

В. И. Гультияев, В. Г. Зубчанинов, А. А. Алексеев, И. А. Саврасов

**ПРОВЕРКА ПОСТУЛАТА ИЗОТРОПИИ ПРИ СЛОЖНОМ
КИНЕМАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ МАТЕРИАЛА СТАЛЬ 45 ПО
ТРАЕКТОРИЯМ ДЕФОРМИРОВАНИЯ В ВИДЕ
ПОЛУОКРУЖНОСТЕЙ**

Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия

Аннотация. В работе представлены результаты экспериментальной проверки постулата изотропии А.А. Ильюшина при сложном упругопластическом деформировании тонкостенных трубчатых образцов, выполненных из материала сталь 45, по траекториям в виде полуокружностей (жесткое или кинематическое нагружение). Экспериментальные данные получены на автоматизированном расчетно-экспериментальном комплексе СЧ-ЭВМ. Приводятся и обсуждаются результаты 4 экспериментов, в которых были реализованы траектории деформирования в виде полуокружностей постоянной кривизны 133,3. Экспериментально подтверждается, что для реализованных сложных траекторий постоянной кривизны постулат изотропии выполняется как по скалярным, так и векторным свойствам.

Ключевые слова: пластичность, сложное нагружение, постулат изотропии, экспериментальные данные, траектория деформирования, векторные и скалярные свойства материала.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.50.4.003

УДК: 579.3

© Гультияев В. И., Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Саврасов И. А., 2021

Гультияев Вадим Иванович

e-mail: vig0@mail.ru, доктор технических наук, заведующий кафедрой автомобильные дороги, основания и фундаменты, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Зубчанинов Владимир Георгиевич

e-mail: vlgzub@gmail.com, доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия,

Алексеев Андрей Алексеевич

e-mail: alexeew@bk.ru, кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия,

Саврасов Иван Александрович

e-mail: flam_47@mail.ru, аспирант кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Поступила 08.11.2021

Некоторые элементы конструкций и машин работают в условиях сложного (непропорционального) нагружения и деформирования, и допускают в своей работе ограниченные пластические деформации. Поэтому исследования закономерностей упругопластического деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении и деформировании является важной и актуальной проблемой теории пластичности и экспериментальной механики. Результаты большого количества экспериментальных исследований при сложном нагружении материалов и варианты математических моделей теории пластичности частично представлены в работах [1-10]. Одно из основных положений теории пластичности – постулат изотропии А.А. Ильюшина [1, 2]. Постулат изотропии утверждает инвариантность связи векторов напряжений и деформаций относительно преобразований вращения и отражения в линейных координатных евклидовых пятимерных пространствах. Его сущность состоит в том, что при ортогональных преобразованиях вращения и отражения траекторий в векторном девиаторном пространстве с базисом А.А. Ильюшина образ процесса деформирования либо нагружения сохраняется, т.е. сохраняются скалярные и векторные свойства конструкционных материалов. Постулат изотропии был экспериментально проверен для различных конструкционных материалов на разных траекториях деформирования и нагружения [11-17]. Особый интерес при проверке постулата изотропии представляют траектории деформирования, на которых сложное (непропорциональное) нагружение реализуется с самого начала траектории.

В работе [17] отмечается, что ортогональные нагружения могут вносить некоторые поправки в зависимость между напряжениями и деформациями при пластическом деформировании. Поэтому, основной задачей в данной работе, является проверка постулата изотропии А.А. Ильюшина на криволинейных траекториях постоянной кривизны в виде полуокружностей с радиусом 0,75 %, получаемых при ортогональных преобразованиях вращения исходной траектории.

Испытания тонкостенных трубчатых образцов из стали 45 проводились на автоматизированном комплексе СН-ЭВМ (рис. 1) в лаборатории механических испытаний кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета. На рисунке 1 представлен общий вид испытательного комплекса СН-ЭВМ.

