Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 4 (50). С. 91–97

Н. Э. Стадник

О НАРАЩИВАНИИ 3D-МАТЕРИАЛА В УСЛОВИЯХ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В статье приводится решение краевой задачи, моделирующей процессы синтеза 3D материала в условиях осевой симметрии. Разработан метод решения поставленной краевой задачи. Условие тонкостенности позволяет изучить конечные перемещения точек цилиндра при условии малых деформаций. Это, в частности, дает возможность решить задачу с точными краевыми условиями на движущейся поверхности. Обсуждаются особенности поведения основных характеристик, зависящие от давления на внутреннюю поверхность цилиндра, натяга на поверхности наращивания и скорости ее распространения. Получены распределения окружных и радиальных напряжений. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании процессов синтеза тканых 3D материалов.

Ключевые слова: поверхность наращивания, 3D материал, осевая симметрия, параметры Ламэ

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.012

УДК: 539.374

Вводные замечания. Современные методы проектирования и изготовления изделий и конструкций сложной формы основаны на различных технологических процессах обработки материалов (ламинирование, фотополимеризация, стереолитография, намотка, наплавка, замораживание, абляция, сегментация, фронтальное и послойное отверждение) [1–4]. Эти производственные процессы аддитивных технологий связаны с синтезом изделий путем последовательного добавления материала на поверхность произвольной формы. Процедура выбора корректных краевых условий на поверхности наращивания является актуальной фундаментальной проблемой современной деформируемого твердого тела и прикладной математики.

© Стадник Н. Э. 2021
Стадник Никита Эдуардович
e-mail: nik-122@mail.ru, младший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.09.2021

Решение прикладной задачи механики роста твердого тела зачастую является сложной и трудоемкой процедурой. [5–11]. Существенной особенностью постановки краевых задач в рамках механики роста является постановка граничных условий на границе раздела между исходным материалом и добавляемой частью [12–16].

В статье рассматриваются модельные задачи для упругого тонкостенного поверхностно растущего цилиндра. Условие тонкостенности позволяет изучить конечные перемещения точек цилиндра при условии малых деформаций. Это, в частности, дает возможность решить задачу с точными краевыми условиями на движущейся поверхности. Обсуждаются особенности поведения основных характеристик, зависящие от давления на внутреннюю поверхность цилиндра, натяга на поверхности наращивания и скорости ее распространения.

5. Основные модельные соотношения Рассмотрим бесконечно-длинный полый упругий цилиндр с внутренним и внешним радиусом R_1 и R_2 соответственно, что соответствует постановке классической задачи Ламэ. Соотношения между тензором напряжений σ_{ij} и деформаций e_{ij} в изотропном упругом материале цилиндра подчинены закону Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)e_{rr} + \lambda(e_{\varphi\varphi} + e_{zz}), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= (\lambda + 2\mu)e_{\varphi\varphi} + \lambda(e_{rr} + e_{zz}), \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)e_{zz} + \lambda(e_{\varphi\varphi} + e_{rr}), \end{aligned} \tag{1}$$

где λ, μ — параметры Ламе.

Приняв гипотезу о плоском напряженном состоянии, для малых деформаций будем иметь:

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r},\ e_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r},\ e_{zz} = 0, \tag{2}$$

где u_r — радиальная компонента вектора перемещений.

Компоненты тензора напряжений удовлетворяют уравнению равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0. \tag{3}$$

Выразив компоненты деформаций (1) через напряжения, и, используя соотношения (2–3), получим дифференциальное уравнение для определения радиального напряжения:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(2\sigma_{rr} + r\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}\right) = 0. \tag{4}$$

Проинтегрировав уравнение (4), получим общее решение для радиального напряжения:

$$\sigma_{rr} = A + \frac{B}{r^2}. \tag{5}$$

Для функций $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz}, u_r, согласно (1–5), будем иметь:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_{zz} = \frac{\lambda A}{(\lambda + \mu)}, \quad u_r = \frac{Ar}{2(\lambda + \mu)} - \frac{B}{2\mu r}. \tag{6}$$

На боковые поверхности цилиндра действует стационарная нагрузка

$$\sigma_{rr}(R_1) = p_1,\ \sigma_{rr}(R_2) = -p_2. \tag{7}$$

Из решения системы (7) получим выражения для констант интегрирования:

$$A = -\frac{p_1 R_1^2 + p_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad B = \frac{R_1^2 R_2^2 (p_1 + p_2)}{R_2^2 - R_1^2}. \tag{8}$$

