

Б. Г. Миронов<sup>1</sup>, А. В. Никитин<sup>2</sup>

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ПЛОСКОСТИ ИЗ АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

<sup>1</sup>Российский университет транспорта, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>Чебоксарский институт (ф) Московского политехнического университета,  
г. Чебоксары, Россия

**Аннотация.** Рассматривается упругопластическое положение плоскости из анизотропного материала, в котором имеется эллиптическое отверстие. Анизотропия – умение кристалла выражать разнообразные качества в разных направлениях. Присутствие данного качества в простейшем виде выражается только у монокристаллов. У поликристаллов анизотропия тела в основном (макроскопически) способна никак не выражаться из-за беспорядочной ориентировки микрокристаллов, или совершенно никак не проявляется, за исключением специальных случаев. При упорядоченном расположении химических частиц силы взаимодействия между ними и межзатомные расстояния оказываются неодинаковыми, именно это и является причиной анизотропии кристаллов. Также это может быть и асимметрия его молекул. Неодинаковость макроскопически проявляется, лишь не симметричностью кристаллической структуры. Актуальность объясняется влиянием анизотропии на напряженно-деформированное состояние различных конструкций и тел.

**Ключевые слова:** отверстие, плоскость, анизотропия, упругопластическое состояние.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.50.4.002

УДК: 539.735

В статье рассматривается задача о трансляционной анизотропии при растяжении бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием (рис. 1). Условие пластичности представлено [1]:

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 + (\tau_{xy} - k_3)^2 = k_0^2, \quad k_0, k_1, k_2, k_3 - const, \quad (1)$$

---

© Миронов Б. Г., Никитин А. В., 2021

*Миронов Борис Гурьевич*

**e-mail:** mbg.chspru@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математика и естественные науки», Российский университет транспорта, г. Москва, Россия.

*Никитин Андрей Витальевич*

**e-mail:** ligalas5@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чебоксарский институт (ф) Московского Политехнического университета, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 01.11.2021

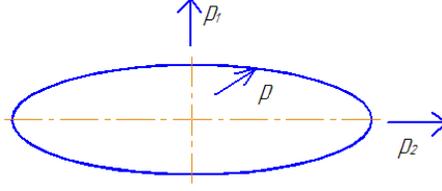


Рис. 1. Бесконечная плоскость с эллиптическим отверстием.

где  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  – компоненты напряжения,  $k_0$  – предел текучести.

Величины имеющие размерность напряжения относятся к пределу текучести  $k_0$  и рассматриваются безразмерными. Индекс « $p$ » приписан наверху к компонентам напряжений в пластической зоне индекс, « $e$ » – компонентам в упругой зоне. Условие (1) имеет вид:

$$\left( \frac{\sigma_x^p - \sigma_y^p}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + (\tau_{xy}^p - k_3)^2 = 1 \quad (2)$$

По условию (2), анизотропия показана в прямоугольной системе координат  $x, y$ .

Взаимодействие между напряжениями в прямоугольной системе координат  $x, y$  и в полярной системе координат  $\rho, \theta$  представлена [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (2), (3) в полярных координатах условие пластичности имеет вид:

$$\left( \frac{\sigma_\rho^p + \sigma_\theta^p}{2} \right)^2 + (\tau_{\rho\theta}^p)^2 - 2R \left( \frac{\sigma_\rho^p + \sigma_\theta^p}{2} \right) \cos(2\theta + \mu) - 2\tau_{\rho\theta}^p \sin(2\theta + \mu) + R^2 - 1 = 0, \quad (4)$$

где

$$R = \sqrt{\left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 + k_3^2}, \quad \frac{k_1 - k_2}{2R} = \cos \mu, \quad \frac{k_3}{2} = \sin \mu.$$

Допустим:

$$k_1 = \delta_1 k'_1, \quad k_2 = \delta_1 k'_2, \quad k_3 = \delta_1 k'_3, \quad (5)$$

Отметим:

$$R = \delta_1 R', \quad R' = \sqrt{\left( \frac{k'_1 - k'_2}{2} \right)^2 + k'_3}. \quad (6)$$

В последующем допустим:  $\delta_1 = g_1 \delta_1$ , и  $0 \leq g_1 \leq 1$

Уравнения равновесия имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Станем рассматривать, что нормальное давление  $p$  действует на контуре отверстия, взаимно перпендикулярными усилиями  $p_1, p_2$  плоскость растягивается на бесконечности.

