трехслойной балки

Обозначим через σ_*^+, σ_*^- пределы прочности бетона, $\varepsilon_*^+, \varepsilon_*^-$ – предельные деформации
предразрушения, E^+, E^- – начальные модули упругости бетона соответственно
при растяжении и сжатии.

На диаграмме деформирования бетона отметим характерные точки D^-, C^-, C^+, C^+ .
Участки C^-OC^+ будут соответствовать участкам сохранения сплошности, а
участки D^-, C^- и C^+, D^+ соответствуют участкам нарушения сплошности сопро-
вождающихся интенсивными процессами трещинообразования.

Значение указанных точек по результатам экспериментов [1, 2] для бетонов марок
В10, В30, В50 приведены в таблицах 1, 2. В указанной таблице и дальнейшем во всех
расчетах все величины, имеющие размерность напряжения будем относить к пределу
прочности σ_*^- бетона В10 при сжатии. Все величины имеющие размерность длины
будем относить к длине балки l . Через C обозначим относительную стоимость бетона
по отношению к бетону марки В10.

Марка бетона	C	σ_*^-	σ_{**}^-	$\varepsilon_*^-, 10^{-2}$	$\varepsilon_{**}^-, 10^{-2}$	E^-
В10	1	1	0,35	0,2	0,35	2379
В30	1,23	2,91	2,14	0,2	0,3	4304
В50	1,45	4,8	4,38	0,2	0,25	5160

Таблица 1. Значения физических параметров бетонов

Закон деформирования бетона для каждого из слоя будем принимать в виде ап-
проксимации полиномом второго или третьего порядка [3, 4].

В дальнейших расчетах можно использовать для аппроксимации диаграммы де-
формирования бетона $\sigma = f(\varepsilon)$ для зон растяжения и сжатия одни и те же функции

Марка бетона	σ_*^+	σ_{**}^+	$\varepsilon_*^+, 10^{-2}$	$\varepsilon_{**}^+, 10^{-2}$	E^+
В10	0,11	0,08	0,015	0,02	2358
В30	0,24	0,19	0,015	0,02	4258
В50	0,3	0,28	0,015	0,02	5109

Таблица 2. Значения физических параметров бетонов

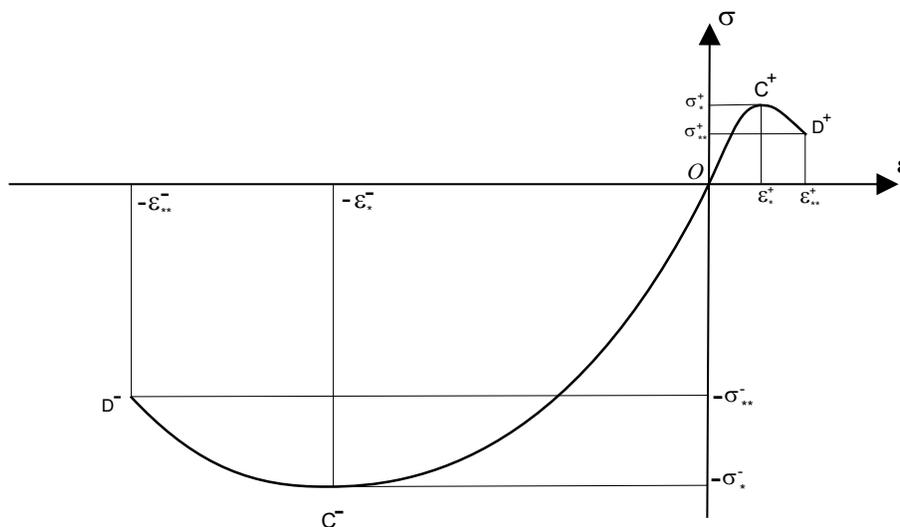


Рис. 2. Диаграмма деформирования бетона

с одними и те же коэффициентами. Тогда для случая полинома второго порядка аппроксимация диаграммы будет иметь вид (1), а в случае полинома третьего порядка (2).

$$\sigma_i = A_{1i}^2 \varepsilon + A_{2i}^2 \varepsilon^2, \quad (1)$$

$$\sigma_i = A_{1i}^3 \varepsilon + A_{2i}^3 \varepsilon^2 + A_{3i}^3 \varepsilon^3, \quad (2)$$

где коэффициенты $A_{1i}^2, A_{2i}^2, A_{1i}^3, A_{2i}^3, A_{3i}^3$ можно определить из реальных диаграмм растяжения-сжатия бетонов.

