Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 4 (50). С. 82–90

Т. К. Нестеров, Е. В. Мурашкин

ОБЪЕМНЫЙ РОСТ СОСТАВНОГО ТОЛСТОСТЕННОГО УПРУГОГО ЦИЛИНДРА

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В данной работе представлено решение задачи наращивания тела цилиндрической формы. Рассмотрен процесс объемного роста в области наращивания. Решение задачи строится в рамках модели малых упругих деформаций. В рассмотрение введены три конфигурации деформируемого тела: естественная, виртуальная, актуальная. Вычислены распределения перемещений и напряжений возникающих в процессе роста.

Ключевые слова: объемный рост, 3D-материал, задача Ламе, виртуальная конфигурация, численное моделирование

DOI: 10.37972/chgpu.2021.50.4.010

УДК: 539.374

1. Введение. Современные методы проектирования и изготовления изделий и конструкций сложной формы основаны на различных технологических процессах обработки материалов (ламинирование, фотополимеризация, стереолитография, намотка, наплавка, замораживание, абляция, сегментация, фронтальное и послойное отверждение) [1–4]. Эти производственные процессы аддитивных технологий связаны с синтезом изделий путем последовательного добавления материала на поверхность произвольной формы. Процедура выбора корректных краевых условий на поверхности наращивания является актуальной фундаментальной проблемой современной деформируемого твердого тела и прикладной математики.

Нестеров Тимофей Константинович
`e-mail:` nesterovtim@gmail.com, программист, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.
Мурашкин Евгений Валерьевич
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.03.2021

Решение прикладной задачи механики роста твердого тела зачастую является сложной и трудоемкой процедурой. [5–11]. Существенной особенностью постановки краевых задач в рамках механики роста является постановка граничных условий на границе раздела между исходным материалом и добавляемой частью [12–16].

В данной работе рассмотрена задача о объемном росте составного цилиндра. Предполагается, что рост происходит во внутреннем цилиндре, что в свою очередь вызывает упругие деформации как во внутреннем, так и во внешнем цилиндре. Данные упругие деформации отчасти компенсируют изменение геометрии вызванное ростом. В процессе решения рассматривается 3 конфигурации тела: естественная, виртуальная и актуальная. Виртуальная конфигурация введена рассматривает тело без нагрузок с напряжениями и деформациями, вызванными исключительно процессом роста. Полагаем, что в процессе роста плотность первого и второго цилиндра остается постоянной.

2. Постановка задачи. Рассмотрим составного цилиндр с круглым поперечным сечением, состоящий из двух вложенных цилиндров: внутреннего (I) и внешнего (II). В дальнейшем все величины принадлежащие первому цилиндру будем обозначать одним штрихом справа — $\cdot'$, а второму двумя штрихами — $\cdot''$. Предполагаем, что цилиндры состоят из упругого, изотропного материала. Используется линейный закон Гука, упругие деформации считаем малыми. Предполагаем, что внутренний цилиндр подвержен осесимметричному, заранее известному, процессу объемного роста $\gamma(t)$, где t — параметр времени. Материальные модули Юнга цилиндров обозначим E' и E'', а коэффициенты Пуассона ν' и ν''. Рассмотрим рост в отсутствии массовых сил.

3. Идея и алгоритм решения задачи объемного роста. Для решения поставленной задачи воспользуемся идеей мультипликативного разложения тензора деформации, изложенной в [4]. Для этого рассмотрим три последовательные конфигурации:

(1) Естественная. Начальная конфигурация в до начала процесса роста в отсутствии внешних воздействий.
(2) Виртуальная конфигурация. Во второй конфигурации предполагаем, что в результате роста тело I неким образом изменило свое положение в пространстве, но при этом, геометрические и внешние силовые условия не влияют на деформирование тела.
(3) Актуальная конфигурация. Конечная конфигурация характеризуется наложением всех силовых и геометрических условий, в том числе условий непрерывности вектора перемещений на границе роста.

