Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 4 (50). С. 59–72

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

ПСЕВДОВЕКТОРНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ГЕМИТРОПНОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ УПРУГОСТИ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В статье обсуждаются вопросы, связанные с выводом и преобразованиями дифференциальных операторов, соответствующих модели гемитропного микрополярного континуума, при изменении ориентации базисного репера. Приводятся необходимые сведения из алгебры псевдотензоров. В терминах псевдотензоров формулируются уравнения динамики гемитропного микрополярного упругого тела с 9-ю определяющими псевдоскалярами. Указываются формы псевдовекторных гиперболических дифференциальных операторов в специальных системах координат. Обсуждаются свойства дифференциальных операторов изотропной микрополярной упругости. Рассмотрены преобразования дифференциальных операторов в случае зеркального отражения относительно заданной плоскости.

Ключевые слова: псевдотензор, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, определяющий псевдоскаляр, микрополярный гемитропный континуум, дифференциальный оператор

DOI: 10.37972/chgpu.2021.50.4.005

УДК: 539.374

1. Введение. В случае, когда тела облают микроструктурными особенностями возникает необходимость применения микрополярных теорий упругости [1–5]. Изотропное (центрально-симметричное) микрополярное тело не всегда может быть использовано в качестве математической модели материалов с микроструктурой. В особенности это касается материалов и объектов проявляющих свойства хиральности

Мурашкин Евгений Валерьевич
e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.
Радаев Юрий Николаевич
e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.01.2021

или имеющих винтовую микроструктуру. В этом случае, микрополярное твердое тело, оказывается изотропно относительно вращений координатного репера, но не относительно отражений. Такие среды называются полуизотропными (гемитропными). Материалы могут проявлять полуизотропность в микро- (кварц, сахар, биологические молекулы), а также в макро- масштабе (кости, пористые материалы, композиты, содержащие волокна или включения). Гемитропные среды из-за отсутствия физико-механической симметрии между объектом и его зеркальным отображением известны в оптике как оптически активные материалы. Они характеризуются присущей им лево- или правоориентированностью на оптических частотах из-за естественной спиральной структуры и, следовательно, не могут совпадать с их зеркальным отражением. Физические поля гемитропного микрополярного континуума в рамках математической модели представляются относительными тензорами. Математический аппарат относительных тензоров достаточно хорошо развит, о чем свидетельствуют многочисленные монографии по тензорному исчислению. Тем не менее, формализм относительных тензоров очень редко применяется в исследованиях по микрополярным средам [1–5].

Важное значение имеют дифференциальные операторы, соответствующие математической модели гемитропной микрополряной среды. Вид дифференциального оператора и условия его факторизуемости [5] могут существенно упростить построение решения системы уравнений, составляющих математическую модель. Настоящее исследование осуществляется на основе аппарата прседотензорного исчисления. Ранее, в работах авторов [11, 14, 15] обсуждались вопросы применения алгебры и анализа псевдотензоров к задачам механики растущих тел и микрополярной теории упругости. Изучались условия гиперболичности и факторизуемости дифференциальных операторов изотропной микрополярной упругости [5].

Во введении обсуждается актуальность настоящего исследования. Приводятся необходимые литературные источники по алгебре псевдотензоров и гемитропной упругости.

Во втором разделе приводятся основные сведения из алгебры псевдотензоров. Вводится понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра. В терминах псевдотензоров формулируются уравнения динамики гемитропного микрополярного упругого континуума с 9 определяющими псевдоскалярами.

В третьем разделе проводится анализ псевдовекторных дифференциальных операторов, соответствующих модели микрополярного материала. Особое внимание уделено координатным системам, удовлетворяющим ограничению $e = \pm \overset{[+1]}{1}$. Приводятся формы дифференциальных операторов в право- и левориентированных системах координат. Отмечается, что в отличие от гемитропнных дифференциальных операторов, изотропные операторы сохраняют свою форму при изменении ориентации базисного репера.

Четвертый раздел статьи посвящен вопросам преобразования дифференциальных операторов гемитропного тела при зеркальном отражении относительно заданной плоскости. Приведены формы для дифференциальных операторов, векторов перемещений и микровращений. Полученные результаты позволяют заключить, что произвольно заданному решению системы дифференциальных уравнений гемитропной микрополярной упругости соответствует зеркально преобразованное решение. Это обстоятельство позволяет вести речь о прямых и зеркальных модах при распространении связанных монохроматических волн перемещений и микровращений [16].