В случае если использовать для зон растяжения и сжатия одни и те же функции, но с различными коэффициентами, тогда аппроксимации будут иметь вид (3), (4).

$$\sigma_i^\pm = A_{1i}^{2\pm} \varepsilon + A_{2i}^{2\pm} \varepsilon^2, \quad (3)$$

$$\sigma_i^\pm = A_{1i}^{3\pm} \varepsilon + A_{2i}^{3\pm} \varepsilon^2 + A_{3i}^{3\pm} \varepsilon^3, \quad (4)$$

где знаки «+» и «-» соответствуют зонам растяжения и сжатия соответственно.

Примеры расчета указанных коэффициентов, используя результаты экспериментов [1, 2], для аппроксимаций (3), (4) методом наименьших квадратов приведены в таблицах 3, 4.

Марка бетона	A_1^{3+}	A_2^{3+}	A_3^{3+}	A_1^{2+}	A_2^{2+}
В10	3864,57	$-4,4 * 10^7$	$1,57 * 10^{11}$	2379,41	$-1,14 * 10^7$
В30	7770,69	$-8,55 * 10^7$	$2,99 * 10^{11}$	4920,89	$-2,31 * 10^7$
В50	11578,48	$-1,38 * 10^8$	$5,03 * 10^{11}$	6844,36	$-3,44 * 10^7$

Таблица 3. Значения коэффициентов аппроксимации диаграммы деформирования бетонов при растяжении полиномами второго и третьего порядка для соотношений (3), (4)

Марка бетона	A_1^{3-}	A_2^{3-}	A_3^{3-}	A_1^{2-}	A_2^{2-}
В10	2318,2	$1,82 * 10^6$	$4,59 * 10^8$	1532,63	542483,2160
В30	6052,14	$4,62 * 10^6$	$1,17 * 10^9$	4074,12	$1,35 * 10^6$
В50	10793,97	$8,44 * 10^6$	$2,15 * 10^9$	6997,58	$2,4 * 10^6$

Таблица 4. Значения коэффициентов аппроксимации диаграммы деформирования бетонов при сжатии полиномами второго и третьего порядка для соотношений (3), (4)

Аналогичные расчеты коэффициентов для аппроксимаций (1), (2) методом наименьших квадратов приведены в таблице 5.

Марка бетона	A_1^3	A_2^3	A_3^3	A_1^2	A_2^2
В10	1875,87	$1,17 * 10^6$	$2,43 * 10^8$	1493,78	519354,19
В30	4151,89	$1,78 * 10^6$	$2,1 * 10^8$	3840,79	$1,22 * 10^6$
В50	7009,38	$3,01 * 10^6$	$3,36 * 10^8$	6495,96	$2,11 * 10^6$

Таблица 5. Значения коэффициентов аппроксимации диаграммы деформирования бетонов при растяжении полиномами второго и третьего порядка для соотношений (1), (2)

Диаграммы построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (3), (4) приведены на рисунках 3, 4, 5.

Диаграммы построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (1), (2) приведены на рисунках 6, 7, 8.

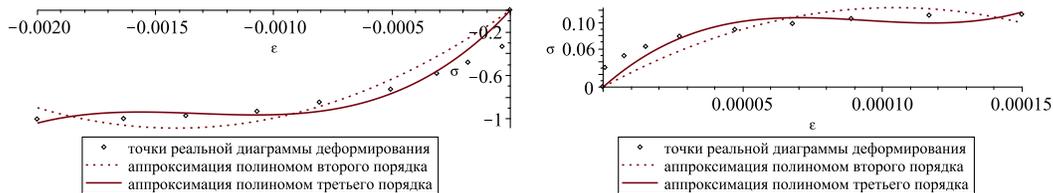


Рис. 3. Диаграммы построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (3), (4) для бетонов марки В10

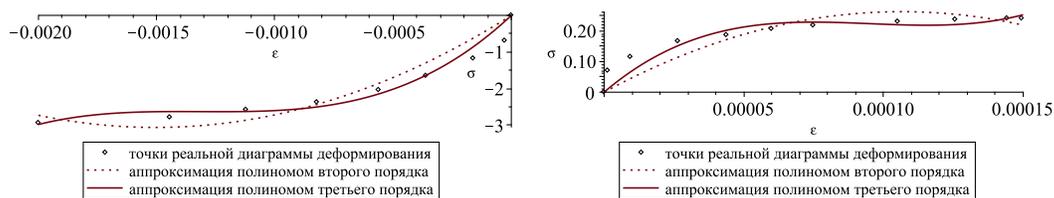


Рис. 4. Диаграммы построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (3), (4) для бетонов марки В30