Тонкостенные цилиндрические оболочки имели длину рабочей части $l = 110$ мм, толщину стенки $h = 1$ мм и радиус срединной поверхности $r = 15,5$ мм. При обработке результатов экспериментальных данных для определения компонент ε_{ij} , σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) тензоров деформаций и напряжений использовались формулы [3]

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\Delta r}{R}, \quad \varepsilon_{12} = \varphi \frac{r}{2l}, \quad \varepsilon_{33} = -(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \frac{\sigma_0}{K}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3K}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, \quad (1)$$

$$\sigma_{11} = \frac{P}{2\pi r h}, \quad \sigma_{22} = p \frac{r}{h}, \quad \sigma_{12} = \frac{M}{2\pi r^2 h}, \quad \sigma_{33} \approx 0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

Здесь Δl – абсолютное удлинение рабочей части образца, φ – угол взаимного закручивания поперечных сечений, Δr – изменение радиуса срединной поверхности образца, σ_0 – среднее напряжение, ε_0 – средняя деформация, K – объемный модуль упругости, μ – коэффициент поперечной деформации Пуассона, E – модуль Юнга, P – осевая сила, p – внутреннее давление, M – крутящий момент. Для стали 45 принято $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0.3$. Считалось, что $\sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0$, $\varepsilon_{32} = \varepsilon_{31} = 0$, то есть напряженное состояние в точках образцов полагалось однородным плоским, так как толщина стенки образцов намного меньше радиуса срединной поверхности $h \ll r$. При обработке экспериментальных данных использовалось условие



Рис. 1. Испытательный комплекс СН-ЭВМ.

несжимаемости материала, то есть равенство нулю объемной и средней деформации $\varepsilon_0 = 0$, так как с появлением пластических деформаций коэффициент поперечной деформации быстро возрастал и был близок к значению $\mu_p = 0,5$. В экспериментах при простых нагружениях (растяжение, сжатие, кручение, пропорциональное сжатие с кручением) на образцах из той же партии было установлено, что материал образцов с достаточной степенью был начально изотропным.

Реализованные экспериментальные исследования базируются на векторном представлении напряжений и деформаций в рамках теории упругопластических процессов по А.А. Ильюшину [1-3], где девиаторам напряжений и деформаций ставятся в соответствие векторы напряжений и деформаций формоизменения

$$\bar{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \quad \bar{\varepsilon} = \mathcal{E}_k \hat{i}_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где \hat{i}_k – единичные векторы базиса А.А. Ильюшина. Координаты векторов напряжений и деформаций S_k, \mathcal{E}_k ($k = 1, 2, 3$) в девиаторном трехмерном пространстве А.А. Ильюшина, определяются по формулам:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} S_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\sigma_{11} - \frac{1}{2} (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \right], \\ S_2 &= \sqrt{2} \left(S_{22} + \frac{1}{2} S_{11} \right) = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{\sqrt{2}}, \quad S_3 = \sqrt{2} S_{12} = \sqrt{2} \sigma_{12}, \\ \mathcal{E}_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \mathcal{E}_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_0), \quad \mathcal{E}_2 = \sqrt{2} \left(\mathcal{E}_{22} + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{11} \right) = \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}}{\sqrt{2}}, \\ &\quad \mathcal{E}_3 = \sqrt{2} \mathcal{E}_{12} = \sqrt{2} \varepsilon_{12}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0, \quad \mathcal{E}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0 \quad (4)$$

– компоненты девиаторов напряжений и деформаций соответственно, δ_{ij} – символ Кронекера. Модули векторов напряжений и деформаций и равные им модули девиаторов напряжений и деформаций определяются соотношениями

$$\sigma = \sqrt{S_{ij}S_{ij}} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}, \quad \vartheta = \sqrt{\vartheta_{ij}\vartheta_{ij}} = \sqrt{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2}. \quad (5)$$