2. Система дифференциальных уравнений динамики гемитропного микрополярного упругого континуума. Динамические уравнения гемитропного микрополярного тела в подавляющем большинстве источников выводятся в терминах абсолютных тензоров [1–3]. Однако, как показали недавние исследования [11, 14, 15], геометрически и физически корректная формулировка уравнений *гемитропной* микрополярной теории возможна только в терминах псевдотензоров. Здесь мы не будем подробно воспроизводить определение и свойства псевдотензоров. Изложение алгебры псевдотензоров с необходимой степенью полноты можно найти в руководствах по тензорному анализу [17–22], а ее применение к механике континуума в работах [11,14,15]. Исключительное значение при этом имеет понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра e [11, 14, 15], который в N–мерном пространстве можно определить как косое произведение [23, с. 63–65] абсолютных векторов ковариантного базиса

$$\lceil \underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \ldots, \underset{N}{\boldsymbol{\imath}} \rfloor = e. \tag{1}$$

Не сложно показать, что в метрическом пространстве справедливо соотношение

$$e^2 = g, \tag{2}$$

где g — детерминант метрического тензора.

В пространстве трех измерений справедливо

$$e_{ijk} = \lceil \underset{i}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{j}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{k}{\boldsymbol{\imath}} \rfloor = (\underset{i}{\boldsymbol{\imath}} \times \underset{j}{\boldsymbol{\imath}}) \cdot \underset{k}{\boldsymbol{\imath}}, \tag{3}$$

тогда

$$e = \overset{[+1]}{e}_{123} = \lceil \underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{3}{\boldsymbol{\imath}} \rfloor = (\underset{1}{\boldsymbol{\imath}} \times \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}) \cdot \underset{3}{\boldsymbol{\imath}}. \tag{4}$$

Отметим лишь, что псевдотензоры легко преобразовывать в абсолютные тензоры при помощи фундаментального ориентирующиего псевдоскаляра e (см. [11, 14, 15]). Для произвольного псевдотензора веса W имеем

$$T^{pqr\cdots s}_{ij\cdots l} = e^{-W} \overset{[W]}{T}{}^{pqr\cdots s}_{ij\cdots l}. \tag{5}$$

Следствием принципа виртуальных перемещений [4, 15] являются уравнения динамики микрополярной среды, которые примем в форме

$$\nabla_i t^{ik} = \rho\, \partial^2_{\cdot\cdot} u^k, \tag{6}$$

$$\nabla_i \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k} - 2\overset{[-1]}{\tau}_k = \rho \overset{[-2]}{\Im} \partial^2_{\cdot\cdot} \overset{[+1]}{\phi}_k, \tag{7}$$

где $\overset{[-1]}{\tau}_j$ — ассоциированный (сопутствующий) псевдовектор силовых напряжений

$$-\overset{[-1]}{\tau}_j = \frac{1}{2}\epsilon_{jik} t^{[ik]}, \quad t^{[ik]} = -\epsilon^{ikj} \overset{[-1]}{\tau}_j. \tag{8}$$

Ассоциированный (сопутствующий) вектор моментных напряжений определяется по аналогии с (8)

$$\mu^i = \frac{1}{2}\epsilon^{iks} \overset{[-1]}{\mu}_{[ks]}, \quad \overset{[-1]}{\mu}_{[is]} = e_{isj}\mu^j. \tag{9}$$

Введем микрополярный упругий потенциал $\mathscr{U}$, рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема, с псевдотензорными аргументами

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}(\epsilon_{(ij)}, \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(ij)}, \overset{[+1]}{\varphi}{}^{i}, \kappa_i), \tag{10}$$

где

$$\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - \epsilon_{ijk} \overset{[+1]}{\varphi}{}^k, \quad \overset{[+1]}{\varphi}{}^i = \overset{[+1]}{\phi}{}^i - \frac{1}{2}\epsilon^{ikl}\nabla_k u_l, \quad \kappa_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijs} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{[js]}. \tag{11}$$

Обычно, аргументами упругого потенциала выступают абсолютные тензоры. Здесь существенным является использование формализма псевдотензоров, обеспечивающего чувствительность определяющих псевдоскаляров к преобразованиям инверсии пространства и зеркальным отражениям.

Упругий потенциал $\mathscr{U}$ по физическому смыслу является объективной величиной и не может меняться при повороте осей системы координат. Поэтому он (так же как и его первая вариация $\delta\mathscr{U}$) является абсолютным скаляром. Первая вариация упругого потенциала представляется сбалансированной по весам суммой

$$\delta\mathscr{U} = t^{(ij)}\delta\varepsilon_{ij} + \overset{[-1]}{\mu}{}_{(ij)}\delta \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(ij)} + 2\overset{[-1]}{\tau}{}_i \delta \overset{[+1]}{\varphi}{}^i + 2\mu^i \delta\kappa_i, \tag{12}$$

откуда могут быть получены определяющие уравнения:

$$t^{(ij)} = \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\varepsilon_{ij}}, \quad \overset{[-1]}{\mu}{}_{(ij)} = \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(ij)}}, \quad 2\overset{[-1]}{\tau}{}_i = \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial \overset{[+1]}{\varphi}{}^i}, \quad 2\mu^i = \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\kappa_i}. \tag{13}$$