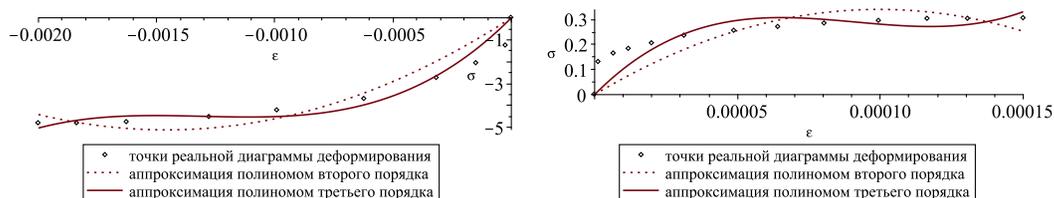


Рис. 5. Диаграммы построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (3), (4) для бетонов марки В50

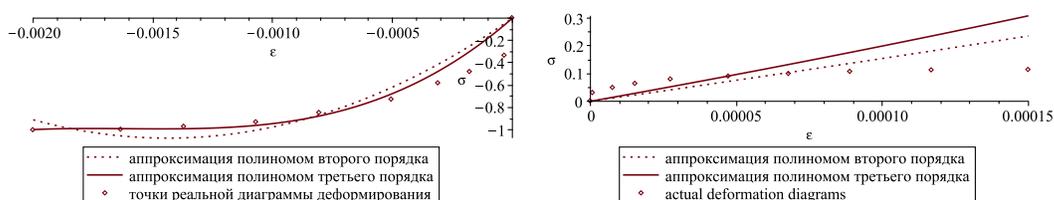


Рис. 6. Диаграммы построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (1), (2) для бетонов марки В10

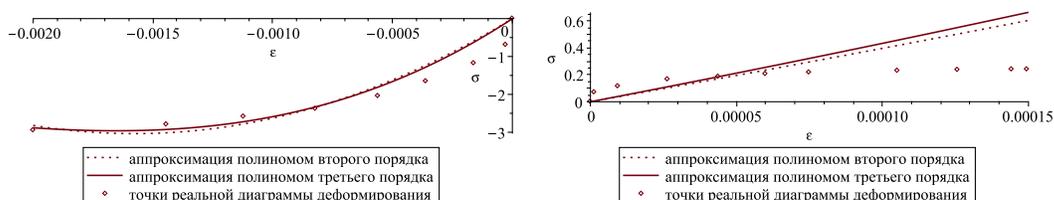


Рис. 7. Диаграммы построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (1), (2) для бетонов марки В30

В зависимости от действующих нагрузок и формы поперечного сечения в сечении (рис. 1) будут зоны растяжения и сжатия, которые будут разделены нейтральной линией, положение которой будет определяться координатой z_1 .

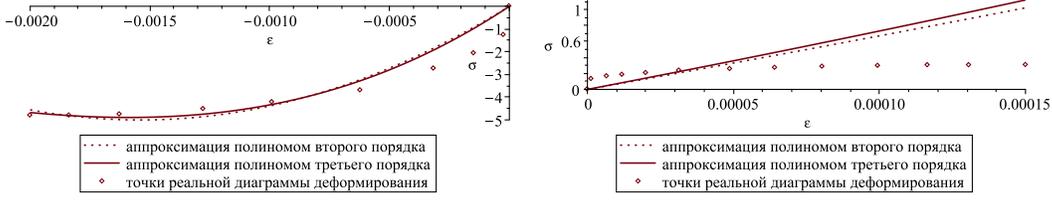


Рис. 8. Диаграммы построенные по экспериментальным данным и по аппроксимирующим зависимостям (1), (2) для бетонов марки В50

Рассмотрим случай, когда связь напряжений и деформаций описывается зависимостями (1), т.е. будем полагать, что для описания законов деформирования будут использоваться одинаковые кривые как для зон растяжения, так и для зон сжатия.

Будем предполагать справедливыми гипотезы Кирхгофа-Лява

$$\begin{aligned}\varepsilon(x, z) &= \varepsilon_0(x) - z\kappa_y(x), \\ \varepsilon_0(x) &= \frac{du_0}{dx}, \quad \kappa_y(x) = \frac{d^2w}{dx^2},\end{aligned}\tag{5}$$

где $u_0(x)$ – перемещение вдоль отчетной оси OX балки, $w(x)$ – прогиб балки, $\kappa_y(x)$ – кривизна балки.

