

Ш. Т. Нгуен

## НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ УПРУГОСТИ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

**Аннотация.** Рассмотрен вариант нелинейных определяющих соотношений для упругого ортотропного материала. Для описания зависимостей деформаций от напряжений второго и третьего порядков используется по 9 дополнительных параметров. Предложена система двумерных экспериментов на пластинчатых образцах, позволяющая определить все константы нелинейных моделей. Числовые значения параметров двух моделей найдены по известным экспериментальным данным. Сравнение результатов моделирования показывает, что модель третьего порядка более соответствует данным экспериментов, чем модель второго порядка.

**Ключевые слова:** нелинейные определяющие соотношения, ортотропные материалы, идентификация, композиты.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.50.4.004

УДК: 539.3

**Введение.** Современные материалы проявляют нелинейное механическое поведение в упругой области даже при малых деформациях [1–3] и при этом обладают выраженной анизотропией свойств. Поэтому разработка обоснованных моделей нелинейной упругости для анизотропных материалов, их идентификация и верификация в экспериментах являются актуальными. В работах [4–6] на основе потенциала Гиббса построены нелинейные модели второго и третьего порядков, описывающие упругое поведение ортотропного материала. Целью работы является разработка системы экспериментов для определения числовых значений параметров указанных моделей, а также нахождение этих значений по известным экспериментальным данным [1]. Эти данные получены в результате двумерных опытов с пластинами из композиционного материала. В статье [4] предложена модель ламинированного композита в форме пластины из анизотропного материала.

**Основные соотношения модели.** Для описания деформированного состояния используем тензор деформаций Коши–Грина  $\epsilon$ . Напряжённое состояние описывается тензором истинных напряжений  $\mathbf{S}$ . В работах [4, 6] был получен вариант определяющих соотношений для описания нелинейного упругого поведения ортотропного

---

© Нгуен Ш. Т., 2021

Нгуен Ши Тоан

e-mail: sytoantula@gmail.com,

аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 01.11.2021

материала на основе конкретизации потенциала Гиббса для обратимых процессов изотермического деформирования таких материалов:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= A_{1111}S_{11} + A_{1122}S_{22} + A_{1133}S_{33} + \\
&+ B_{1111}S_{11}^2 + B_{1122}S_{22}^2 + B_{1133}S_{33}^2 + B_{1112}S_{11}S_{22} + B_{1113}S_{11}S_{33} + B_{1123}S_{22}S_{33} + \\
&+ C_{1111}S_{11}^3 + C_{1112}S_{11}^2S_{22} + C_{1113}S_{11}^2S_{33} + C_{1122}S_{11}S_{22}^2 + C_{1133}S_{11}S_{33}^2 + \\
&+ C_{1123}S_{11}S_{22}S_{33} + C_{1222}S_{22}^3 + C_{1223}S_{22}^2S_{33} + C_{1233}S_{22}S_{33}^2 + C_{1333}S_{33}^3, \\
\varepsilon_{22} &= A_{2211}S_{11} + A_{2222}S_{22} + A_{2233}S_{33} + \\
&+ B_{2211}S_{11}^2 + B_{2222}S_{22}^2 + B_{2233}S_{33}^2 + B_{2212}S_{11}S_{22} + B_{2213}S_{11}S_{33} + B_{2223}S_{22}S_{33} + \\
&+ C_{2111}S_{11}^3 + C_{2112}S_{11}^2S_{22} + C_{2113}S_{11}^2S_{33} + C_{2122}S_{11}S_{22}^2 + C_{2133}S_{11}S_{33}^2 + \\
&+ C_{2123}S_{11}S_{22}S_{33} + C_{2222}S_{22}^3 + C_{2223}S_{22}^2S_{33} + C_{2233}S_{22}S_{33}^2 + C_{2333}S_{33}^3, \\
\varepsilon_{33} &= A_{3311}S_{11} + A_{3322}S_{22} + A_{3333}S_{33} + \tag{1} \\
&+ B_{3311}S_{11}^2 + B_{3322}S_{22}^2 + B_{3333}S_{33}^2 + B_{3312}S_{11}S_{22} + B_{3313}S_{11}S_{33} + B_{3323}S_{22}S_{33} + \\
&+ C_{3111}S_{11}^3 + C_{3112}S_{11}^2S_{22} + C_{3113}S_{11}^2S_{33} + C_{3122}S_{11}S_{22}^2 + C_{3133}S_{11}S_{33}^2 + \\
&+ C_{3123}S_{11}S_{22}S_{33} + C_{3222}S_{22}^3 + C_{3223}S_{22}^2S_{33} + C_{3233}S_{22}S_{33}^2 + C_{3333}S_{33}^3, \\
\varepsilon_{12} &= 2 \left( D_0^{(1)} + \frac{3}{2}D_1^{(1)} |S_{12}| + 2D_2^{(1)}S_{12}^2 \right) S_{12}, \quad \varepsilon_{23} = 2 \left( D_0^{(2)} + \frac{3}{2}D_1^{(2)} |S_{23}| + 2D_2^{(2)}S_{23}^2 \right) S_{23}, \\
\varepsilon_{31} &= 2 \left( D_0^{(3)} + \frac{3}{2}D_1^{(3)} |S_{31}| + 2D_2^{(3)}S_{31}^2 \right) S_{31}.
\end{aligned}$$