Программы деформирования реализовывались в девиаторной плоскости $\vartheta_1 - \vartheta_3$ (жесткое или кинематическое нагружение) при одновременном комбинированном действии на образец растяжения-сжатия и кручения. Координата вектора деформаций ϑ_1 отвечает нагружению образца осевой силой, а координата ϑ_3 – нагружению образца крутящим моментом. Исходная траектория (траектория 1) деформирования представляет собой полуокружность радиуса $R = 0,75\%$, начинающуюся из начала координат, где координаты центра полуокружности $\vartheta_1^0 = 0, \quad \vartheta_3^0 = 0,75\%$, а кривизна траектории равна $\kappa = 133,3$. В процессе деформирования по данной траектории значение ϑ_1 непропорционально возрастает до $1,5\%$ (растяжение), а значение ϑ_3 (кручение) сначала непропорционально возрастает до $0,75\%$, а затем, после четверти окружности, убывает до нуля. Ортогональные преобразования траектории 1 осуществлялось её вращением по ходу часовой стрелки на $90^\circ, 180^\circ$ и 270° (траектории деформирования 2, 3 и 4 соответственно). Все четыре реализованные программы экспериментов показаны на рис. 2.

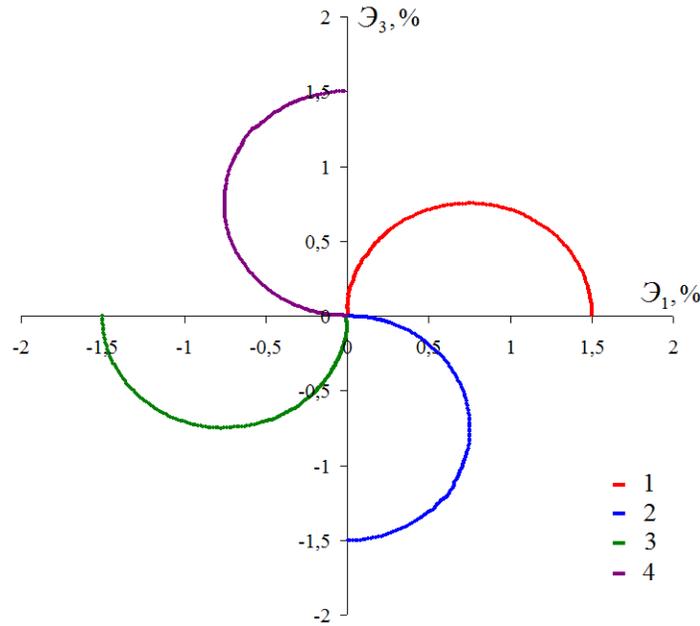


Рис. 2. Программы эксперимента в плоскости $\vartheta_1 - \vartheta_3$

На рисунках 3-7 представлены совмещенные результаты испытаний тонкостенных трубчатых образцов по программам 1, 2, 3, 4. На рисунке 3 представлены отклики на реализованные траектории деформирования по напряжениям на плоскости $S_1 - S_3$, то есть траектории напряжений. По экспериментальным данным видно, что траектории напряжений также ортогональны друг другу.

В теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина связь между напряжениями и деформациями определяется скалярными и векторными свойствами материалов. Скалярные свойства материала характеризуют диаграммы деформирования $\sigma - s$, где s – длина дуги траектории деформирования. На рис. 4 представлены совмещенные $\sigma - s$ диаграммы для всех четырех экспериментов. Видно, что экспериментальные данные для всех траекторий на рис. 4 практически совпадают, значит можно сделать вывод о том, что для данной серии испытаний постулат изотропии по скалярным свойствам выполняется.