При $z = z_1$ деформация отсутствует, т.е. $\varepsilon(x, z) = 0$, тогда для координаты нейтральной линии из (5) получим

$$z_1(x) = \frac{1}{\kappa_y(x)}\varepsilon_0(x) = \frac{1}{\frac{d^2w}{dx^2}} \frac{du_0}{dx}.\tag{6}$$

величины продольного усилия и изгибающего момента будут иметь вид

$$N = 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i} (A_{1i}^2 \varepsilon + A_{2i}^2 \varepsilon^2) dy,\tag{7}$$

$$M = 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i} (A_{1i}^2 \varepsilon + A_{2i}^2 \varepsilon^2) z dy.\tag{8}$$

Используя выражение для деформаций через кривизну (5), соотношения (7), (8) примут вид

$$\begin{aligned}N &= 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i} \left(A_{1i}^2 (\varepsilon_0(x) - z\kappa_y(x)) + A_{2i}^2 (\varepsilon_0(x) - z\kappa_y(x))^2 \right) dy, \\ M &= 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_0^{b_i} \left(A_{1i}^2 (\varepsilon_0(x) - z\kappa_y(x)) + A_{2i}^2 (\varepsilon_0(x) - z\kappa_y(x))^2 \right) z dy.\end{aligned}$$

Указанные соотношения перепишем в виде

$$N = B_1\varepsilon_0(x) + B_2\kappa_y(x) + B_3\varepsilon_0^2(x) + B_4\varepsilon_0(x)\kappa_y(x) + B_5\kappa_y^2(x), \quad (9)$$

где

$$B_1 = 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} A_{1i}^2 b_i dz, \quad B_2 = -2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} A_{1i}^2 b_i z dz, \quad B_3 = 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} A_{2i}^2 b_i z dz, \\ B_4 = -2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} A_{2i}^2 b_i z dz, \quad B_5 = 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} A_{2i}^2 b_i z^2 dz,$$

$$M = C_1\varepsilon_0(x) + C_2\kappa_y(x) + C_3\varepsilon_0^2(x) + C_4\varepsilon_0(x)\kappa_y(x) + C_5\kappa_y^2(x), \quad (10)$$

где

$$C_1 = 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} A_{1i}^2 b_i z dz, \quad C_2 = -2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} A_{1i}^2 b_i z^2 dz, \quad C_3 = 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} A_{2i}^2 b_i z^2 dz, \\ C_4 = -2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} A_{2i}^2 b_i z^2 dz, \quad C_5 = 2 \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} A_{2i}^2 b_i z^3 dz.$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{dN}{dx} = -q_1\psi(x), \quad \frac{d^2M}{dx^2} = q_0\varphi(x), \quad Q = \frac{dM}{dx}, \quad (11)$$

где q_0, q_1 – амплитуды поперечной и продольной нагрузок, $\varphi(x), \psi(x)$ – некоторые функции определяющие распределение нагрузок по длине балки.

Если поставленная задача является статически определимой, тогда величины продольного усилия N и изгибающего момента M являются известными функциями – $N_1(x)$ и $M_1(x)$ соответственно.

Тогда получим систему для определение перемещений $u_0(x), w_0(x)$

$$B_1 \frac{du_0}{dx} + B_2 \frac{d^2w}{dx^2} + B_3 \left(\frac{du_0}{dx} \right)^2 + B_4 \frac{du_0}{dx} \frac{d^2w}{dx^2} + B_5 \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 = N_1(x), \quad (12) \\ C_1 \frac{du_0}{dx} + C_2 \frac{d^2w}{dx^2} + C_3 \left(\frac{du_0}{dx} \right)^2 + C_4 \frac{du_0}{dx} \frac{d^2w}{dx^2} + C_5 \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 = M_1(x),$$

где начальные условия определяются из условия закрепления балки.

Найденные решения будут справедливы, если деформация не превышает соответствующих предельных значений $-\varepsilon_*^- < \varepsilon < \varepsilon_*^+$.