Определяющие соотношения (1) являются моделью упругости третьего порядка для ортотропного материала и содержат константы первого порядка  $A_{ijkl}$  и  $D_0^{(i)}$ , константы второго порядка  $B_{ijkl}$ ,  $D_1^{(i)}$  и третьего порядка  $C_{ijkl}$ ,  $D_2^{(i)}$ . Если параметры второго и третьего порядков  $B_{ijkl}$ ,  $C_{ijkl}$ ,  $D_1^{(i)}$ ,  $D_2^{(i)}$  считать равными нулю, то соотношения (1) будут выражениями обобщённого закона Гука.

Компоненты тензора деформаций должны удовлетворять условиям существования потенциала Гиббса

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial S_{22}} = \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial S_{11}}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial S_{33}} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial S_{11}}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial S_{33}} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial S_{22}}. \tag{2}$$

Условия (2) приводят к соотношениям между параметрами модели:

$$\begin{aligned}
A_{1122} &= A_{2211}, \quad A_{1133} = A_{3311}, \quad A_{2233} = A_{3322}, \\
B_{2212} &= 2B_{1122}, \quad B_{1112} = 2B_{2211}, \quad B_{1123} = B_{2213}, \\
B_{3313} &= 2B_{1133}, \quad B_{1113} = 2B_{3311}, \quad B_{1123} = B_{3312}, \\
B_{3323} &= 2B_{2233}, \quad B_{2223} = 2B_{3322}, \quad B_{2213} = B_{3312}, \tag{3} \\
C_{1112} &= 3C_{2111}, \quad C_{1122} = C_{2112}, \quad C_{2122} = 3C_{1222}, \quad C_{1113} = 3C_{3111}, \\
C_{1133} &= C_{3113}, \quad C_{3133} = 3C_{1333}, \quad C_{2223} = 3C_{3222}, \quad C_{2233} = C_{3223}, \quad C_{3233} = 3C_{2333}, \\
C_{1123} &= 2C_{2113} = 2C_{3112}, \quad C_{2123} = 2C_{1223} = 2C_{3122}, \quad C_{3123} = 2C_{1233} = 2C_{2133}.
\end{aligned}$$