3.1. Естественная конфигурация. В данном состоянии геометрию тела можно задать следующим образом: A — радиус внешней границы внутреннего цилиндра, а B — радиус внешней границы, внешнего цилиндра. В рассматриваемой конфигурации, положение точек тела в пространстве с точностью до поворота описывается переменной R_0, т.е. каждая точка тела I занимает положение $R_0' \in [0, A]$. Положения точек внешнего цилиндра (II), принимают значения $R_0'' : R_0'' \in [A, B]$. Какие либо напряжения или внешние силы в данной конфигурации на тело не действуют.

3.2. Виртуальная конфигурация. Теперь рассмотрим виртуальную конфигурацию, в ней мы предполагаем, что процесс роста вызвал изменение геометрии тела, но при этом еще отсутствует влияние внешних сил, внутренних и поверхностных напряжений, а также геометрических ограничений. В данной конфигурации значения радиуса для каждой точки обозначим, как R' для I тела и R'' для II тела. В таком параметр роста можно записать, как отношение бесконечно малого участка тела I в начальной конфигурации к бесконечно малому участку тела I в виртуальной:

$$\frac{\partial R'}{\partial R_0} = \gamma'(R_0, t) = \gamma(t). \tag{1}$$

Для тела II это может быть записано, как

$$\frac{\partial R''}{\partial R_0} = \gamma''(R_0, t) = 1.$$

Если проинтегрировать соотношение (1)

$$R'(R_0, t) = \int\limits_0^{R_0} \gamma'(\xi, t) d\xi = \gamma'(t) \int\limits_0^{R_0} d\xi = \gamma'(t) R_0,$$

то несложно заметить, что тело I будет пересекаться с телом II, если $\gamma'(t)R_0 > 1$. В обратном случае $\gamma'(t)R_0 < 1$, будет возникать разрыв перемещений.

3.3. Актуальная конфигурация. Рассмотрим актуальную конфигурацию. Предположим, что на этом этапе изменение положения точек тела вызвано приложенными внешними силами и условием того, что тело остается сплошным. В данной конфигурации положения точек тела будем обозначать r' и r'', для первого и второго слоя, соответственно. В таком случае, введем в рассмотрение параметры:

$$\frac{\partial r'}{\partial R'} = \alpha', \quad \frac{\partial r'}{\partial R''} = \alpha''$$

Тогда, изменение положения точек тела I и II относительно естественной конфигурации, будет описываться, как

$$\frac{\partial r'}{\partial R_0} = \frac{\partial r'}{\partial R'} \frac{\partial R'}{\partial R_0} = \alpha' \gamma' = \alpha' \gamma(t), \quad \frac{\partial r''}{\partial R_0} = \frac{\partial r''}{\partial R''} \frac{\partial R''}{\partial R_0} = \alpha'' \gamma'' = \alpha''$$

Если мы определим вектор перемещения как $u'_R(R', t) = r'(R'(t), t) - R'(t)$, то

$$\frac{\partial r'}{\partial R'} = 1 + \frac{\partial u'_R(R', t)}{\partial R'} = \alpha'(R', t)$$

В общем же случае градиент упругих деформаций для первого тела примет вид:

$$\mathbf{F}'_e = \left(1 + \frac{\partial u'_R(R', t)}{\partial R'}\right) \mathbf{E}_{r'r'} \otimes \mathbf{E}_{R'R'} + \left(1 + \frac{u'(R', t)}{R'}\right) \mathbf{E}_{\varphi'\varphi'} \otimes \mathbf{E}_{\Phi'\Phi'} + \mathbf{E}_{z'z'} \otimes \mathbf{E}_{Z'Z'}$$

Вычислим компоненты тензора конечных деформаций Грина:

$$2L'_{r'R'} = \left(\left(1 + \frac{\partial u'_R(R', t)}{\partial R'}\right)^2 - 1\right) = \left(2\frac{\partial u'_R(R', t)}{\partial R'} + \left(\frac{\partial u'_R(R', t)}{\partial R'}\right)^2\right),$$

$$2L'_{\varphi'\Phi'} = \left(\left(1 + \frac{u'_R(R', t)}{R'}\right)^2 - 1\right) = \left(2\frac{u'_R(R', t)}{R'} + \left(\frac{u'_R(R', t)}{R'}\right)^2\right),$$

$$2L'_{z'Z'} = 1^2 - 1 = 0,$$

откуда с учетом о предположении бесконечной малости упругих деформаций получим, что

$$\varepsilon'_{r'R'}(R') = \frac{\partial u'_R(R',t)}{\partial R'}, \quad \varepsilon'_{\varphi'\Phi'}(R') = \frac{u'_R(R',t)}{R'}, \quad \varepsilon'_{z'Z'}(R') = 0, \tag{2}$$