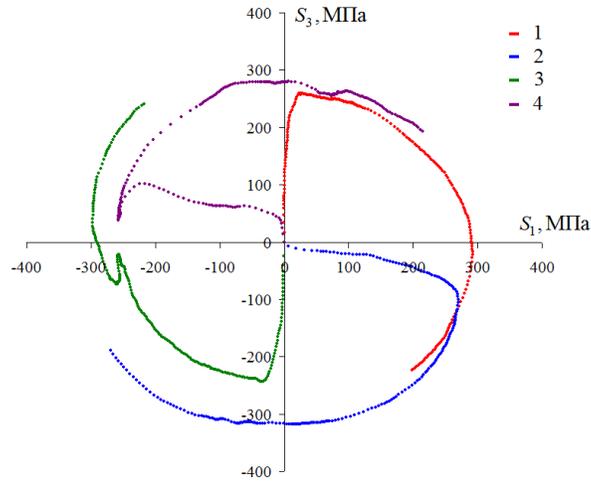


Рис. 3. Траектории напряжений на плоскости $S_1 - S_3$

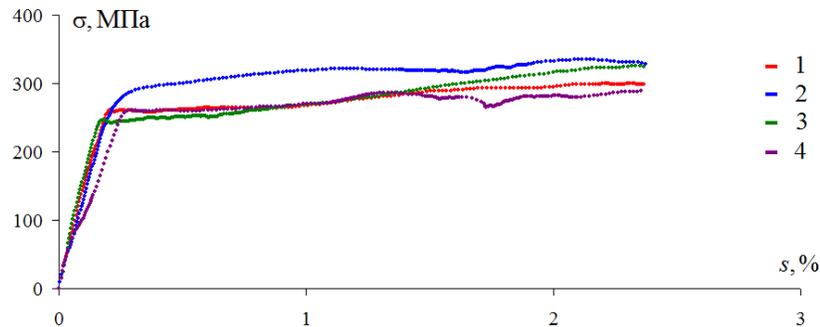


Рис. 4. Глобальная диаграмма деформирования $\sigma - s$

На рис. 5, 6 приведены локальные диаграммы деформирования растяжения-сжатия по компонентам $S_1 - \mathcal{E}_1$ и чистого сдвига по компонентам $S_3 - \mathcal{E}_3$ соответственно. Из них видно, что диаграммы для траекторий 1 и 3, а так же 2 и 4 являются кососимметричными.

На рис. 7 представлены диаграммы $\vartheta_1 - s$, характеризующие векторные свойства материала, где ϑ_1 – угол между вектором напряжений $\bar{\sigma}$ и касательной к траектории

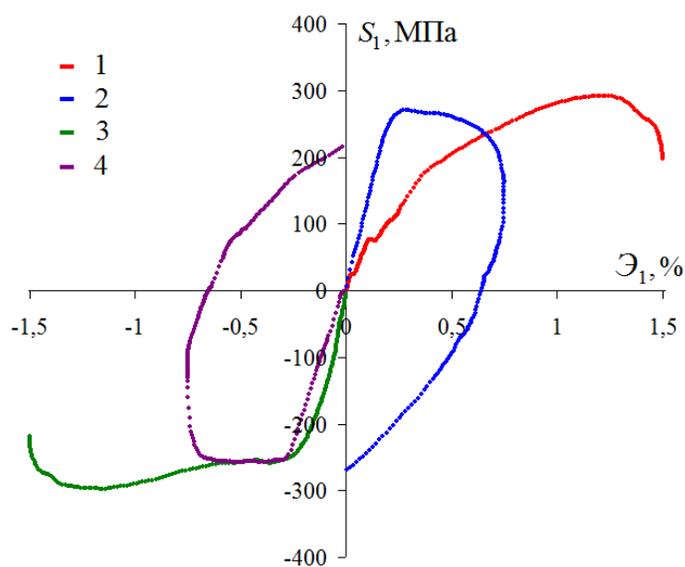


Рис. 5. Локальная диаграмма деформирования $S_1 - \epsilon_1$.