В качестве потенциала $\mathscr{U}$, который как указывалось выше инвариантен относительно поворотов и переносов пространства, а также относительно преобразований инверсии пространства и зеркальных отражений, в гемитропном случае следует выбрать квадратичную функцию

$$\begin{aligned}
\mathscr{U} = G[\nu(1-2\nu)^{-1} g^{is} g^{lm} \epsilon_{(is)}\epsilon_{(lm)} + {} \\
&+ \overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L} c_3 g_{is} g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + g^{is} g^{lm} \epsilon_{(il)}\epsilon_{(sm)} + {} \\
&+ \overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L} g_{is} g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(il)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(sm)} + 2\overset{[-2]}{c}_1 g_{is} \overset{[+1]}{\varphi}{}^i \overset{[+1]}{\varphi}{}^s + {} \\
&+ \overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\overset{[+2]}{c}_2 g^{is}\kappa_i\kappa_s + \overset{[-1]}{L} c_4 g^{is} g_{lm} \epsilon_{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + {} \\
&+ \overset{[-1]}{L} c_5 \epsilon_{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)} + \overset{[-1]}{L} c_6 \kappa_i \overset{[+1]}{\varphi}{}^i],
\end{aligned} \tag{14}$$

где G — модуль сдвига (имеет размерность силовых напряжений); ν — коэффициент Пуассона (не имеет физической размерности); $\overset{[-1]}{L}$ — характеристическая микродлина; $\overset{[-2]}{c}_1$, $\overset{[+2]}{c}_2$, c_3, c_4, c_5, c_6 — не имеющие физической размерности псевдоскаляры.

В результате приходим к определяющим уравнениям гемитропной микрополярной среды:

$$
\begin{aligned}
&t^{(is)} = 2G\left(\nu(1-2\nu)^{-1}g^{is}g^{lm} + g^{il}g^{sm}\right)\epsilon_{(lm)} + \\
&\qquad\qquad + G\overset{[-1]}{L}(c_4 g^{is}g_{lm}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + c_5\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)}),\\
&\overset{[-1]}{\mu}_{(is)} = 2G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}(c_3 g_{is}g_{lm} + g_{il}g_{sm})\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \\
&\qquad\qquad + G\overset{[-1]}{L}(c_4 g_{is}g^{lm}\epsilon_{(lm)} + c_5\epsilon_{(is)}),\\
&\overset{[-1]}{\tau}_i = 2G\overset{[-2]}{c}_1 g_{is}\overset{[+1]}{\varphi}{}^s + \frac{1}{2}G\overset{[-1]}{L}c_6\kappa_i,\\
&\mu^i = G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\overset{[+2]}{c}_2 g^{is}\kappa_s + \frac{1}{2}G\overset{[-1]}{L}c_6\overset{[+1]}{\varphi}{}^i.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Уравнения динамики гемитропного микроплярного упругого континуума в криволинейных координатах, вводя обозначения для дифференциальных операторов $\mathscr{L}^i$ и $\overset{[-1]}{\mathscr{M}}_i$ и принимая обозначения для определяющих постоянных

$$
c'_4 = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c'_5 = \frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c'_6 = -c_6 \tag{16}
$$

записываются в форме

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}^i(\partial_{\cdot}, \nabla_k, u^k, \overset{[+1]}{\phi}{}^k) = G[(1 + e^2\overset{[-2]}{c}_1)\nabla^s\nabla_s u^i + \\
&\quad + (1 - e^2\overset{[-2]}{c}_1 + 2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + 2\overset{[-2]}{c}_1\epsilon^{ikl}\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}_l + \\
&\qquad + \overset{[-1]}{L}c'_4\nabla^i\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^k + \overset{[-1]}{L}c'_5\nabla^k\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^i] - \rho\,\partial^2_{\cdot\cdot}u^i = 0,\\
&\overset{[-1]}{\mathscr{M}}_i(\partial_{\cdot}, \nabla_k, u^k, \overset{[+1]}{\phi}{}^k) = G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}[(1 + e^{-2}\overset{[+2]}{c}_2)\nabla^s\nabla_s\overset{[+1]}{\phi}_i + \\
&\quad + (1 - e^{-2}\overset{[+2]}{c}_2 + 2c_3)\nabla_i\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^k + \overset{[-1]}{L}{}^{-1}c'_4\nabla_i\nabla^k u_k + \\
&\qquad + \overset{[-1]}{L}{}^{-1}c'_5\nabla^k\nabla_k u_i + \overset{[-1]}{L}{}^{-1}c'_6\epsilon_{isl}\nabla^s\overset{[+1]}{\phi}{}^l] - \\
&\qquad - 2G\overset{[-2]}{c}_1(2\overset{[+1]}{\phi}_i - e^2\epsilon_{ikl}g^{ks}\nabla_s u^l) - \rho\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}\partial^2_{\cdot\cdot}\overset{[+1]}{\phi}_i = \overset{[-1]}{0}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

3. Гиперболические дифференциальные операторы изотропной и гемитропной микрополярной упругости в координатных системах с различной ориентацией. Рассмотрим подробней операторы в динамических уравнениях (17). Дифференциальные операторы $\mathscr{L}^i$ и $\overset{[-1]}{\mathscr{M}}_i$ являются соответственно векторным и псевдовекторным гиперболическими линейными дифференциальными операторами второго порядка. Причем естественными компонентами оператора $\mathscr{L}^i$ являются контравариантные компоненты, а компоненты оператора $\overset{[-1]}{\mathscr{M}}_i$ — ковариантными. Из