где ε'_{ij} — соответствующая компонента тензора малых упругих деформаций для первого тела. То же самое верно и для второго тела.

Уравнения равновесия для первого и второго тела в актуальной конфигурации примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{r'R'}(R',t)}{\partial R'} + \frac{\sigma_{r'R'}(R',t) - \sigma_{\varphi'\varphi'}(R',t)}{R'} = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{r''R''}(R'',t)}{\partial R''} + \frac{\sigma_{r''R''}(R'',t) - \sigma_{\varphi''\varphi''}(R'',t)}{R''} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Закон Гука для I тела записывается в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{r'R'} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon'_{r'R'}(R',t) + \nu\varepsilon'_{\varphi'\Phi'}(R',t)) \\ \sigma_{\varphi'\varphi'} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon'_{\varphi'\Phi}(R') + \nu\varepsilon'_{r',R'}(R',t)). \end{aligned}$$

Для тела II закон Гука запишется подобным образом, что и для I тела, в формуле (4) следует заменить один штрих на два.

Решение системы уравнений (3) в нашем случае примет вид

$$u'_R(R') = C'_1(t)R'(R_0,t) + \frac{C'_2}{R'(R_0,t)}, \qquad u''_R(R'') = C''_1 R''(R_0) + \frac{C''_2}{R''(R_0)}. \tag{4}$$

Для определения неизвестных интегрирования $C'_1(t)$, $C'_2(t)$, $C''_1(t)$, $C''_2(t)$ применим ряд условий.

Во-первых, для тела I потребуем, по аналогии с обычной задачей Ламе, $u'_R(R',t) = 0$ при $R' = 0$. Откуда $C'_2 = 0$.

Во-вторых, исходя из требования неразрывности тела, условием на границе I и II тела потребуем:

$$r'(R'(A),t) = r''(R''(A),t)$$

или же

$$\begin{gathered} R'(A) + u'_{R'}(R'(A,t),t) = R''(A) + u''_{R''}(R''(A),t) \\ \gamma(t)A + u'_{R'}(\gamma(t)A,t) = A + u''_{R''}(A,t). \\ \gamma(t)A + C'_1(t)\gamma(t)A = A + C''_1(t)A + \frac{C''_2(t)}{A} \end{gathered}$$

преобразуем и получим:

$$\gamma(t)(1 + C'_1(t)) = 1 + C''_1(t) + \frac{C''_2(t)}{A^2} \tag{5}$$

В-третьих, учтем граничные условия на внешней границе II тела

$$\sigma''_{r''R''}(R''(B),t) = p(t),$$

в терминах перемещений примет вид:

$$\frac{E''}{1-(\nu'')^2}\left(C''_1(t)(1+\nu'') + \frac{C''_2(t)(1-\nu'')}{B^2}\right) = p(t).$$

В-четвертых, для вывода условия определения констант в зоне контакта рассмотрим тела по отдельности и запишем для каждого соответствующие граничное условие. Тело I вследствие роста подвергается сжимающим напряжениям, так что

$$\hat{\Sigma}' \cdot \bar{n}' = p' \overleftarrow{e_r}. \tag{6}$$

Здесь $\hat{\Sigma}'$ — тензор напряжений Коши для первого тела, $\bar{n}'$ — вектор единичной нормали, направленный от границы первого тела, $\overleftarrow{e_r} = -\overrightarrow{e_r}$ — единичный вектор противоположный базисному вектору. Если преобразовать уравнение (6), то получим:

$$\sum_{i,j=1}^{3} (\sigma'_{ij} \overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e_j}) \cdot \overrightarrow{e_r} = p' \overleftarrow{e_r},$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} \sigma'_{ij} \delta_{ir} \overrightarrow{e_j} = -p' \overrightarrow{e_r},$$

$$\sigma'_{rr} \overrightarrow{e_r} = -p' \overrightarrow{e_r},$$

т.к. $\sigma'_{r1} := \sigma'_{r'R'}$, а $\sigma'_{r2} := \sigma'_{r'\varphi'} = 0$ и $\sigma'_{r3} := \sigma'_{r'Z'} = 0$.