Соотношения (5)–(8) определяют напряженно-деформированное состояние перед началом процесса наращивания. Пусть в некоторый момент времени $t = 0$ на внутренней поверхности цилиндра начинается наращивание материала со скоростью $v = v(t)$, тогда условия на поверхности наращивания [12–16] могут быть записаны в виде:

$$\dot{\sigma}_{rr}(R_1(t)) = -\frac{v(t)\tau(t)}{R_1(t)}, \quad R_1(t) = R_1 - v(t)t, \quad \dot{\sigma}_{rr}(R_2) = 0. \tag{9}$$

В (9) точкой обозначена скорость рассматриваемой величины, которая в рамках модели малых деформаций может определяться, как частная производная функции по времени; $\tau(t)$ — окружное напряжение (натяг) наращиваемого слоя в момент присоединения к цилиндру. Данная величина определяет формирующийся натяг в присоединяемом материале. Для корректного описания напряженно-деформированного состояния материала в условиях непрерывного наращивания $t > 0$, необходимо перейти к постановке в скоростях рассматриваемых функций напряжений и перемещений (5–6):

$$\begin{gathered} \dot{\sigma}_{rr} = X(t) + \frac{Y(t)}{r^2}, \quad \dot{\sigma}_{\varphi\varphi} = X(t) - \frac{Y(t)}{r^2}, \\ \dot{\sigma}_{zz} = \frac{\lambda X(t)}{(\lambda + \mu)}, \quad \dot{u}_r = \frac{X(t) r}{2(\lambda + \mu)} - \frac{Y(t)}{2\mu r}. \end{gathered} \tag{10}$$

Неизвестные функции времени $X(t)$, $Y(t)$ несложно определить из решения системы (9)

$$X(t) = \frac{R_1(t) v(t) \tau(t)}{R_2^2 - R_1^2(t)}, \quad Y(t) = -\frac{R_1(t) v(t) \tau(t) R_2^2}{R_2^2 - R_1^2(t)}. \tag{11}$$

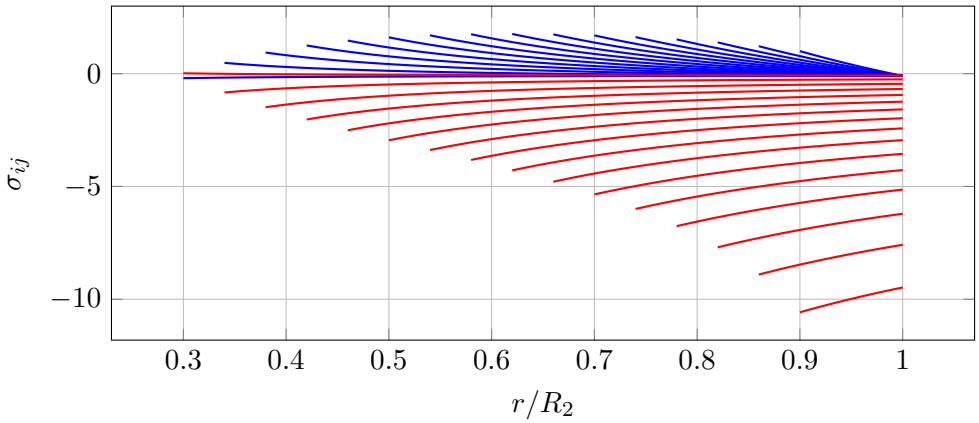
Соотношения для напряжений и перемещений в процессе наращивания определим, проинтегрировав (10) по времени с учетом начальных условий (5–6):