С учётом равенств (3) определяющие соотношения (1) принимают вид

$$\varepsilon_{11} = A_{1111}S_{11} + A_{1122}S_{22} + A_{1133}S_{33} +$$

$$\begin{aligned}
& +B_{1111}S_{11}^2 + B_{1122}S_{22}^2 + B_{1133}S_{33}^2 + 2B_{2211}S_{11}S_{22} + 2B_{3311}S_{11}S_{33} + B_{1123}S_{22}S_{33} + \\
& +C_{1111}S_{11}^3 + 3C_{2111}S_{11}^2S_{22} + 3C_{3111}S_{11}^2S_{33} + C_{1122}S_{11}S_{22}^2 + C_{1133}S_{11}S_{33}^2 + \\
& +2C_{2113}S_{11}S_{22}S_{33} + C_{1222}S_{22}^3 + C_{1223}S_{22}^2S_{33} + C_{1233}S_{22}S_{33}^2 + C_{1333}S_{33}^3, \\
\varepsilon_{22} & = A_{1122}S_{11} + A_{2222}S_{22} + A_{2233}S_{33} + \\
& +B_{2211}S_{11}^2 + B_{2222}S_{22}^2 + B_{2233}S_{33}^2 + 2B_{1122}S_{11}S_{22} + B_{1123}S_{11}S_{33} + 2B_{3322}S_{22}S_{33} + \\
& +C_{2111}S_{11}^3 + C_{1122}S_{11}^2S_{22} + C_{2113}S_{11}^2S_{33} + 3C_{1222}S_{11}S_{22}^2 + C_{1233}S_{11}S_{33}^2 + \\
& +2C_{1223}S_{11}S_{22}S_{33} + C_{2222}S_{22}^3 + 3C_{3222}S_{22}^2S_{33} + C_{2233}S_{22}S_{33}^2 + C_{2333}S_{33}^3, \\
\varepsilon_{33} & = A_{1133}S_{11} + A_{2233}S_{22} + A_{3333}S_{33} + \tag{4} \\
& +B_{3311}S_{11}^2 + B_{3322}S_{22}^2 + B_{3333}S_{33}^2 + B_{1123}S_{11}S_{22} + 2B_{1133}S_{11}S_{33} + 2B_{2233}S_{22}S_{33} + \\
& +C_{3111}S_{11}^3 + C_{2113}S_{11}^2S_{22} + C_{1133}S_{11}^2S_{33} + C_{1223}S_{11}S_{22}^2 + 3C_{1333}S_{11}S_{33}^2 + \\
& +2C_{1233}S_{11}S_{22}S_{33} + C_{3222}S_{22}^3 + C_{2233}S_{22}^2S_{33} + 3C_{2333}S_{22}S_{33}^2 + C_{3333}S_{33}^3, \\
\varepsilon_{12} & = 2 \left( D_0^{(1)} + \frac{3}{2}D_1^{(1)} |S_{12}| + 2D_2^{(1)} S_{12}^2 \right) S_{12}, \quad \varepsilon_{23} = 2 \left( D_0^{(2)} + \frac{3}{2}D_1^{(2)} |S_{23}| + 2D_2^{(2)} S_{23}^2 \right) S_{23}, \\
\varepsilon_{31} & = 2 \left( D_0^{(3)} + \frac{3}{2}D_1^{(3)} |S_{31}| + 2D_2^{(3)} S_{31}^2 \right) S_{31}.
\end{aligned}$$

В определяющие соотношения (4) входят по 9 констант первого, второго и третьего порядков. При этом линейно независимыми являются все 6 параметров  $A_{ijkl}$ , все 9 параметров  $D_0^{(1)}, D_0^{(2)}, D_0^{(3)}, D_1^{(1)}, D_1^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(1)}, D_2^{(2)}, D_2^{(3)}$ , 6 из 10 параметров  $B_{ijkl}$  и 6 из 15 параметров  $C_{ijkl}$ . Если положить все параметры  $C_{ijkl}, D_2^{(1)}, D_2^{(2)}, D_2^{(3)}$ , равными нулю, то соотношения (4) будут квадратичной моделью ортотропного материала.

Если в квадратичной части соотношений в качестве независимых параметров выбрать  $B_{1111}, B_{1122}, B_{2211}, B_{2222}, B_{3311}, B_{3333}$ , то остальные 4 параметра  $B_{1123}, B_{1133}, B_{2233}, B_{3322}$  линейно выражаются через них следующим образом:

$$\begin{aligned}
B_{1123} & = \frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{6} + 1}{2} B_{1111} + \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{3} - 1}{2} B_{1122} + \\
& + \frac{6\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 4\sqrt{6} - 9}{2} B_{2211} + \frac{4\sqrt{6} + 9 - 6\sqrt{2} - 5\sqrt{3}}{2} B_{2222} + 2B_{3311}, \\
B_{1133} & = \frac{10\sqrt{2} + 3\sqrt{6} - 10}{12} B_{1111} + \frac{6 - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} B_{1122} + \frac{9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 4\sqrt{6} - 8}{4} B_{2211} + \\
& + \frac{12\sqrt{6} + 32 - 23\sqrt{2} - 18\sqrt{3}}{12} B_{2222} - \sqrt{2} B_{3311} + \frac{\sqrt{2} - 1}{3} B_{3333}, \\
B_{2233} & = \frac{\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 4}{12} B_{1111} + \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 4}{4} B_{1122} + \frac{6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{6} - 6}{4} B_{2211} + \\
& + \frac{9\sqrt{6} + 26 - 14\sqrt{2} - 12\sqrt{3}}{12} B_{2222} - \sqrt{2} B_{3311} + \frac{\sqrt{2} - 1}{3} B_{3333},
\end{aligned}$$