В случае статически неопределимой системы выражения (7), (8) необходимо подставить в уравнения равновесия (11). Полученную систему дифференциальных уравнений можно решать каким-нибудь численным методом. Примеры решения указанных задач методом Бубнова-Галеркина в математическом пакете Maple приведены в работах [5–9, 9, 10].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Иващенко Е. И. Разработка методов расчета железобетонных элементов на основе действительных диаграмм деформирования материалов с учетом фактического изменения площади их поперечных сечений // дис. ... канд. техн. наук. Воронеж, 2006. 230 с.
- [2] Маилян Л. Р., Иващенко Е. И. Расчет железобетонных элементов на основе действительных диаграмм деформирования материалов. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовский гос. строит. ун-т, 2006. 222 с.
- [3] Мищенко А. В. Прямая и обратная задачи деформирования слоистых стержней с учетом физической нелинейности // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: труды XIX Всероссийской конференции, Бийск, 28-31 августа 2005 г. Параллель, 2005. С. 184–188.
- [4] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. On the stability loss of a rapidly rotating polycrystalline disc // *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55(6). p. 767–775.
- [5] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб многослойных стержней из бетонов и сталефибробетонов // *Известия Алтайского государственного университета*. 2021. № 1(117). С. 40–46.
- [6] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Предельное состояние бетонных и железобетонных стержней при сложном и продольно-поперечном изгибе // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2020. № 1. С. 60–73.
- [7] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Влияние формы поперечного сечения многослойного бетонного стержня на несущую способность при продольно-поперечной нагрузке // *Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник тезисов 9-й всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, посвященной 30-летию ИПРИМ РАН*. 2019. С. 185–189.
- [8] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-Transverse Bending of Reinforced Concrete Rods on The Basis of Nonlinear Diagrams of Deformation of Phase Materials // *AIP Conference Proceedings*. 2021. Vol. 2448. p. 020024.
- [9] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Влияние формы поперечного сечения и силы тяжести на деформирование многослойных бетонных стержней при квазистатических нагрузках // *Моделирование и механика конструкций*. 2020. № 12. С. 11–49.
- [10] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear rods by quasi-static loads and mass forces // *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2021. Vol. 170. P. 447–457.

Yu. V. Nemirovskii, S. V. Tikhonov

LONGITUDINAL-TRANSVERSE BENDING OF PHYSICALLY NONLINEAR REINFORCED CONCRETE BEAMS

S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia

Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia

I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. The paper considers experimental deformation diagrams of concrete grades B10, B30, B50. The approximation of the deformation diagrams by polynomials of the second and third order is given by the least squares method. The calculations were performed both for the case of the same coefficients for the zones of tension and compression, and different ones. An algorithm for solving the problem of longitudinal-transverse bending of a beam in the case of the used data of approximations of diagrams is given.

Keywords: beam, concrete deformation diagram, longitudinal-transverse bending, static definability, bending moment, composites

REFERENCES

- [1] Ivaschenko E. I. Development of methods for calculating reinforced concrete elements based on actual deformation diagrams of materials taking into account the actual change in the area of their cross-sections // dis. ... Cand. tech. sciences. Voronezh, 2006. 230 p.
- [2] Mayilyan L., Ivaschenko E. Calculation of reinforced concrete members based on actual material deformation diagrams. Rostov-on-Don: Publishing house of RSBU, 2006. 222 p.
- [3] Mishchenko A. V. Direct and inverse problems of deformation of layered bars taking into account physical nonlinearity // Numerical methods for solving problems of the theory of elasticity and plasticity: proceedings of the XIX All-Russian conference, Biysk, 28-31 August 2005. Parallel, 2005. P. 184–188.
- [4] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. On the stability loss of a rapidly rotating polymetallic disc // Mechanics of Solids. 2020. Vol. 55 (6). P. 767–775.
- [5] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of multilayer concrete and steel fiber reinforced concrete rods // Bulletin of Altai State University. 2021. no. 1 (117). P. 40–46.
- [6] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Limit state of concrete and reinforced concrete rods in complex and longitudinal-transverse bending // Vestnik PNIPU. Mekhanika. 2020. no. 1. p. 60–73.
- [7] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Influence of the cross-sectional shape of a multilayer concrete bar on the bearing capacity under longitudinal-transverse load // Mechanics of composite materials and structures, complex and heterogeneous media. Collection of abstracts of the 9th all-Russian scientific conference with international participation named after I.F. Obraztsov and Yu.G. Yanovsky dedicated to the 30th anniversary of IPRIM RAS. 2019.
- [8] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-Transverse Bending of Reinforced Concrete Rods on The Basis of Nonlinear Diagrams of Deformation of Phase Materials // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2448. p. 020024.
- [9] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Influence of the cross-sectional shape and gravity on the deformation of multilayer concrete rods under quasi-static loads // Structural Modeling and Mechanics. 2020. no. 12. P. 11–49.
- [10] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear rods by quasi-static loads and mass forces // Lecture Notes in Civil Engineering. 2021. Vol. 170. P. 447–457.

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.
Tikhonov Sergey Vladimirovich, PHD, Assoc. Prof., I. Ulyanov Chuvash State