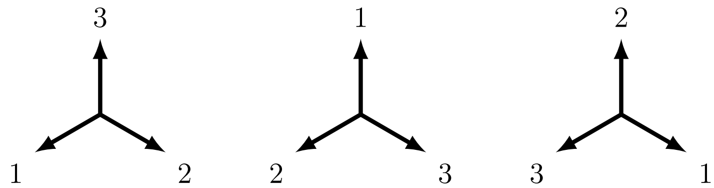

Рис. 1. Правоориентированные тройки направлений в трехмерном пространстве

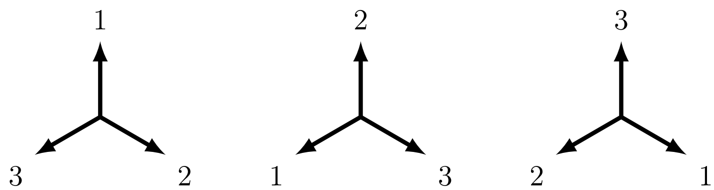

Рис. 2. Левоориентированные тройки направлений в трехмерном пространстве

уравнений (17) видно, что дифференциальный оператор $\mathscr{L}^i$ имеет нулевой вес, а оператор $\overset{[-1]}{\mathscr{M}_i}$ имеет вес -1. Поэтому, при изменении ориентации базисного репера дифференциальные операторы $\mathscr{L}^i$ и $\overset{[-1]}{\mathscr{M}_i}$ будут преобразоваться по разным законам. Из формул (17) видно, что слагаемые с определяющими скалярами c_4', c_5', c_6' изменят свой знак при изменении ориентации базисного репера.

Базисные направления и различные способы их нумерации являются фундаментальными понятиями в теории относительных тензоров. При перестановке двух номеров реперных направлений ориентация всего репера изменяется на противоположную, т.е. правоориентированный репер становится левоориентированным. Как отмечалось в предыдущем разделе, в механике континуума ориентацию базисного репера удобно задавать фундаментальным ориентирующим скаляром e. Тройки базисных векторов для которых $(e > 0)$ будем считать правоориентированными (рис. 1),
а для $(e < 0)$ — левоориентированными (рис. 2).

Важное прикладное значение имеют системы координат удовлетворяющие ограничению

$$\sqrt{g} = \overset{[+1]}{1}. \tag{18}$$

Такие координатные системы часто используются не только в астрономии и теории относительности [24], но и в механике деформируемого твердого тела [25]. В монографии [24, с. 135–142] условие $\sqrt{g} = \overset{[+1]}{1}$ используется при выводе уравнения тяготения в 4-пространстве–времени, что существенно упрощает уравнения теории поля. В монографии [25] условие (18) используется в процессе разделения изостатических координат в основных уравнениях математической теории пластичности.

Полученное условие (18), можно заменить более широким условием, учитывающем левостороннюю и правостороннюю ориентацию системы координат,

$$e = \pm \overset{[+1]}{1}. \tag{19}$$

Это оказывается существенным в механике гемитропных микрополярных сред, когда компоненты определяющего тензора чувствительны к изменениям ориентации пространства.

В правоориентированной системе координат ($e = 1$) дифференциальный оператор $\mathscr{L}^i$ примет вид

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_i(\partial_., \partial_k, u_k, \mho_k) = G[(1 + c_1)\partial_s\partial_s u_i + (1 - c_1 + \\ + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\partial_i\partial_k u_k + 2c_1\epsilon_{ikl}\partial_k\mho_l + Lc'_4\partial_i\partial_k\mho_k + \\ + Lc'_5\partial_k\partial_k\mho_i] - \rho\,\partial^2_{..}u_i, \end{aligned} \tag{20}$$

а оператор $\overset{[-1]}{\mathscr{M}_i}$ —

$$\begin{aligned} \overset{[-1]}{\mathscr{M}_i}(\partial_., \partial_k, u_k, \mho_k) = GL^2[(1 + c_2)\partial_s\partial_s\mho_i + (1 - c_2 + \\ + 2c_3)\partial_i\partial_k\mho_k + L^{-1}c'_4\partial_i\partial_k u_k + L^{-1}c'_5\partial_k\partial_k u_i + \\ + L^{-1}c'_6\epsilon_{isl}\partial_s\mho_l] - 2Gc_1(2\mho_i - \epsilon_{ikl}\partial_k u_l) - \rho\Im\partial^2_{..}\mho_i. \end{aligned} \tag{21}$$

В выражениях (22) и (23) принято обозначение: $\overset{[+1]}{\phi}{}^k \to \mho^k$ — специальный символ, вес которого мы не будем указывать, точно так же как это имеет место для ϵ–символов.