При переходе системы координат в полярную:

$$\sigma_\rho = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta,$$

в упругой зоне, граничные условия запишем в виде:

$$\sigma_\rho^e|_{\rho=\infty} = q - \delta_2 \cos 2\theta, \quad \sigma_\theta^e|_{\rho=\infty} = q + \delta_2 \cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^e|_{\rho=\infty} = \delta_2 \sin 2\theta,$$

где

$$\delta_2 = \frac{p_1 - p_2}{2}, \quad \delta_2 = g_2 \delta, \quad 0 \leq g_2 \leq 1, \quad q = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

Допустим, то что будущее решение находится в зависимости от определенного параметра  $\delta$ , решение будем искать в следующем в виде:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma'_{ij} \delta + \sigma''_{ij} \delta^2 + \dots, \quad \rho_s = \rho_s^{(0)} + \rho'_s \delta + \rho''_s \delta^2 + \dots, \quad (8)$$

где  $\rho_s$  – радиус пластической зоны.

В последующем присвоим всем компонентам индекс « $p$ » в пластической области, а индекс « $e$ » в упругой области. Величины, считаются безразмерными и отнесенными к пределу текучести в нулевом приближении  $k_0$  в том случае если имеют размерность напряжения, а линейные размеры будут считаться безразмерными и отнесенными к радиусу пластической зоны в том же приближении  $\rho_s^{(0)}$ .

Из (4), (7), (8), приобретаем следующее условия сопряжения напряжений на границе раздела пластической и упругой областях и граничных условий [3]:

$$\sigma_\rho^{(0)p} = -p + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_\theta^{(0)p} = -p + 2 + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad (9)$$

$$\sigma_\rho^{(0)e} = q - \frac{q + p + 2 \ln \alpha}{\rho^2}, \quad \sigma_\theta^{(0)e} = q + \frac{q + p + 2 \ln \alpha}{\rho^2}. \quad (10)$$

Представляется соотношениями радиус упругопластической зоны в начальном приближении:

$$2 \ln \alpha = -p - q + 1. \quad (11)$$

Из (4) в первоначальном приближении имеет роль:

$$\sigma_\rho^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)} = 2R' \cos(2\theta + \mu) \quad (12)$$

Уравнения равновесия предположим:

$$\sigma_p'^p = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta'^p = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}'^p = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \quad (13)$$

Из (12), (13) следует:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = -\rho^2 \left[ 2R' \cos(2\theta + \mu) \right]. \quad (14)$$

В первоначальном приближении условия соответственно [2] выглядят:

$$\sigma_\rho^{(I)p}|_{\rho=\alpha} = -2d_1 \cos 2\theta \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p}|_{\rho=\alpha} = -4d_1 \sin 2\theta \quad (15)$$

В пластической зоне решение будет состояться из (13), (14), (15):

$$\begin{aligned}\sigma_p^{(I)p} = \sigma_\theta^{(I)p} &= -R' \left( \frac{\alpha}{\rho} \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) - 1 \right) g_1 \cos(2\theta + \mu) - \\ &\quad - \left( \frac{2d_1\alpha}{\rho} \cos 2\theta \right) \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) \\ \tau_{p\theta}^{(I)p} &= R' \left( \frac{\alpha}{\rho} \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right) - 1 \right) g_1 \sin(2\theta + \mu) - \\ &\quad - \left( \frac{4d_1\alpha}{\rho} \sin 2\theta \right) \cos \left( \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right)\end{aligned}\quad (16)$$

Установим напряжения в упругой области в соответствии [4, 5]:

$$\begin{aligned}\sigma_p^{(I)e} &= - \left( 1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) g_2 \cos 2\theta + \\ &+ \left( -\frac{1}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2} \right) \left( -R' \left[ \alpha \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right) - 1 \right] g_1 \cos(2\theta + \mu) - \right. \\ &\quad \left. - (2d_1\alpha \cos 2\theta) \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right) \right) \\ &+ \left( \frac{2}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) \left( R' \left( \alpha \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) + \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right) - 1 \right) g_1 \cos(2\theta + \mu) - \right. \\ &\quad \left. - (4d_1\alpha \cos 2\theta) \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right) \\ \sigma_\theta^{(I)e} &= \left( 1 + \frac{3}{\rho^4} \right) g_2 \cos 2\theta + \\ &+ \left( \frac{1}{\rho^4} \right) \left( -R' \left[ \alpha \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right) - 1 \right] g_1 \cos(2\theta + \mu) - \right. \\ &\quad \left. - (2d_1\alpha \cos 2\theta) \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right) \right) + \\ &+ \left( \frac{-2}{\rho^4} \right) \left( R' \left[ \alpha \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) + \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right) - 1 \right] g_1 \cos(2\theta + \mu) - \right. \\ &\quad \left. - (4d_1\alpha \cos 2\theta) \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right) \right) \\ \tau_{p\theta}^{(I)e} &= - \left( -1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) g_2 \sin 2\theta + \\ &+ \left( -\frac{1}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2} \right) \left( -R' \left[ \alpha \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right) + 1 \right] g_1 \sin(2\theta + \mu) - \right. \\ &\quad \left. - (2d_1\alpha \cos 2\theta) \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right) \right) + \\ &+ \left( \frac{2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} \right) \left( R' \left[ \alpha \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) + \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right) - 1 \right] g_1 \sin(2\theta + \mu) - \right. \\ &\quad \left. - (4d_1\alpha \sin 2\theta) \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right) \right)\end{aligned}\quad (17)$$