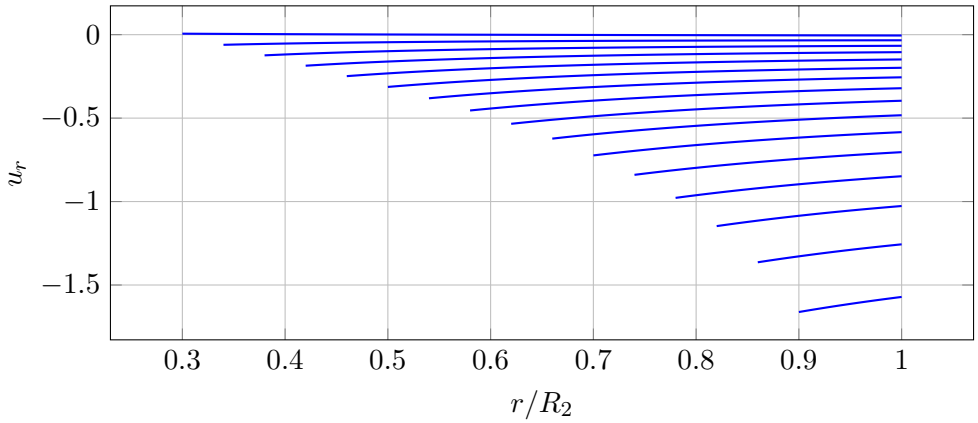
$$\begin{gathered} \sigma_{rr} = A + \frac{B}{r^2} + \int_0^t \left(X(s) + \frac{Y(s)}{r^2} \right) dt, \\ \sigma_{\varphi\varphi} = A - \frac{B}{r^2} + \int_0^t \left(X(s) - \frac{Y(s)}{r^2} \right) dt, \\ \sigma_{zz} = \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)} \left(A + \int_0^t X(s) dt \right), \\ u_r = \frac{Ar}{2(\lambda + \mu)} - \frac{B}{2\mu r} + \left(\int_0^t \frac{X(s) r}{2(\lambda + \mu)} - \frac{Y(s)}{2\mu r} \right) dt. \end{gathered} \tag{12}$$

6. Численные результаты. В численных экспериментах использовались различные различные значения размеров наращиваемого слоя $R_1(t)$ и уровня натяга $\tau(t)$. Для случая $v(t) = const$, $\tau(t) = const$ установлено, что в зависимости от заранее выбранной толщины наращиваемого слоя $R_1(t) - R_1$ уровень τ оказывает ключевое влияние на формирование итогового напряженно-деформированного состояния материала. На рис. 6 показано распределение радиальных (синие линии) и окружных (красные линии) напряжений в процессе роста. При выборе определенного значения

τ, в процессе роста внутренней стенки на внутренней поверхности $R_1(t)$ напряжения уменьшаются до нулевого значения. На рис. 6 изображено радиальное перемещение в процессе роста. Расчеты проводились при следующих обезразмеренных параметрах материала:

$$\begin{gathered}\tau = 6, \quad \lambda = 4, \quad \mu = 2, \quad v = 0.1, \\ p_1 = 1, \quad p_2 = 0.1, \quad R_1 = 0.9, \quad R_2 = 1.\end{gathered} \tag{13}$$





7. Заключение. В статье решена краевая задача, моделирующая процессы синтеза 3D материала в условиях осевой симметрии. Разработан метод решения поставленной краевой задачи. Условие тонкостенности позволяет изучить конечные перемещения точек цилиндра при условии малых деформаций. Это, в частности, дает возможность решить задачу с точными краевыми условиями на движущейся поверхности. Обсуждаются особенности поведения основных характеристик, зависящие от давления на внутреннюю поверхность цилиндра, натяга на поверхности наращивания и скорости ее распространения. Получены распределения окружных и радиальных напряжений. Многочисленные расчеты показали, что при отсутствии начального натяга в присоединяемом слое установлена концентрация напряжений, вызванная влиянием внутреннего давления. При высоких значениях начального натяга в присоединяемом