В левоориентированной декартовой системе координат ($e = -1$) оператор $\mathscr{L}^i$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_i(\partial_., \partial_k, u_k, \mho_k) = G[(1 + c_1)\partial_s\partial_s u_i + (1 - c_1 + \\ + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\partial_i\partial_k u_k + 2c_1\epsilon_{ikl}\partial_k\mho_l - Lc'_4\partial_i\partial_k\mho_k - \\ - Lc'_5\partial_k\partial_k\mho_i] - \rho\,\partial^2_{..}u_i, \end{aligned} \tag{22}$$

а дифференциальный оператор $\overset{[-1]}{\mathscr{M}_i}$ —

$$\begin{aligned} \overset{[-1]}{\mathscr{M}_i}(\partial_., \partial_k, u_k, \mho_k) = GL^2[(1 + c_2)\partial_s\partial_s\mho_i + (1 - c_2 + \\ + 2c_3)\partial_i\partial_k\mho_k - L^{-1}c'_4\partial_i\partial_k u_k - L^{-1}c'_5\partial_k\partial_k u_i - \\ - L^{-1}c'_6\epsilon_{isl}\partial_s\mho_l] - 2Gc_1(2\mho_i - \epsilon_{ikl}\partial_k u_l) - \rho\Im\partial^2_{..}\mho_i. \end{aligned} \tag{23}$$

Псевдовекторные дифференциальные операторы $\mathscr{L}^i$ и $\overset{[-1]}{\mathscr{M}_i}$ предельным переходом ($c'_4 \to 0$, $c'_5 \to 0$, $c'_6 \to 0$) в формуле (17) преобразуются к операторам для модели изотропного микрополярного тела:

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}^i(\partial_{\cdot}, \nabla_k, u^k, \overset{[+1]}{\phi}{}^k) = G[(1+e^2\overset{[-2]}{c}_1)\nabla^s\nabla_s u^i + \\
&\qquad + (1 - e^2\overset{[-2]}{c}_1 + 2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + 2\overset{[-2]}{c}_1\epsilon^{ikl}\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}_l] - \rho\,\partial^2_{\cdot\cdot} u_i, \\
&\overset{[-1]}{\mathscr{M}}_i(\partial_{\cdot}, \nabla_k, u^k, \overset{[+1]}{\phi}{}^k) = G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}[(1+e^{-2}\overset{[+2]}{c}_2)\nabla^s\nabla_s\overset{[+1]}{\phi}_i + \\
&\qquad\qquad + (1-e^{-2}\overset{[+2]}{c}_2+2c_3)\nabla_i\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^k] - 2Gc_1(2\mho_i - \epsilon_{ikl}\partial_k u_l) - \rho\mathfrak{I}\partial^2_{\cdot\cdot}\mho_i.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Несложно заметить, что операторы, определенные соотношениями (24), в отличие от гемитропнных дифференциальных операторов, сохраняют свою формы при изменении ориентации базисного репера. Для координатных систем с ограничением (19) они примут вид

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}^i(\partial_{\cdot}, \nabla_k, u^k, \overset{[+1]}{\phi}{}^k) = G[(1+\overset{[-2]}{c}_1)\nabla^s\nabla_s u^i + \\
&\qquad + (1 - \overset{[-2]}{c}_1 + 2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + 2\overset{[-2]}{c}_1\epsilon^{ikl}\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}_l] - \rho\,\partial^2_{\cdot\cdot} u_i, \\
&\overset{[-1]}{\mathscr{M}}_i(\partial_{\cdot}, \nabla_k, u^k, \overset{[+1]}{\phi}{}^k) = G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}[(1+\overset{[+2]}{c}_2)\nabla^s\nabla_s\overset{[+1]}{\phi}_i + \\
&\qquad\qquad + (1-\overset{[+2]}{c}_2+2c_3)\nabla_i\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^k] - 2Gc_1(2\mho_i - \epsilon_{ikl}\partial_k u_l) - \rho\mathfrak{I}\partial^2_{\cdot\cdot}\mho_i.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

4. Преобразование дифференциальных операторов гемитропной микрополярной модели при зеркальном отражении относительно одной из координатных плоскостей. Рассмотрим преобразование зеркального отражения относительно плоскости x_1Ox_2 ($x_k \to \underset{*}{x}_k$), величины в новой системе координат обозначим звездочкой снизу. Тогда

$$
\underset{*}{x}_1 = x_1, \quad \underset{*}{x}_2 = x_2, \quad \underset{*}{x}_3 = -x_3. \tag{26}
$$