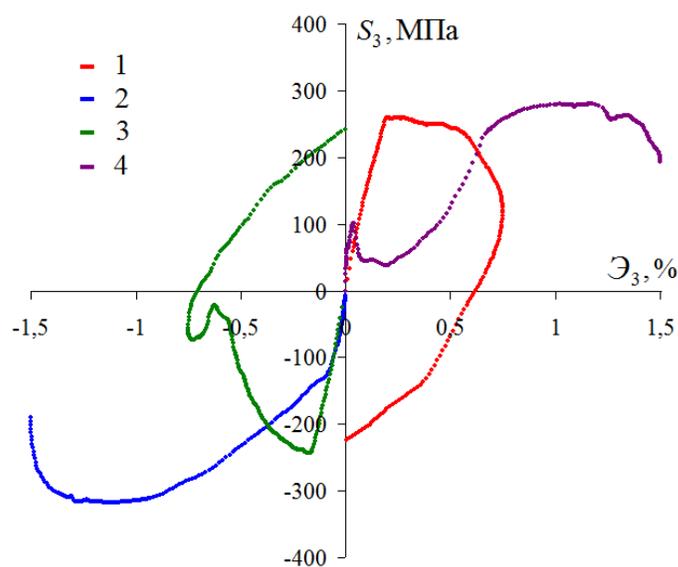


Рис. 6. Локальная диаграмма деформирования $S_3 - \epsilon_3$.

деформирования в каждой ее точке. Этот называется углом сближения, и он отражает влияние векторных свойств материала на процесс деформирования. При обработке экспериментальных данных для определения ϑ_1 использовалось выражение

$$\cos \vartheta_1 = \frac{1}{\sigma} \left(S_1 \frac{(\epsilon_3 - \epsilon_3^0)}{R} - S_3 \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_1^0)}{R} \right), \quad (6)$$

где $\vartheta_1^0, \vartheta_3^0$ – координаты центров полуокружностей.

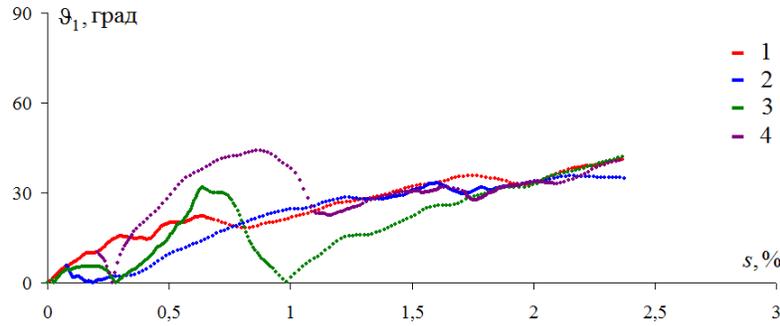


Рис. 7. Диаграмма $\vartheta_1 - s$.

Экспериментально установлено [3], что при деформировании по окружным траекториям наступает стационарный режим деформирования с практически постоянным значением угла сближения $\vartheta_1^* \approx \text{const}$. Это что также подтверждается в данной серии экспериментов, причем после стабилизации $\vartheta_1^* \approx 30^\circ$. Так как в данных опытах углы сближения $\vartheta_1 < 90^\circ$, то процессы деформирования по всем четырем траекториям были активными, без сложных разгрузок. На начальном этапе деформирования (при $\Delta s < 1,5\%$) видно некоторое различие на диаграммах на рис. 7. Однако при стабилизации процесса деформирования ($\Delta s > 1,5\%$) видно, что все диаграммы на рис. 7 близки друг к другу, значит можно сделать вывод о том, что для данной серии экспериментов постулат изотропии выполняется и по векторным свойствам.