Тело II, в свою очередь, подвергается растягивающим напряжениям из-за роста первого тела, поэтому

$$\hat{\Sigma}'' \cdot \bar{n}'' = p'' \overrightarrow{e_r}.$$

Здесь $\hat{\Sigma}''$ — тензор напряжений Коши для второго тела, $\bar{n}'' = \overleftarrow{e_r}$ — вектор единичной нормали, направленный от границы второго тела.

$$\sum_{i,j=1}^{3} (\sigma''_{ij} \overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e_j}) \cdot \overleftarrow{e_r} = p'' \overrightarrow{e_r},$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} (-\sigma''_{ij} \delta_{ir} \overrightarrow{e_j}) = p'' \overrightarrow{e_r},$$

$$-\sigma''_{rr} \overrightarrow{e_r} = p'' \overrightarrow{e_r},$$

т.к. $\sigma''_{r1} := \sigma''_{r''R''}$, а $\sigma''_{r2} := \sigma''_{r''\varphi''} = 0$ и $\sigma''_{r3} := \sigma''_{r''Z''} = 0$.

Далее предполагаем, что сила, с которой тело I давит на тело II, равна силе, с которой тело II давит на тело I, т.е.

$$p' = p'',$$

тогда,

$$\sigma'_{r'R''} \overrightarrow{e_r} = -(-\sigma''_{r''R''}) \overrightarrow{e_r} = \sigma''_{r''R''} \overrightarrow{e_r},$$

или же

$$\sigma'_{r'R'}(R'(A), t) = -\sigma''_{r''R''}(R''(A), t),$$

или же терминах вектора перемещений:

$$\frac{E'}{1-(\nu')^2} (C'_1(t)(1+\nu')) = \frac{E''}{1-(\nu'')^2} \left(C''_1(t)(1+\nu'') + \frac{C''_2(t)(1-\nu'')}{A^2} \right).$$

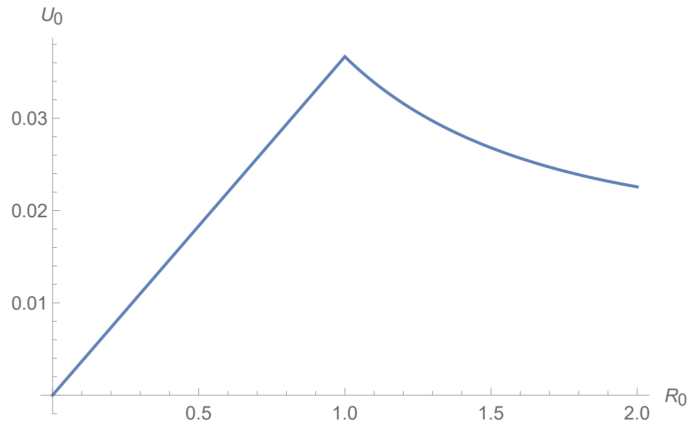

Рис. 1. Радиальное перемещение.

Теперь запишем все четыре условия для определения неизвестных $C_1'(t)$, $C_2'(t)$, $C_1''(t)$, $C_2''(t)$:

$$
\begin{aligned}
&C_2' = 0\\
&\gamma(t)(1 + C_1') = 1 + C_1'' + \frac{C_2''}{A^2},\\
&\frac{E''}{1-(\nu'')^2}\left(C_1''(1+\nu'') + \frac{C_2''(\nu''-1)}{B^2}\right) = p(t),\\
&\frac{E'}{1-(\nu')^2}(C_1'(1+\nu')) = -\frac{E''}{1-(\nu'')^2}\left(C_1''(1+\nu'') + \frac{C_2''(\nu''-1)}{A^2}\right).
\end{aligned}
$$

Решив последнюю систему, найдем неизвестные интегрирования как функции от $\gamma(t)$,$p(t)$, E',E'',ν',ν'', B, A, т.е. все материальные и физические параметры оказались учтены.