В таблице приведем объекты в правоориентированной декартовой системе координат, зеркально отраженной системе координат и формулы, связывающие их между собой. Произведя замену согласно таблице, для оператора $\mathscr{L}^i$ получаем

$$
\begin{aligned}
&\underset{*}{\mathscr{L}}_1(\underset{*}{\partial}_k, \underset{*}{u}_k, \underset{*}{\mho}_k) = G[(1+c_1)\partial_s\partial_s u_1 + (1-c_1 + \\
&\qquad + 2\nu(1-2\nu)^{-1})\partial_1\partial_k u_k + 2c_1\epsilon_{1kl}\partial_k\mho_l - Lc_4'\partial_1\partial_k\mho_k - \\
&\qquad\qquad - Lc_5'\partial_k\partial_k\mho_1] - \rho\,\partial^2_{\cdot\cdot} u_1 = \mathscr{L}_1(\partial_k, u_k, \mho_k),
\end{aligned}
\tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
&\underset{*}{\mathscr{L}}_2(\underset{*}{\partial}_k, \underset{*}{u}_k, \underset{*}{\mho}_k) = G[(1+c_1)\partial_s\partial_s u_2 + (1-c_1 + \\
&\qquad + 2\nu(1-2\nu)^{-1})\partial_2\partial_k u_k + 2c_1\epsilon_{2kl}\partial_k\mho_l - Lc_4'\partial_2\partial_k\mho_k - \\
&\qquad\qquad - Lc_5'\partial_k\partial_k\mho_2] - \rho\,\partial^2_{\cdot\cdot} u_2 = \mathscr{L}_2(\partial_k, u_k, \mho_k),
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Таблица соответствия для прямой и зеркально отраженной декартовых координатных систем.

криволинейная система координат	правоориентированная декартова система координат	зеркальная система координат	формулы преобразования
x^k	x^k	$\underset{*}{x}^k$	$\underset{*}{x}_1 = x_1$ $\underset{*}{x}_2 = x_2$ $\underset{*}{x}_3 = -x_3$
e	1	-1	$\underset{*}{e} = -e$
ϵ^{ijk}	ϵ_{ijk}	ϵ_{ijk}	
ϵ_{ijk}	ϵ_{ijk}	ϵ_{ijk}	
∇_i	∂_i	$\underset{*}{\partial}_i$	$\underset{*}{\partial}_1 = \partial_1$ $\underset{*}{\partial}_2 = \partial_2$ $\underset{*}{\partial}_3 = -\partial_3$
u^i	u_i	$\underset{*}{u}_i$	$\underset{*}{u}_1 = u_1$ $\underset{*}{u}_2 = u_2$ $\underset{*}{u}_3 = -u_3$
$\overset{[+1]}{\phi}{}^k$	$\mho_k$	$\underset{*}{\mho}_k$	$\underset{*}{\mho}_1 = -\mho_1$ $\underset{*}{\mho}_2 = -\mho_2$ $\underset{*}{\mho}_3 = \mho_3$
$\mathscr{L}^i(\nabla_k, u^k, \mho^k)$	$\mathscr{L}_i(\partial_k, u^k, \mho^k)$	$\underset{*}{\mathscr{L}}_i(\underset{*}{\partial}_k, \underset{*}{u}^k, \underset{*}{\mho}^k)$	$\underset{*}{\mathscr{L}}_1 = \mathscr{L}_1$ $\underset{*}{\mathscr{L}}_2 = \mathscr{L}_2$ $\underset{*}{\mathscr{L}}_3 = -\mathscr{L}_3$
$\mathscr{M}_i(\nabla_k, u^k, \mho^k)$	$\mathscr{M}_i(\partial_k, u^k, \mho^k)$	$\underset{*}{\mathscr{M}}_i(\underset{*}{\partial}_k, \underset{*}{u}^k, \underset{*}{\mho}^k)$	$\underset{*}{\mathscr{M}}_1 = -\mathscr{M}_1$ $\underset{*}{\mathscr{M}}_2 = -\mathscr{M}_2$ $\underset{*}{\mathscr{M}}_3 = \mathscr{M}_3$
$\overset{[-1]}{L}$	L	$\underset{*}{L}$	$\underset{*}{L} = -L$
$\overset{[-2]}{c}_1$	c_1	c_1	
$\overset{[+2]}{c}_2$	c_2	c_2	
$\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	

$$\begin{aligned}\underset{*}{\mathscr{L}}_3(\underset{*}{\partial}_k, \underset{*}{u}_k, \underset{*}{\mho}_k) = -G[(1+c_1)\partial_s\partial_s u_3 - (1-c_1+{}\\ + 2\nu(1-2\nu)^{-1})\partial_3\partial_k u_k - 2c_1\epsilon_{3kl}\partial_k\mho_l + Lc'_4\partial_3\partial_k\mho_k+{}\\ + Lc'_5\partial_k\partial_k\mho_3] + \rho\, \underset{\cdot\cdot}{\partial}^2 u_3 = -\mathscr{L}_3(\partial_k, u_k, \mho_k),\end{aligned} \quad (29)$$