Заключение. Рассмотрена серия из четырех экспериментов, проведенных на автоматизированном экспериментальном комплексе СМ-ЭВМ, по упругопластическому деформированию материала сталь 45 по ортогональным криволинейным траекториям деформирования в виде полуокружностей со смещенным центром, выходящих из начала координат. Исследованы скалярные и векторные свойства материала сталь 45. Установлено, что для реализованных сложных траекторий постоянной кривизны постулат изотропии выполняется достаточно точно, как по скалярным, так и по векторным свойствам материала. Результаты серии экспериментов могут быть полезны при разработке и верификации математических моделей теории пластичности, оценке ресурса и надежности элементов конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1971. 310 с.
- [2] Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 273 с.
- [3] Зубчанинов В. Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
- [4] Зубчанинов В. Г. Общая математическая теория пластичности и постулаты макроскопической определенности и изотропии А.А. Ильюшина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2018. № 5. С. 29-46.
- [5] Аннин Б. Д., Жигалкин В. М. Поведение материалов в условиях сложного нагружения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 342 с.
- [6] Митенков Ф. М., Волков И. А., Игумнов Л. А., Коротких Ю. Г. и др. Прикладная теория пластичности. М.: Физматлит, 2015. 284 с.
- [7] Bondar V. S. Inelasticity. Variants of the theory. New York: Begell House, 2013.

- [8] Пелешко В. А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 2: Идентификация и верификация // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 1. С. 110-135.
- [9] Молодцов И. Н. Прикладные вопросы теории упругопластических процессов А. А. Ильюшина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. № 5. 2020. С. 33-38
- [10] Алексеев А. А. Моделирование процесса упругопластического деформирования стали 45 по траекториям типа спирали Архимеда. Вычислительная механика сплошных сред. Том 14 (1). 2021. С. 102-109.
- [11] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Гультияев В. И. О построении поверхности текучести стали 45 и проверке постулата изотропии на прямолинейных траекториях при многократных знакопеременных нагружениях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 3. С. 71–88.
- [12] Ленский В. С. Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций // Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 58–82.
- [13] Васин Р. А., Никиточкин А. Н., Огибалов П. М. О проверке постулата изотропии при переменной скорости деформирования // Механика полимеров. 1975. № 2. С. 224-227.
- [14] Шевченко Ю. Н., Терехов Р. Г. Исследование закономерностей термовязкопластического деформирования твердого тела при неизотермических сложных процессах нагружения. Ч. 1 // Прикладная механика. 2001. Т. 37. № 3. С. 3–34.
- [15] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Alekseeva E. G., Gultiaev V. I. Experimental verification of postulate of isotropy and mathematical modeling of elastoplastic deformation processes following the complex angled nonanalytic trajectories // Materials Physics and Mechanics. 2017. № 32(3). P. 298–304.
- [16] Зубчанинов В. Г., Алексеев А. А., Алексеева Е. Г. Проверка постулата изотропии и численное моделирование процессов деформирования материалов на сложных гладких траекториях // Materials Physics and Mechanics. 2016. Т. 29. № 2. С. 150-157.
- [17] Зубчанинов В. Г., Гультияев В. И. О проверке постулата изотропии в теории процессов сложного пластического деформирования // Проблемы прочности и пластичности. 2008. № 70. С. 18–23.

V. I. Gultiaev, V. G. Zubchaninov, A. A. Alekseev, I. A. Savrasov

VERIFICATION OF ISOTROPY POSTULATE UNDER COMPLEX KINEMATIC LOADING OF STEEL 45 ALONG THE STRAIN TRAJECTORIES AS SEMICIRCLES

Tver State Technical University, Tver, Russia

Abstract. The paper presents the results of experimental verification of A.A. Ilyushin’s postulate of isotropy at complex elastoplastic deformation of thin-walled tubular specimens of steel 45, along the trajectories in the form of semicircles (rigid or kinematic loading). Experimental data have been obtained on the automated testing machine SN-EVM. The results of 4 experiments in which strain trajectories in the form of semicircles of constant curvature 133.3 were realized are presented and discussed. It is experimentally confirmed that for the realized complex trajectories of constant curvature the isotropy postulate is fulfilled both in scalar and vector properties.

Keywords: plasticity, complex loading, isotropy is postulate, experimental data, strain trajectory, vector and scalar material properties.

Gulyaev, Vadim Ivanovich, Doctor of technical sciences, Head of Department of Automobile roads, bases and foundations, Tver State Technical University, Tver, Russia.