Численные пример. Рассмотрим численный пример, предположим, что функция роста имеет вид $\gamma(t) = \gamma = 1.05$. $E' = E'' = 200$, $\nu' = \nu'' = 0.25$, $A = 1$, $B = 2$, $p(t) = 0$ Данный случай можно сравнить с изготовлением составного цилиндра с натягом [9, 11].

Общие перемещения точек тела, заданные как $U_0 = r(R(R0)) - R_0$ изображены на рис. 1. Распределения радиальных и окружных напряжений изображены на рис. 2 и 3 соответственно.

Можно заметить, что несмотря на отрицательные упругие перемещения для тела I, оно все равно увеличилось за счет объемного роста. Так, $r'(R'(A)) = r''(R''(A)) = 1.03667$. При этом $r''(R''(B)) - r''(R''(a)) = 0.985896$, т.е второе тело будет находиться в состоянии сжатия, как и первое, что можно увидеть на графике распределения радиальных напряжений (рис. 2).

Отметим, что несмотря на то, что на тело не действуют внешние силы, тело I и тело II все же испытывают как радиальные, так и окружные напряжения.

4. Заключение. В данной работе на примере модельной задачи Ламе рассмотрен алгоритм решения задачи объемного роста с использованием промежуточной

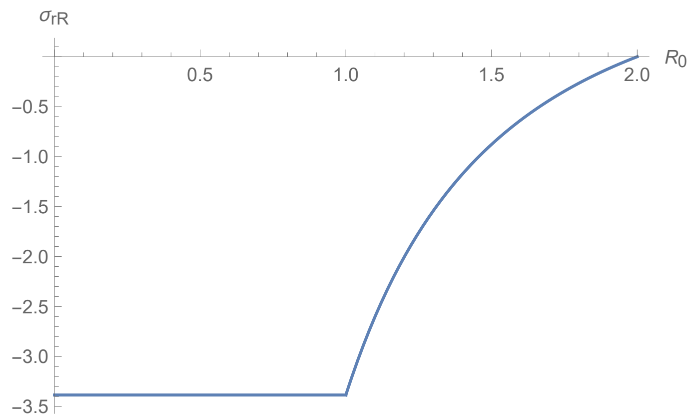

Рис. 2. Радиальное напряжение.

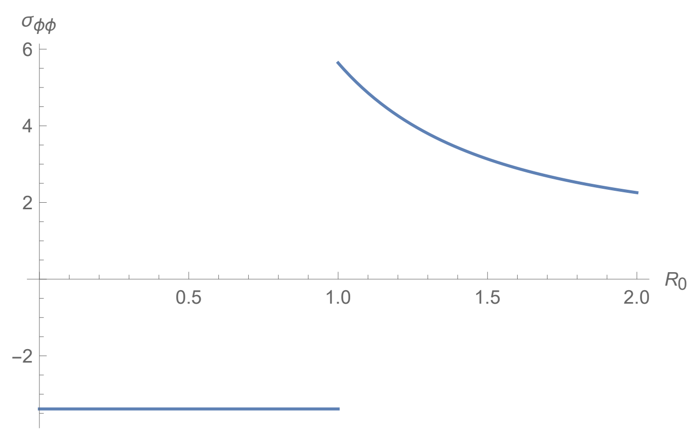

Рис. 3. Окружное напряжение.

