

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ СИСТЕМАТИЧЕСКОГО ПРИВЕДЕНИЯ ОДНОТОЧЕЧНЫХ ПСЕВДОТЕНЗОРОВ К АБСОЛЮТНЫМ ТЕНЗОРАМ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В настоящей работе предлагается алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров произвольной валентности и веса к абсолютным тензорам. Вес псевдотензора полагается целым числом. Алгоритм основан на преобразовании одноточечного псевдотензора произвольной валентности и веса с использованием символов перестановок как ковариантных, так и контравариантных. Приводятся необходимые сведения из алгебры и анализа псевдотензоров. На основании предложенного алгебраического алгоритма преобразования предлагается реализация ковариантного дифференцирования одноточечного псевдотензорного поля произвольной валентности и веса, с помощью которой вводится определение градиента псевдотензорного поля.

Ключевые слова: псевдотензор, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, символ перестановок, ковариантная производная, градиент

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.002

УДК: 539.374

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н., 2022

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 20-01-00666.

Поступила 20.06.2022

1. Вводные замечания и предварительные сведения. Моделирование поведения современных конструкционных структурных материалов и метаматериалов привело к необходимости использования формализма и принципов современной многомерной геометрии [1–3], псевдотензорного анализа [4–6] и современных моделей моделей механики континуума. Псевдотензоры целого веса⁷ естественным образом возникают в механике упругих микрополярных сред. В частности, таковыми выступают: псевдовекторы микроповоротов⁸, псевдотензор изгиба–кручения, псевдовектор и псевдотензор моментных напряжений, коэффициент микроинерции, распределения объемных и поверхностных моментов. Псевдотензорный формализм особенно интересен при построении моделей полуизотропных микрополярных упругих континуумов (см. [7–13]).

Вывод дифференциальных уравнений, составляющих математическую модель континуума требует определения операторов ковариантного дифференцирования псевдотензора. Литературный поиск сведений о правилах ковариантного дифференцирования псевдотензорных полей заданного целого веса представляет собой трудоемкую задачу. Наиболее ранние попытки вычислить ковариантную производную одноточечного псевдотензора, по-видимому, встречаются в работах [14, 15]. В настоящей работе обсуждаются новые возможные реализации ковариантного дифференцирования одноточечных псевдотензоров, основанные на оригинальных алгебраических алгоритмах систематического приведения одноточечных псевдотензоров целого веса к абсолютным тензорам с помощью символов перестановок. Обсуждаются минимально необходимые сведения из алгебры и анализа псевдотензоров. Различные подходы к развитию псевдотензорного формализма можно найти в книгах по тензорному анализу и механике сплошных сред [4–6, 16, 17].

2. Необходимые сведения из алгебры и анализа псевдотензоров в евклидовом пространстве. Рассмотрим евклидово пространство размерности N . Введем в рассмотрение локальные базисы, связанные с выбранной системой координат: $\mathbf{z}_s$ ($s = 1, 2, \dots, N$) — локальный ковариантный базис; $\mathbf{z}^s$ ($s = 1, 2, \dots, N$) — локальный контравариантный (взаимный) базис.

Базисные векторы и взаимные базисные векторы удовлетворяют следующему соотношению:

$$\mathbf{z}_s \cdot \mathbf{z}^k = \delta_s^k \quad (k = 1, 2, \dots, N; s = 1, 2, \dots, N).$$

Базисные направления и различные способы их нумерации являются фундаментальными понятиями в теории относительных тензоров и ориентируемых многообразий. Речь идет о перестановках ряда чисел $1, 2, \dots, N$.

Символы перестановок $\epsilon^{s_1 s_2 \dots s_N}$ и $\epsilon_{s_1 s_2 \dots s_N}$, называемыми также альтернирующими или дискриминантными символами, являются псевдотензорами и определяются

⁷Хотя как указывают некоторые авторы [4, с. 159] вес псевдоинвариантов может быть дробным.

⁸В микрополярных теориях упругости микроповорот можно описывать абсолютным вектором ϕ^s или одним из двух псевдовекторов

$$\overset{[+1]}{\phi}_s, \quad \overset{[-1]}{\phi}_s$$

Переход от одного псевдовектора к другому не чувствителен к зеркальному преобразованию системы координат.