$$B_{3322} = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6} - 4}{2} B_{1111} + \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{6} + 4}{2} B_{1122} + \\ + \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - 4}{2} B_{2211} + \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 4}{2} B_{2222} + B_{3311}.$$

В кубической части определяющих соотношений (4) независимыми параметрами модели выбраны  $C_{1111}$ ,  $C_{1222}$ ,  $C_{2111}$ ,  $C_{2222}$ ,  $C_{3111}$ ,  $C_{3333}$ . Остальные 9 из 15 параметров линейно выражены через них:

$$C_{1122} = \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + \sqrt{6} - 6}{12} C_{1111} + \frac{7\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} + 2}{4} C_{1222} + \\ + \frac{2\sqrt{3} - 21\sqrt{2} + \sqrt{6} + 6}{12} C_{2222} + \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - 2}{4} C_{3111} + \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3} C_{3333},$$

$$C_{1123} = \frac{14\sqrt{6} - 3\sqrt{2} - 26\sqrt{3} + 6}{12} C_{1111} + \frac{3\sqrt{2} + 34\sqrt{3} - 10\sqrt{6} - 6}{12} C_{1222} + \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3} C_{2111} + \\ + \frac{61\sqrt{6} - 102\sqrt{2} - 82\sqrt{3} + 138}{12} C_{2222} + \frac{34\sqrt{2} + 30\sqrt{3} - 19\sqrt{6} - 46}{4} C_{3111} + (2\sqrt{3} - \sqrt{6}) C_{3333},$$

$$C_{1133} = \frac{2\sqrt{3} - 15\sqrt{2} - 5\sqrt{6} - 6}{12} C_{1111} + \frac{15\sqrt{2} - 10\sqrt{3} - 3\sqrt{6} + 6}{12} C_{1222} + \frac{4\sqrt{3}}{3} C_{2111} + \\ + \frac{6 - 9\sqrt{2} - 14\sqrt{3} - 5\sqrt{6}}{12} C_{2222} + \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - 2}{4} C_{3111} + \frac{6\sqrt{3} + 4\sqrt{6}}{3} C_{3333},$$

$$C_{1223} = \frac{4\sqrt{3} - 30\sqrt{2} - \sqrt{6} + 36}{24} C_{1111} + \frac{30\sqrt{2} + \sqrt{3} + 5\sqrt{6} - 36}{24} C_{1222} + \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{6} C_{2111} + \\ + \frac{46\sqrt{6} - 75\sqrt{2} - 52\sqrt{3} + 108}{24} C_{2222} + \frac{25\sqrt{2} + 20\sqrt{3} - 14\sqrt{6} - 36}{8} C_{3111} + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{2} C_{3333},$$

$$C_{1233} = \frac{\sqrt{3} - 9\sqrt{2} - \sqrt{6} - 9}{6} C_{1111} + \frac{9\sqrt{2} - 5\sqrt{3} - 3\sqrt{6} + 9}{6} C_{1222} + \frac{4\sqrt{3}}{3} C_{2111} + \\ + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3} - 7\sqrt{6} - 9}{6} C_{2222} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3} + 3}{2} C_{3111} + \frac{6\sqrt{3} + 4\sqrt{6}}{3} C_{3333},$$

$$C_{1333} = \frac{7\sqrt{6} - 10\sqrt{3} + 18}{36} C_{1111} + \frac{6\sqrt{3} - \sqrt{6} - 6}{12} C_{1222} + \frac{\sqrt{6}}{3} C_{2111} + \\ + \frac{40\sqrt{6} - 63\sqrt{2} - 46\sqrt{3} + 90}{36} C_{2222} + \frac{7\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 4\sqrt{6} - 10}{4} C_{3111} + \frac{2\sqrt{3} - 5\sqrt{6}}{9} C_{3333},$$