слое так же выявлена концентрация напряжений, которая обусловлена существенным влиянием величины натяга в процессе уменьшения радиуса стенки. Таким образом, можно сделать вывод: с одной стороны при правильно выбранных начальных параметрах процесса наращивания, можно добиться минимального влияния внутреннего давления, если таковое имеется, на деформирование стенок цилиндры, с другой стороны определенный режим наращивания способен вызвать процессы необратимого деформирования и разрушения вместе с наращиваемым слоем.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Berman B. 3-D printing: The new industrial revolution // Business Horizons. 2012. T. 55. C. 155–162.
[2] Epstein M., Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // International Journal of Plasticity. 2000. T. 16. C. 951–978.
[3] Maugin G. A. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials // Journal of Mechanics of Materials and Structures. 2009. c. 731–741.
[4] Goriely A. The mathematics and mechanics of biological growth. New York: Springer, 2017. xxii + 646 c.
[5] Arutyunyan N. Kh. Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // J. Appl. Math. Mech. 1984. T. 48. C. 1–10.
[6] V. Southwell R. An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists. London: Oxford Univ. Press, 1936.
[7] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2014. T. 14. C. 199–209.
[8] Manzhirov A.V., Mikhin M.N., Murashkin E.V. Torsion of a growing shaft // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2017. T. 21, № 4. C. 684–698.
[9] Murashkin E. V., Dats E. P., Stadnik N. E. Application of surface growth model for a pathological process in a blood vessel's wall // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020.
[10] Manzhirov A.V., Murashkin E.V., Parshin D.A. Modeling of additive manufacturing and surface growth processes // AIP Conference Proceedings / AIP Publishing LLC. T. 2116. 2019. c. 380011.
[11] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. The simulation of atherosclerosis by the 3-layered growthing cylinder // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2019. C. 362–365.
[12] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. T. 24, № 3. C. 424–444.
[13] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2019. T. 23, № 4. C. 646–656.
[14] Murashkin E.V., Radaev Yu. N. On a differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing solids // Mechanics of Solids. 2019. T. 54. C. 1157–1164.
[15] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. Об одном классе определяющих уравнений на растущей поверхности // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. С. 11–29.
[16] Мурашкин Е. В. О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3d материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. С. 114–121.

N. E. Stadnik

ON A GROWING PROCESS OF A 3D MATERIAL UNDER AXIAL SYMMETRY CONDITIONS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The article provides a solution to a boundary value problem that simulates the processes of synthesis of a 3D material under conditions of axial symmetry. A method for solving the stated boundary value problem has been developed. The condition of thin-walledness allows us to study the finite displacements of the cylinder points under the condition of small deformations. This, in particular, makes it possible to solve the problem with exact boundary conditions on a moving surface. The features of the behavior of the main characteristics, which depend on the pressure on the inner surface of the cylinder, the interference on the build-up surface, and the speed of its propagation, are discussed. The distributions of circumferential and radial stresses are obtained. The results obtained can be used in modeling the processes of synthesis of 3D woven materials.

Keywords: growing surface, 3D material, axial symmetry, Lame parameters

REFERENCES

[1] Berman B. 3-D printing: The new industrial revolution // Business Horizons. 2012. T. 55. C. 155–162.
[2] Epstein M., Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // International Journal of Plasticity. 2000. T. 16. C. 951–978.
[3] Maugin G. A. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials // Journal of Mechanics of Materials and Structures. 2009. c. 731–741.
[4] Goriely A. The mathematics and mechanics of biological growth. New York: Springer, 2017. xxii + 646 c.
[5] Arutyunyan N. Kh. Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // J. Appl. Math. Mech. 1984. T. 48. C. 1–10.
[6] V. Southwell R. An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists. London: Oxford Univ. Press, 1936.
[7] Kovalev V. A. Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. 2014. T. 14. C. 199–209.
[8] Manzhirov A.V., Mikhin M.N., Murashkin E.V. Torsion of a growing shaft // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2017. T. 21, № 4. C. 684–698.
[9] Murashkin E. V., Dats E. P., Stadnik N. E. Application of surface growth model for a pathological process in a blood vessel's wall // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020.
[10] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. T. 24, № 3. C. 424–444.
[11] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2019. T. 23, № 4. C. 646–656.
[12] Murashkin E.V., Radaev Yu. N. On a differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing solids // Mechanics of Solids. 2019. T. 54. C. 1157–1164.
[13] Manzhirov A.V., Murashkin E.V., Parshin D.A. Modeling of additive manufacturing and surface growth processes // AIP Conference Proceedings / AIP Publishing LLC. T. 2116. 2019. c. 380011.
[14] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. The simulation of atherosclerosis by the 3-layered growthing cylinder // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2019. C. 362–365.

Stadnik Nikita Eduardovich, Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

[15] Murashkin E. V. Radayev Yu. N. On a Class of Constitutive Equations on Propagating Growing Surface // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. I.Ya. Yakovlev. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2019. С. 11–29.
[16] Murashkin E. V. On the boundary conditions formulation in the problems of synthesis of woven 3d materials // Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2021. С. 114–121.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research projects nos. 19-51-60001, 20-01-00666.