согласно

$$\begin{aligned} \epsilon_{s_1 s_2 \dots s_N}^{[-1]} &= \epsilon_{s_1 s_2 \dots s_N}^{[+1]} = \\ &= \epsilon(s_1, s_2, \dots, s_N) = \begin{cases} +1, & \text{если } s_1, s_2, \dots, s_N \text{ четная} \\ & \text{перестановка ряда чисел } 1, 2, \dots, N; \\ -1, & \text{если } s_1, s_2, \dots, s_N \text{ нечетная} \\ & \text{перестановка ряда чисел } 1, 2, \dots, N; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Из определения (1) видно, что единственной существенной компонентой символов перестановок будет

$$\epsilon_{12\dots N} = \epsilon^{12\dots N} = 1.$$

Абсолютные дискриминантные тензоры $e^{s_1 s_2 \dots s_N}$ и $e_{s_1 s_2 \dots s_N}$ определяются по аналогии с (1). При этом $e_{s_1 s_2 \dots s_N} = e \epsilon_{s_1 s_2 \dots s_N}$, $e = e_{12\dots N}$ — псевдоскаляр веса $+1$, являющийся косым произведением [1, с. 63–65] векторов ковариантного базиса $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N$:

$$[\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N] = e \quad (2)$$

поскольку

$$\det(\mathbf{z}_c^s) = 1, \quad \mathbf{z}_c^s = \mathbf{z}_c \cdot \overset{s}{\mathbf{z}}_c = \overset{s}{\delta}_c.$$

Псевдоскаляр e — фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, позволяющий идентифицировать правые и левые локальные базисные системы.

Можно показать, что детерминант метрического тензора g является псевдоскаляром веса $+2$, а также $e = \sqrt{g}$ для правоориентированного базиса и $e = -\sqrt{g}$ для левоориентированного базиса.

Несложно заметить, что

$$e^{s_1 s_2 \dots s_N} e_{s_1 s_2 \dots s_N} = \epsilon^{s_1 s_2 \dots s_N} \epsilon_{s_1 s_2 \dots s_N} = N!. \quad (3)$$

Важно также отметить, что для символов перестановок нарушаются правила жонглирования индексами. Поднимать или опускать индексы у символов перестановок необходимо согласно правилу

$$\epsilon^{h_1 h_2 \dots h_N} = e^2 g^{h_1 k_1} g^{h_2 k_2} \dots g^{h_N k_N} \epsilon_{k_1 k_2 \dots k_N}. \quad (4)$$

В пространстве трех измерений справедливо

$$e_{ijk} = [\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j, \mathbf{z}_k] = (\mathbf{z}_i \times \mathbf{z}_j) \cdot \mathbf{z}_k, \quad (5)$$

тогда

$$e = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3] = (\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) \cdot \mathbf{z}_3. \quad (6)$$

Отметим, что псевдотензоры легко преобразовывать в абсолютные тензоры при помощи фундаментального ориентирующего псевдоскаляра e (см. [7–9]). Для произвольного псевдотензора целого веса w имеем

$$T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots h_s} = e^{-w} T_{(n)}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s}. \quad (7)$$

Здесь и далее в квадратных скобках сверху корневого символа будем указывать вес псевдотензорного поля, а в круглых скобках снизу — валентность. Нулевые веса и

ранги не отражаются в обозначениях. То же самое касается весов фундаментальных величин и ориентирующих псевдоскаляров.

3. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров произвольной валентности и веса к абсолютным тензорам. Рассмотрим один алгебраический алгоритм приведения одноточечного псевдотензора произвольного ранга ($s + r = n$) и целого веса w к абсолютному тензору. В частности, если $w > 0$, построим абсолютный тензор согласно формуле

$$T_{(n+Nw)}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_{r+Nw}} = T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r} \underbrace{\epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[-1]} \dots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[-1]}}_w. \quad (8)$$

Аналоги соответствующих псевдотензорных представлений заинтересованный читатель найдет в книге [4, с. 175].

Учитывая свойство символов перестановок (3), можно возвратиться к исходному псевдотензору с помощью обратного преобразования

$$T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r} = (N!)^{-w} T_{(n+Nw)}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_{r+Nw}} \underbrace{\epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[+1]} \dots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[+1]}}_w. \quad (9)$$