Zubchaninov, Vladimir Georgievich, Doctor of technical sciences, Professor, Department of Strength of materials, theory of elasticity and plasticity, Tver State Technical University, Tver, Russia,

REFERENCES

- [1] Ilyushin A. A. Continuum Mechanics. Moscow: MSU Publishing House, 1990. – 310 p.
- [2] Ilyushin A. A. Plasticity: Fundamentals of the general mathematical theory. Moscow: Izd-vo AN USSR, 1963. 273 p.
- [3] Zubchaninov V. G. Mechanics of processes of plastic environments. Moscow: Fizmatlit, 2010. 352 p.
- [4] Zubchaninov V. G. The General Mathematical Theory of Plasticity and the Il'yushin Postulates of Macroscopic Definability and Isotropy // Moscow University Mechanics Bulletin. 2018. Vol. 73. Issue 5. pp. 101–116.
- [5] Annin B. D., Zhigalkin V. M. Material Behavior under Conditions of Complex Loading. Novosibirsk: Izdat. SO RAN, 1999. 342 p.
- [6] Mitenkov F. M., Volkov I. A., Igumnov L. A., Kaplienko A. V., Korotkikh Yu. G., Panov V. A. Applied theory of plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2015. 284 p.
- [7] Bondar V. S. Inelasticity. Variants of the theory. New York: Begell House, 2013.
- [8] Peleshko V.A. Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading part 2: Identification and verification // Mechanics of Solids. 2016. Vol. 51. Issue 1. pp 91–113.
- [9] Molodtsov, I.N. Applied questions of Il'yushin theory of elastoplastic processes // Moscow University Mathematics Bulletin. Ser. Mat. Mekh. 2020. No 5. pp. 33–38
- [10] Alekseev A. A. Modeling of elastoplastic deformation of steel 45 along Archimedes spiral type trajectories // Computational Continuum Mechanics. 2021. Vol. 14(1). pp. 102–109.
- [11] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Gultyaev V. I. About drawing of the yield surface for steel 45 and verification of the postulate of isotropy on straight-line paths during repeated sign-variable loadings // PNRPU Mechanics Bulletin. 2014. No 3. P. 71–88.
- [12] Lenskii V. S. Experimental verification of the basic postulates from the general theory of elastic-plastic deformations,"in: Problems in Plasticity Theory [in Russian]. Moscow: Publ.house AN SSSR, 1961. pp. 58–82.
- [13] Vasin R. A., Nikitovich A. N., Ogibalov P. M. Verification of the postulate of isotropy during variable rate deformation // Polymer Mechanics. 1975. No 2. P. 224–227.
- [14] Shevchenko Yu. N., Terekhov R. G. Studying the laws of the thermoviscoplastic deformation of a solid under nonisothermal complex loading. International Applied Mechanics. 2001. No 37(3). pp. 287–316.
- [15] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Alekseeva E. G., Gultiaev V. I. Experimental verification of postulate of isotropy and mathematical modeling of elastoplastic deformation processes following the complex angled nonanalytic trajectories // Materials Physics and Mechanics. 2017. No 32(3). P. 298–304.
- [16] Zubchaninov V. G., Alekseev A. A., Alekseeva E. G. Verification of the postulate of the isotropy and numerical simulation of the deformation of materials on a complex smooth trajectories // Materials Physics and Mechanics. 2016. No 29(2). pp. 150–157.
- [17] Zubchaninov V. G., Gultiaev V. I. On the verification of the postulate of isotropy in theory of complex plastic deformation processes // Problems of strength and plasticity. 2008. No 70. pp. 18–23.

Alekseev, Andrey Alekseevich, Ph.D. (Technical Sciences), Associate Professor, Department of Strength of Materials, Theory of Elasticity and Plasticity, Tver State Technical University, Tver, Russia,

Savrasov, Ivan Alexandrovich, Postgraduate Student of the Department of Strength of Materials, Theory of Elasticity and Plasticity, Tver State Technical University, Tver, Russia.