а для оператора $\overset{[-1]}{\mathscr{M}}_i$ получим

$$\begin{aligned}\overset{[-1]}{\mathscr{M}}_1(\underset{*}{\partial}_k, \underset{*}{u}_k, \underset{*}{\mho}_k) = -GL^2[(1+c_2)\partial_s\partial_s\mho_1 - {}\\ - (1-c_2+2c_3)\partial_1\partial_k\mho_k - L^{-1}c_4'\partial_1\partial_k u_k - {}\\ - L^{-1}c_5'\partial_k\partial_k u_1 - L^{-1}c_6'\epsilon_{1sl}\partial_s\mho_l] + 2Gc_1(2\mho_1 + {}\\ + \epsilon_{1kl}\partial_k u_l) + \rho\Im\partial^2_{\cdot\cdot}\mho_1 = -\overset{[-1]}{\mathscr{M}}_1(\partial_k, u_k, \mho_k),\end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}\overset{[-1]}{\mathscr{M}}_2(\underset{*}{\partial}_k, \underset{*}{u}_k, \underset{*}{\mho}_k) = -GL^2[(1+c_2)\partial_s\partial_s\mho_2 - {}\\ - (1-c_2+2c_3)\partial_2\partial_k\mho_k - L^{-1}c_4'\partial_2\partial_k u_k - {}\\ - L^{-1}c_5'\partial_k\partial_k u_2 - L^{-1}c_6'\epsilon_{2sl}\partial_s\mho_l] + 2Gc_1(2\mho_2 + {}\\ + \epsilon_{2kl}\partial_k u_l) + \rho\Im\partial^2_{\cdot\cdot}\mho_2 = -\overset{[-1]}{\mathscr{M}}_2(\partial_k, u_k, \mho_k),\end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}\overset{[-1]}{\mathscr{M}}_3(\underset{*}{\partial}_k, \underset{*}{u}_k, \underset{*}{\mho}_k) = GL^2[(1+c_2)\partial_s\partial_s\mho_3 + {}\\ + (1-c_2+2c_3)\partial_3\partial_k\mho_k + L^{-1}c_4'\partial_3\partial_k u_k + {}\\ + L^{-1}c_5'\partial_k\partial_k u_3 + L^{-1}c_6'\epsilon_{3sl}\partial_s\mho_l] - 2Gc_1(2\mho_3 - {}\\ - \epsilon_{3kl}\partial_k u_l) - \rho\Im\partial^2_{\cdot\cdot}\mho_3 = \overset{[-1]}{\mathscr{M}}_3(\partial_k, u_k, \mho_k),\end{aligned} \quad (32)$$

Заключение. Статья посвящена вопросам вывода и преобразований дифференциальных операторов, соответствующих модели гемитропного микрополярного континуума, при изменении ориентации базисного репера.

(1) Приводятся основные сведения из алгебры псевдотензоров. Вводится понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра. В терминах псевдотензоров формулируются уравнения динамики гемитропного микрополярного упругого континуума с 9 определяющими псевдоскалярами.

(2) Проводится анализ псевдовекторных дифференциальных операторов, соответствующих модели гемитропной микрополярной среды. Особое внимание уделено координатным системам, удовлетворяющим ограничению $e = \pm\overset{[+1]}{1}$.

(3) Приводятся формы дифференциальных операторов в право- и левориентированных систем координат. Отмечается, что в отличие от гемитропнных дифференциальных операторов, изотропные операторы сохраняют свою форму при изменении ориентации базисного репера.

(4) Рассмотрены преобразования дифференциальных операторов в случаях зеркального отражения относительно заданной плоскости. Полученные результаты позволяют заключить, что произвольно заданному решению системы дифференциальных уравнений гемитропной микрополярной упругости соответствует зеркально преобразованное решение.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Besdo D. Ein beitrag zur nichtlinearen theorie des Cosserat-kontinuums //Acta Mechanica. 1974. T. 20. №. 1. C. 105-131.

[2] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin : Springer, 1972. 285 p.

[3] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 pp.

[4] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. С. 504–517. URL: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635.

[5] Радаев Ю.Н. О факторизации основного гиперболического дифференциального оператора микрополярной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 6. С. 24-32.

[6] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.Совместность сильных разрывов в микрополярных термоупругих средах. Псевдотензорная формулировка // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 2(44). С.155-160.

[7] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона-Кэли // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 130-138.

[8] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25 № 3 С. 457-474.

[9] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном псевдотензорном обобщении связывающих двусторонних граничных условий Югонио-Адамара // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С.104-114.

[10] Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. К теории ориентированных тензорных элементов площади микрополярного континуума, погруженного во внешнее плоское пространство // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 2. С. 3-13.

[11] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020.Т. 24, No 3. С. 424–444.

[12] Мурашкин Е. В. О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3d материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 1(47). С.114-121.

[13] Ковалев В. А., Мурашкин Е. В. О постановке граничных условий при моделировании процессов производства тканых материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 3(49). С.56-65.

[14] Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, No 4. С. 399–412.

[15] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation // Вестник Самарского государственного технического университета.Серия Физико-математические науки. 2020. Т. 24, No 4. С. 752–761.

[16] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С.115-127.

[17] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. 226–902 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6_2.

[18] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Eng. Trans. G. B. Gurevich, Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 pp.]

[19] Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ: с приложениями к геометрии, механике ифизике. М.: Физматлит, 1963. 411 с.