(виртуальной) конфигурации. Получено аналитическое решение в предположении о малости упругих деформациях и линейно-упругом поведении материала. Представлены численные результаты расчета для случая объемного роста внутреннего цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Berman B. 3-D printing: The new industrial revolution // Business Horizons. 2012. T. 55. C. 155–162.
[2] Epstein M., Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // International Journal of Plasticity. 2000. T. 16. C. 951–978.
[3] Maugin G. A. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials // Journal of Mechanics of Materials and Structures. 2009. c. 731–741.
[4] Goriely A. The mathematics and mechanics of biological growth. New York: Springer, 2017. xxii + 646 c.
[5] Arutyunyan N. Kh. Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // J. Appl. Math. Mech. 1984. T. 48. C. 1–10.
[6] V. Southwell R. An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists. London: Oxford Univ. Press, 1936.

[7] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2014. T. 14. C. 199–209.
[8] Manzhirov A.V., Mikhin M.N., Murashkin E.V. Torsion of a growing shaft // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2017. T. 21, № 4. C. 684–698.
[9] Murashkin E. V., Dats E. P., Stadnik N. E. Application of surface growth model for a pathological process in a blood vessel's wall // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020.
[10] Manzhirov A.V., Murashkin E.V., Parshin D.A. Modeling of additive manufacturing and surface growth processes // AIP Conference Proceedings / AIP Publishing LLC. T. 2116. 2019. c. 380011.
[11] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. The simulation of atherosclerosis by the 3-layered growthing cylinder // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2019. C. 362–365.
[12] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. T. 24, № 3. C. 424–444.
[13] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2019. T. 23, № 4. C. 646–656.
[14] Murashkin E.V., Radaev Yu. N. On a differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing solids // Mechanics of Solids. 2019. T. 54. C. 1157–1164.
[15] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. Об одном классе определяющих уравнений на растущей поверхности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. C. 11–29.
[16] Мурашкин Е. В. О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3d материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. C. 114–121.

T. K. Nesterov, E. V. Murashkin

VOLUMETRIC GROWTH OF A COMPOSITE THICK-WALLED ELASTIC CYLINDER

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

Abstract. This paper presents a solution to the problem of growing a cylindrical solids. The process of volumetric growth in the extension area is considered. The solution of the problem is obtained within the framework of the model of small elastic deformations. Three configurations of a solid are introduced into consideration: natural, virtual, actual. The distributions of displacements and stresses during the process of growth are calculated.

Keywords: volumetric growth, 3D material, Lame problem, virtual configuration, numerical simulation

REFERENCES

[1] Berman B. 3-D printing: The new industrial revolution // Business Horizons. 2012. T. 55. C. 155–162.
[2] Epstein M., Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // International Journal of Plasticity. 2000. T. 16. C. 951–978.
[3] Maugin G. A. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials // Journal of Mechanics of Materials and Structures. 2009. c. 731–741.
[4] Goriely A. The mathematics and mechanics of biological growth. New York: Springer, 2017. xxii + 646 c.

Timofei K. Nesterov, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

[5] Arutyunyan N. Kh. Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // J. Appl. Math. Mech. 1984. T. 48. C. 1–10.
[6] V. Southwell R. An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists. London: Oxford Univ. Press, 1936.
[7] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2014. T. 14. C. 199–209.
[8] Manzhirov A.V., Mikhin M.N., Murashkin E.V. Torsion of a growing shaft // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2017. T. 21, № 4. C. 684–698.
[9] Murashkin E. V., Dats E. P., Stadnik N. E. Application of surface growth model for a pathological process in a blood vessel's wall // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020.
[10] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. T. 24, № 3. C. 424–444.
[11] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2019. T. 23, № 4. C. 646–656.
[12] Murashkin E.V., Radaev Yu. N. On a differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing solids // Mechanics of Solids. 2019. T. 54. C. 1157–1164.
[13] Manzhirov A.V., Murashkin E.V., Parshin D.A. Modeling of additive manufacturing and surface growth processes // AIP Conference Proceedings / AIP Publishing LLC. T. 2116. 2019. c. 380011.
[14] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. The simulation of atherosclerosis by the 3-layered growthing cylinder // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2019. C. 362–365.
[15] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a Class of Constitutive Equations on Propagating Growing Surface // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. I.Ya. Yakovlev. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2019. C. 11–29.
[16] Murashkin E. V. On the boundary conditions formulation in the problems of synthesis of woven 3d materials // Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2021. C. 114–121.