$$C_{2223} = \frac{275\sqrt{2} - 278\sqrt{3} + 178\sqrt{6} - 326}{72} C_{1111} + \frac{906\sqrt{3} - 825\sqrt{2} - 466\sqrt{6} + 978}{216} C_{1222} + \\ + \frac{\sqrt{6} - 6\sqrt{3}}{54} C_{2111} + \frac{437\sqrt{6} - 546\sqrt{2} - 714\sqrt{3} + 690}{216} C_{2222} + \\ + \frac{182\sqrt{2} + 262\sqrt{3} - 123\sqrt{6} - 230}{72} C_{3111} + \frac{6\sqrt{3} - 35\sqrt{6}}{54} C_{3333},$$

$$C_{2233} = \frac{14\sqrt{3} - 33\sqrt{2} - 11\sqrt{6} + 6}{12}C_{1111} + \frac{33\sqrt{2} - 22\sqrt{3} + 3\sqrt{6} - 6}{12}C_{1222} + \frac{4\sqrt{3}}{3}C_{2111} + \\ + \frac{9\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 11\sqrt{6} - 6}{12}C_{2222} + \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2}{4}C_{3111} + \frac{6\sqrt{3} + 4\sqrt{6}}{3}C_{3333},$$

$$C_{2333} = \frac{27\sqrt{2} - 40\sqrt{3} + 22\sqrt{6} - 12}{36}C_{1111} + \frac{16\sqrt{3} - 9\sqrt{2} - 6\sqrt{6} + 4}{12}C_{1222} + \frac{\sqrt{6}}{3}C_{2111} + \\ + \frac{55\sqrt{6} - 90\sqrt{2} - 76\sqrt{3} + 120}{36}C_{2222} + \frac{30\sqrt{2} + 28\sqrt{3} - 17\sqrt{6} - 40}{12}C_{3111} + \frac{2\sqrt{3} - 5\sqrt{6}}{9}C_{3333}.$$

В качестве независимых могут выступать и другие наборы констант  $B_{ijkl}$ ,  $C_{ijkl}$ , однако, сделанный выбор объясняется тем, что параметры  $B_{1111}$ ,  $B_{1122}$ ,  $B_{2211}$ ,  $B_{2222}$ ,  $B_{3311}$ ,  $B_{3333}$  и  $C_{1111}$ ,  $C_{1222}$ ,  $C_{2111}$ ,  $C_{2222}$ ,  $C_{3111}$ ,  $C_{3333}$  можно определить по результатам одних и тех же механических экспериментов с макрообразцами.

**Идентификация модели по данным экспериментов с пластинами.** Широко распространены эксперименты на пластинах, так как в них можно измерить деформации в двух направлениях в плоскости. Для определения параметров  $A_{ijkl}$ ,  $B_{ijkl}$ ,  $C_{ijkl}$  образцы для экспериментов должны быть вырезаны во взаимно перпендикулярных направлениях, образованных главными осями анизотропии ортотропного материала.

Из эксперимента в плоскости  $Ox_1x_2$  на растяжение-сжатие по оси  $Ox_1$  определяются параметры  $A_{1111}$ ,  $A_{1122}$ ,  $B_{1111}$ ,  $B_{2211}$ ,  $C_{1111}$ ,  $C_{2111}$ . Из эксперимента в плоскости  $Ox_1x_2$  на растяжение-сжатие по оси  $Ox_2$  определяются параметры  $A_{2222}$ ,  $B_{2222}$ ,  $B_{1122}$ ,  $C_{2222}$ ,  $C_{1222}$ . Из эксперимента в плоскости  $Ox_1x_3$  на растяжение-сжатие по оси  $Ox_3$  определяются параметры  $A_{1133}$ ,  $A_{3333}$ ,  $B_{1133}$ ,  $B_{3333}$ ,  $C_{1333}$ ,  $C_{3333}$ . Из эксперимента в плоскости  $Ox_2x_3$  на растяжение-сжатие по оси  $Ox_3$  определяется  $A_{2233}$ . Для определения некоторых параметров можно использовать результаты экспериментов по одноосному растяжению-сжатию под углом  $45^\circ$  к главным осям анизотропии.