Из (16), (17) составим радиус в первоначальном приближении упругопластической области:

$$\begin{aligned}\rho_s^{(I)} &= \frac{1}{4} (\sigma_\theta^{(I)e} - \sigma_\theta^{(I)p}) = g_2 \cos 2\theta - \\ &- R' \left\{ \frac{\alpha}{2} \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) + \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right) - 1 \right\} g_1 \cos(2\theta + \mu) - \\ &- (d_1\alpha \cos 2\theta) \left( \cos \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) - \sqrt{3} \sin \left( \sqrt{3} \ln \alpha \right) \right)\end{aligned}\quad (18)$$

Следует, напряженное положение в упругой (17) и пластической (16) определяется, изменением границы пластической зоны (18).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д.Д., Максимова Л. А., Миронов Б.Г. О соотношениях теории трансляционной идеально-пластической анизотропии в случае плоской деформации // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 2. С. 41–43.
- [2] Ивлев Д.Д., Ершов. Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
- [3] Миронов Б. Г., Никитин А. В. Предельное состояние многослойной анизотропной толстостенной трубы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. Т. 4, № 22. с. 58–67.

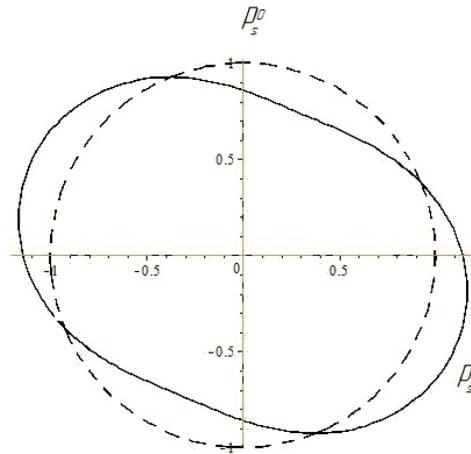


Рис. 2. Радиус раздела упругой и пластической областей.

- [4] Никитин А. В. Предельное состояние неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. Т. 1, № 23. с. 60–70.
- [5] Никитин А. В. Определение деформированного состояния толстостенной линейно-неоднородной трубы при трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. Т. 3, № 17. с. 142–150.

*B. G. Mironov<sup>1</sup>, A. V. Nikitin<sup>2</sup>*

#### DETERMINATION OF THE ELASTIC-PLASTIC STATE OF A PLANE FROM AN ANISOTROPIC MATERIAL WITH AN ELLIPTICAL HOLE

<sup>1</sup>*Russian University of transport, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Cheboksary Institute (f) of Moscow Polytechnic University, Cheboksary, Russia*

**Abstract.** The elastic-plastic position of a plane made of an anisotropic material in which there is an elliptical hole is considered. Anisotropy is the ability of a crystal to express various qualities in different di-rections. The presence of this quality in its simplest form is expressed only in single crystals. In polycrystals, the anisotropy of the body is mainly (macroscopically) capable of not being expressed in any way due to the disorderly orientation of microcrystals, or does not manifest itself at all, ex-cept in special cases. With an ordered arrangement of chemical particles, the interaction forces be-tween them and the interatomic distances are not the same, and this is the reason for the anisotropy of crystals. It may also be the asymmetry of its molecules. The disparity is macroscopically mani-fested, only not by the symmetry of the crystal structure. The activity is explained by the influence of anisotropy on the stress-strain state of various structures and bodies.

**Keywords:** hole, plane, anisotropy, elastic-plastic state.

---

*Mironov Boris Gurjevich, Dr. of Sci. Phys. & Math., Professor, Russian University of transport, Moscow, Russia.*

**REFERENCES**

- [1] Ivlev D., Maksimova L. A., Mironov B. G. On the relations of the theory of translational ideal-plastic anisotropy in the case of plane deformation // *Izv. RAN. MTT.* 2011. no. 2. P. 41–43.
- [2] Ivlev D., Ershov. L. Perturbation method in the theory of an elastoplastic body. M.: Nauka, 1978. 208 p.
- [3] Mironov B. G., Nikitin A. V. Limit state of multilayer anisotropic thick-walled pipe // *Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State.* 2014. Vol. 4, no. 22. p. 58–67.
- [4] Nikitin A. V. Limit state of an inhomogeneous pipe under the influence of internal pressure // *Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State.* 2015. Vol. 1, no. 23. p. 60–70.
- [5] Nikitin A. V. Determination of the deformed state of a thick-walled linearly inhomogeneous pipe with translational anisotropy // *Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of Limit State.* 2013. Vol. 3, no. 17. p. 142–150.