[20] Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. – 456 с. [Eng. Trans. Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.]

[21] Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с. [Eng. Trans. Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 pp.]
[22] Synge J. L. and Schild A. Tensor calculus. New York, Dover Publications Inc., 1978. xi+324 pp.
[23] Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М.: Наука. 1966. 648 с.
[24] Kopff A. Mathematical Theory of Relativity. Dutton: Dutton Press, 1921. 214 pp.
[25] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности.Самара: Самарский университет, 2006. 340 с.

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

PSEUDOVECTOR HYPERBOLIC DIFFERENTIAL OPERATORS OF HEMITROPIC MICROPOLAR ELASTICITY

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper deals with the derivations and transformations of differential operators related to the hemitropic micropolar elastic model under mirror reflections. The requisite equations from algebra of pseudotensors are given. Dynamic differential equations for a hemitropic micropolar elastic solid with 9 constituve pseudoscalars are derived in terms of pseudotensors. Pseudovector hyperbolic differential operator forms caused by different coordinate net orientations are obtained and discussed. The properties of differential operators for isotropic micropolar elasticity are discussed. Mirror reflection transformations of the differential operators are considered.

Keywords: pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, constitutive pseudoscalar, micropolar hemitropic continum, differential operator

REFERENCES

[1] Besdo D. Ein beitrag zur nichtlinearen theorie des Cosserat-kontinuums // Acta Mechanica. 1974. V. 20. No 1. P. 105-131.
[2] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972. 285 p.
[3] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986.383 pp.
[4] Radaev, Yu. N., The rule of factors in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics, Vestn. Myself. state tech. un-that. Ser. Phys.-mat. science. 2018.Vol. 22, pp. 504–517. URL: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635.
[5] Radaev Yu. N. Factorization of the Main Hyperbolic Differential Operator of the Micropolar Elasticity Theory // Mech. Solids. 2020. Vol. 55 Iss. 6. p. 776-783.
[6] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Compatibility of strong discontinuities in micropolar thermoelastic media. A pseudotensor formulation // Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2020. № 2(44). p. 155-160.
[7] Murashkin E. V. and Radayev Yu. N., Generalization of the Algebraic Hamilton-Cayley Theory, Mech. Solids. 2021. Vol. 56 Iss. 6. Pp. 996-1003.
[8] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the constitutive pseudoscalars of hemitropic micropolar media in inverse coordinate frames, Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.] 2021. Vol. 25 Iss. 3 Pp. 457–474.
[9] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a pseudotensor generalization of the Hugoniot-Hadamard linking boundary conditions // Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2021. № 2(48). Pp. 104-114.
[10] Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On the theory of oriented tensor elements of area in a micropolar continuum immersed in outer plane space // Mech. Solids. 2022. Vol. 57 Iss. 2. Pp. 220-227.
[11] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.] Vol. 24, No 3. Pp. 424–444.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Yuri N. Radayev, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

[12] Murashkin E. V. On the boundary conditions formulation in the problems of synthesis of woven 3d materials // Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2021. № 1(47). p. 114-121.

[13] Kovalev V. A., Murashkin E. V. On the statements of boundary conditions in models of the woven materials production // Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2021. № 3(49). p. 56-65.

[14] Radaev Yu.N., Murashkin E.V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of Strength and Plasticity. 2020.Vol. 82, No. 4, pp. 399–412.

[15] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation // Bulletin of the Samara State Technical University, Physics and Mathematics Series. 2020. Vol. 24, No. 4, pp. 752–761.

[16] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Direct, inverse and mirror wave modes of coupled displacements and microrotations monochromatic plane waves in hemitropic micropolar media // Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state . 2021. № 2(48). p. 115-127

[17] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: Encyclopedia of Physics. Vol. III / 1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960.226-902 pp. DOI: 10.1007 / 978-3-642-45943-6 _2.

[18] Gurevich GB Foundations of the theory of algebraic invariants. M., L .: OGIZ, GITTL, 1948.408 p. [Eng. Trans. G. B. Gurevich, Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 pp.]

[19] McConnell A.J. Introduction to tensor analysis: with applications to geometry, mechanics and physics. Moscow: Fizmatlit, 1963.411 p.

[20] Schouten Ya. A. Tensor analysis for physicists. M .: Science. 1965 .– 456 s. [Eng. Trans. Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.]

[21] Sokolnikov I. S. Tensor analysis. Theory and applications in geometry and in continuum mechanics. Moscow: Nauka, 1971.376 p. [Eng. Trans. Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 pp.]

[22] Synge J. L. and Schild A. Tensor calculus. New York, Dover Publications Inc., 1978. xi + 324 pp.

[23] Rosenfeld B.A. Multidimensional spaces. M .: Nauka. 1966.648 p.

[24] Kopff A. Mathematical Theory of Relativity. Dutton: Dutton Press, 1921. 214 pp.

[25] Radaev Yu. N. Spatial problem of the mathematical theory of plasticity. Samara: Samara University, 2006. 340 p.