Коэффициенты модели  $D_i^{(j)}$  определяются по результатам трёх экспериментов на сдвиг в плоскостях  $Ox_1x_2$  ( $D_0^{(1)}$ ,  $D_1^{(1)}$ ,  $D_2^{(1)}$ ),  $Ox_2x_3$  ( $D_0^{(2)}$ ,  $D_1^{(2)}$ ,  $D_2^{(2)}$ ),  $Ox_1x_3$  ( $D_0^{(3)}$ ,  $D_1^{(3)}$ ,  $D_2^{(3)}$ ), образованных главными направлениями анизотропии ортотропного материала. При этом эксперименты на сдвиг могут быть выполнены как опыты на двухосное растяжение-сжатие под углом  $45^\circ$  к главным осям анизотропии.

В работе [1] приведены экспериментальные диаграммы зависимостей напряжений от деформаций, построенные в результате испытаний на одноосное растяжение, одноосное сжатие вдоль главных осей анизотропии  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_3$ , а также на сдвиг в плоскостях  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_3$  углерод-углеродного композиционного материала AVCO Mod3a. При этом отмечается, что механическое поведение в направлении  $\mathbf{a}_2$  идентично поведению в направлении  $\mathbf{a}_1$  из-за способа изготовления материала. Данные опытов показывают, что используемый композиционный материал обладает разносопротивляемостью при растяжении и сжатии.

Рассмотрим ортотропную пластину, у которой одна ось анизотропии  $\mathbf{a}_2$  перпендикулярна плоскости, а две другие  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_3$  направлены по сторонам пластины. Направим оси декартовой системы координат вдоль сторон пластины.

При плоском напряжённом состоянии ( $S_{12} = S_{22} = S_{23} = 0$ ) определяющие соотношения (4) записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= A_{1111}S_{11} + A_{1133}S_{33} + B_{1111}S_{11}^2 + B_{1133}S_{33}^2 + 2B_{3311}S_{11}S_{33} + \\ &\quad + C_{1111}S_{11}^3 + 3C_{3111}S_{11}^2S_{33} + C_{1133}S_{11}S_{33}^2, \\ \varepsilon_{22} &= A_{1122}S_{11} + A_{2233}S_{33} + B_{2211}S_{11}^2 + B_{2233}S_{33}^2 + B_{1123}S_{11}S_{33} + \\ &\quad + C_{2111}S_{11}^3 + C_{2113}S_{11}^2S_{33} + C_{1233}S_{11}S_{33}^2 + C_{2333}S_{33}^3, \\ \varepsilon_{33} &= A_{1133}S_{11} + A_{3333}S_{33} + B_{3311}S_{11}^2 + B_{3333}S_{33}^2 + 2B_{1133}S_{11}S_{33} + \\ &\quad + C_{3111}S_{11}^3 + C_{1133}S_{11}^2S_{33} + 3C_{1333}S_{11}S_{33}^2 + C_{3333}S_{33}^3, \\ \varepsilon_{31} &= 2 \left( D_0^{(3)} + \frac{3}{2}D_1^{(3)} |S_{31}| + 2D_2^{(3)} S_{31}^2 \right) S_{31}.\end{aligned}\tag{5}$$

Данные экспериментов [1] позволили, используя метод наименьших квадратов, определить материальные параметры, входящие в определяющие соотношения (4). При использовании квадратичной модели

$$\begin{aligned}A_{1111} &= A_{2222} = 1,70 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}, & A_{3333} &= 7,58 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-1}; \\ B_{1111} &= B_{2222} = 2,69 \cdot 10^{-13} \text{Па}^{-2}, & B_{3333} &= -4,32 \cdot 10^{-13} \text{Па}^{-2}; \\ D_0^{(1)} &= 4,39 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-1}, & D_1^{(1)} &= 6,44 \cdot 10^{-12} \text{Па}^{-2}; \\ D_0^{(2)} &= D_0^{(3)} = 8,97 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}, & D_1^{(2)} &= D_1^{(3)} = -3,01 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-2}.\end{aligned}\tag{6}$$

Для модели третьего порядка

$$\begin{aligned}A_{1111} &= A_{2222} = 1,12 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}, & A_{3333} &= 6,48 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-1}; \\ B_{1111} &= B_{2222} = 9,15 \cdot 10^{-13} \text{Па}^{-2}, & B_{3333} &= -7,82 \cdot 10^{-13} \text{Па}^{-2}; \\ C_{1111} &= C_{2222} = 2,86 \cdot 10^{-14} \text{Па}^{-3}, & C_{3333} &= 5,94 \cdot 10^{-15} \text{Па}^{-3}; \\ D_0^{(1)} &= 1,93 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}, & D_1^{(1)} &= -1,08 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-2}, & D_2^{(1)} &= 5,19 \cdot 10^{-13} \text{Па}^{-3}; \\ D_0^{(2)} &= D_0^{(3)} = 8,78 \cdot 10^{-10} \text{Па}^{-1}, & D_1^{(2)} &= D_1^{(3)} = -2,47 \cdot 10^{-11} \text{Па}^{-2}, \\ & & D_2^{(2)} &= D_2^{(3)} = -3,69 \cdot 10^{-13} \text{Па}^{-3}.\end{aligned}\tag{7}$$

На рисунках 1, 2 приведены экспериментальные данные для материала AVCO Mod3a и кривые, соответствующие линейной, квадратичной и кубической моделям (4).

Анализ графиков на рисунке 1 позволяет сделать вывод, что нелинейные определяющие соотношения (4) позволяют описать результаты экспериментов с анизотропным материалом более адекватно, чем линейные соотношения обобщённого закона Гука. Они позволяют описывать разнсопротивляемость анизотропного материала растяжению и сжатию, наблюдаемую в эксперименте. При этом квадратичная модель с константами (6) неверно описывает данные эксперимента на растяжение по оси  $\mathbf{a}_3$ , поэтому для учёта нелинейности следует использовать кубическую модель (5) с параметрами (7). Отметим, что на рисунке 2, б) кривые, построенные по квадратичной и кубической моделям, практически совпадают.

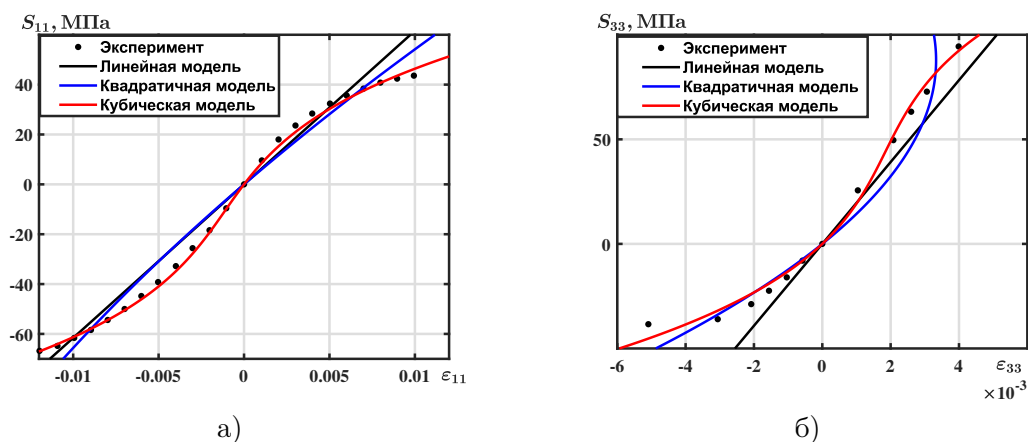


Рис. 1. Зависимости напряжений от деформаций: а) эксперимент при растяжении и сжатии в направлении  $\mathbf{a}_1$ ; б) эксперимент при растяжении и сжатии в направлении  $\mathbf{a}_3$

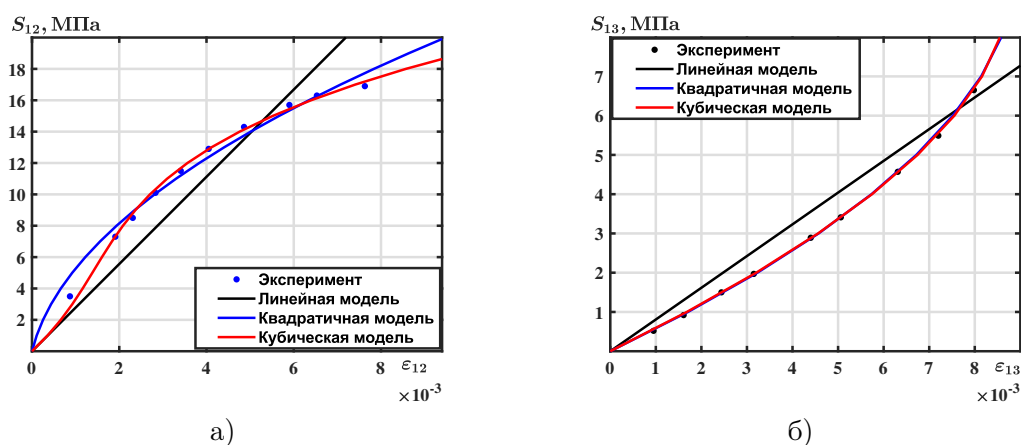


Рис. 2. Зависимость касательных напряжений от деформации сдвига: а) в плоскости  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ; б) в плоскости  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$

**Заключение.** Таким образом, для учёта слагаемых, описывающих нелинейную зависимость деформаций от напряжений второго и третьего порядков, в модель добавляется по 9 материальных параметров. Предложена система двумерных экспериментов на пластинчатых образцах, позволяющая определить все параметры нелинейных моделей. Выполнена идентификация параметров двух моделей по данным экспериментов [1]. Результаты определения числовых значений констант моделей показывают, что модель третьего порядка лучше описывает экспериментальные данные, чем модель второго порядка.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Jones R. Modeling nonlinear deformation of carbon-carbon composite materials // AIAA Journal. 1980. Vol. 18, no. 8. P. 995–1001.

- [2] Lomakin E., Fedulov B. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // *Meccanica*. 2015. Vol. 50, no. 6. P. 1527–1535.
- [3] Smith E., Pascoe K. The role of shear deformation in the fatigue failure of a glass fiber-reinforced composite // *Composites*. 1977. no. 8. P. 237–243.
- [4] Соколова М.Ю., Христич Д.В., Рудаков В.В. Нелинейная модель пластин из композиционных материалов // *Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2018. Т. 37, № 3. С. 100–106.
- [5] Христич Д.В. Идентификация анизотропных материалов и моделирование процессов конечного деформирования гипопругих тел. Дисс. . . . д.ф.-м.н. Тула. 2015.
- [6] Sokolova M., Rudakov V., Khristich D. Strains of plates of nonlinear anisotropic materials // *IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1203. p. 012024 (11 pages).

*S. T. Nguyen*

## NONLINEAR ELASTIC MODELS OF ORTHOTROPIC MATERIAL

*Tula State University, Tula, Russia*

**Abstract.** A variant of nonlinear constitutive relations for an elastic orthotropic material is considered. To describe the dependences of deformations on stresses of the second and third orders, 9 additional parameters are used. A system of two-dimensional experiments on plate samples is proposed, which allows one to determine all the constants of nonlinear models. The numerical values of the parameters of the two models are found from the known experimental data. Comparison of the simulation results shows that the third-order model is more consistent with the experimental data than the second-order model.

**Keywords:** nonlinear constitutive relations, orthotropic materials, identification, composites.

## REFERENCES

- [1] Jones R. Modeling nonlinear deformation of carbon-carbon composite materials // *AIAA Journal*. 1980. Vol. 18, no. 8. P. 995–1001.
- [2] Lomakin E., Fedulov B. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // *Meccanica*. 2015. Vol. 50, no. 6. P. 1527–1535.
- [3] Smith E., Pascoe K. The role of shear deformation in the fatigue failure of a glass fiber-reinforced composite // *Composites*. 1977. no. 8. P. 237–243.
- [4] Sokolova M.Yu., Khristich D.V., Rudakov V.V. A nonlinear model of plates made of composite materials // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 2018. Т. 37, № 3. С. 100–106. (in Russian).
- [5] Khristich D.V. Identification of anisotropic materials and modeling of processes of finite deformation of hypoelastic bodies. Dissertation for the Degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences. 2015. (in Russian).
- [6] Sokolova M., Rudakov V., Khristich D. Strains of plates of nonlinear anisotropic materials // *IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1203. p. 012024 (11 pages).