Для псевдотензоров с целым отрицательным весом $w < 0$ соотношения (8) и (9) примут вид

$$T_{(n+N|w|)}^{h_1 h_2 \dots h_{s+N|w|} \dots k_1 k_2 \dots k_r} = T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r} \underbrace{\epsilon_{h_{r+1} \dots h_{r+N}}^{[+1]} \dots \epsilon_{h_{r+(|w|-1)N+1} \dots h_{r+N|w|}}^{[+1]}}_{|w|}, \quad (10)$$

$$T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r} = (N!)^{-|w|} T_{(n+N|w|)}^{h_1 h_2 \dots h_{s+N|w|} \dots k_1 k_2 \dots k_r} \underbrace{\epsilon_{h_{r+1} \dots h_{r+N}}^{[-1]} \dots \epsilon_{h_{r+(|w|-1)N+1} \dots h_{r+N|w|}}^{[-1]}}_{|w|}. \quad (11)$$

Для абсолютного тензора $T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r}$ хорошо известна реализация ковариантного дифференцирования⁹

$$\begin{aligned} \nabla_p T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r} &= \partial_p T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r} + \Gamma_{qp}^{h_1} T_{(n)}^{qh_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r} + \dots \\ &\dots + \Gamma_{qp}^{h_s} T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots q \dots k_1 k_2 \dots k_r} - \Gamma_{k_1 p}^q T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots q k_2 \dots k_r} - \dots - \Gamma_{k_r p}^q T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots q}. \end{aligned} \quad (12)$$

Ковариантная производная псевдотензора $T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r}$ валентности n веса w вычисляется согласно (см. [14–16]):

$$\begin{aligned} \nabla_p T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r} &= \partial_p T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r} + \Gamma_{qp}^{h_1} T_{(n)}^{qh_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r} + \dots + \Gamma_{qp}^{h_s} T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots q \dots k_1 k_2 \dots k_r} - \\ &- \Gamma_{k_1 p}^q T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots q k_2 \dots k_r} - \dots - \Gamma_{k_r p}^q T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots q} - w T_{(n)}^{h_1 h_2 \dots h_s \dots k_1 k_2 \dots k_r} \Gamma_{qp}^q. \end{aligned} \quad (13)$$

⁹Отметим, что данная реализация ковариантного дифференцирования пригодна для использования не только в евклидовых, но и в римановых пространствах [2].

Однако, существуют альтернативные подходы реализации ковариантного дифференцирования псевдотензора. Определим ковариантную производную псевдотензора произвольной валентности и целого веса w с помощью соотношения:¹⁰

$$\nabla_p \underset{(n)}{T}^{[w]}_{h_1 h_2 \dots h_s k_1 k_2 \dots k_r} = e^w \nabla_p \left(e^{-w} \underset{(n)}{T}^{[w]}_{h_1 h_2 \dots h_s k_1 k_2 \dots k_r} \right). \quad (14)$$

В сокращенной записи вместо (14) имеем¹¹:

$$\nabla \otimes \underset{(n)}{\mathbf{T}}^{[w]} = e^w \underset{(n)}{\mathbf{i}}^p \otimes \partial_p (e^{-w} \underset{(n)}{\mathbf{T}}^{[w]}). \quad (15)$$

Легко проверить, что

$$\nabla \otimes \underset{(n)}{\mathbf{T}}^{[w]} = \underset{(n)}{\mathbf{i}}^p \otimes (\partial_p - \lambda_p) \underset{(n)}{\mathbf{T}}^{[w]}, \quad (16)$$

где

$$\lambda_p = w \frac{\partial_p e}{e}.$$

Определение (14) позволяет получить (13) следуя, например, статье [13].

4. Альтернативная схема реализации ковариантного дифференцирования одноточечного псевдотензора. Воспользуемся алгебраическим алгоритмом раздела 3 и вычислим ковариантную производную абсолютного тензора

¹⁰Формула (14) имеет смысл и для дробных значений w , правда с одним ограничением: в леворентированных координатных системах значение степени e^w должно быть вещественным.

¹¹Оператор Гамильтона определяется согласно: $\nabla = \underset{(n)}{\mathbf{i}}^k \partial_k$.

$T_{(n+Nw)}^{h_1 h_2 \dots h_s} \dots k_1 k_2 \dots k_{r+Nw}$. Поскольку он имеет нулевой вес, то согласно (12) имеем:

$$\begin{aligned}
\nabla_p T_{(n+Nw)}^{h_1 h_2 \dots h_s} \dots k_1 k_2 \dots k_{r+Nw} = & \\
& \frac{\epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[-1]} \dots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[-1]} \partial_p T_{(n)}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} \dots k_1 k_2 \dots k_r}{1} + \\
& \frac{+ \epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[-1]} \dots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[-1]} \Gamma_{pq}^{h_1} T_{(n)}^{[w] q h_2 \dots h_s} \dots k_1 k_2 \dots k_r}{2} + \dots \\
& \dots + \frac{\epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[-1]} \dots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[-1]} \Gamma_{pq}^{h_s} T_{(n)}^{[w] h_1 h_2 \dots q} \dots k_1 k_2 \dots k_r}{s} - \\
& - \frac{\epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[-1]} \dots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[-1]} \Gamma_{pk_1}^q T_{(n)}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} \dots q k_2 \dots k_r}{s+1} - \dots \\
& - \dots - \frac{\epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[-1]} \dots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[-1]} \Gamma_{pk_r}^q T_{(n)}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} \dots k_1 k_2 \dots q}{s+r=n} - \\
& - \frac{\Gamma_{pk_{r+1}}^q \epsilon_{q \dots k_{r+N}}^{[-1]} \dots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[-1]} T_{(n)}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} \dots k_1 k_2 \dots k_r}{n+1} - \dots \\
& \dots - \frac{\Gamma_{pk_{r+Nw}}^q \epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[-1]} \dots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots q}^{[-1]} T_{(n)}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} \dots k_1 k_2 \dots k_r}{n+Nw}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Рассмотрим подробнее отрезок формулы (17) между слагаемыми с номерами от $n+1$ до $n+Nw$. Типичное здесь слагаемое (всего их Nw) имеет вид:

$$\Gamma_{pk_{r+mN+l}}^q \frac{\epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[-1]}}{1} \dots \frac{\epsilon_{k_{r+mN+1} \dots q \dots k_{r+(m+1)N}}^{[-1]}}{m+1} \dots \frac{\epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[-1]} T_{(n)}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} \dots k_1 k_2 \dots k_r}{w}, \tag{18}$$

$m = 0, 1, \dots, w-1; \quad q = 1, 2, \dots, N; \quad l = 1, 2, \dots, N;$

где по индексу q производится суммирование.

Очевидно, что единственным отличным от нуля слагаемым в указанной сумме будет слагаемое с номером $q = k_{r+mN+l}$, а именно

$$\begin{aligned}
\Gamma_{pk_{r+mN+l}}^{k_{r+mN+l}} \epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[-1]} \dots \epsilon_{k_{r+mN+1} \dots k_{r+mN+l} \dots k_{r+(m+1)N}}^{[-1]} \dots \\
\dots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[-1]} T_{(n)}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} \dots k_1 k_2 \dots k_r.
\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь по индексу k_{r+mN+l} не производится суммирование. Каждому символу перестановок в (19) будет соответствовать следующая сумма Γ -символов

$$\Gamma_{pk_{r+i}}^{k_{r+i}} = \frac{\partial_p e}{e} \quad (i = mN+1, mN+2, \dots, (m+1)N). \tag{20}$$

Так как в (19) ровно w штук символов перестановок, окончательно получим

$$\begin{aligned}
 & \Gamma_{pk_{r+1}}^q \epsilon_{q \dots k_{r+N}}^{[-1]} \dots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[-1]} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} + \dots \\
 & \dots + \Gamma_{pk_{r+Nw}}^q \epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[-1]} \dots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[-1]} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} = \\
 & = w \frac{\partial_p e}{e} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} \epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[-1]} \dots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[-1]}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Принимая во внимание вышесказанное, ковариантная производная (17) примет вид

$$\begin{aligned}
 & \nabla_p T_{(n+Nw) \dots k_1 k_2 \dots k_{r+Nw}}^{h_1 h_2 \dots h_s} = \\
 & = \epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[-1]} \dots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[-1]} \left[\partial_p T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} + \right. \\
 & \quad + \Gamma_{pq}^{h_1} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] q h_2 \dots h_s} + \dots + \Gamma_{pq}^{h_s} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots q} - \Gamma_{pk_1}^q T_{(n) \dots q k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} - \dots \\
 & \quad \left. - \dots - \Gamma_{pk_r}^q T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots q}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} - w \frac{\partial_p e}{e} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} \right].
 \end{aligned} \tag{22}$$

Воспользовавшись обратным преобразованием (9), определим ковариантную производную одноточечного псевдотензора на основании

$$\begin{aligned}
 & \nabla_p T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} = (N!)^{-w} \epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[+1]} \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[+1]} \nabla_p T_{(n+Nw) \dots k_1 k_2 \dots k_{r+Nw}}^{h_1 h_2 \dots h_s} = \\
 & = (N!)^{-w} \epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[+1]} \dots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[+1]} \times \\
 & \quad \times \epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[-1]} \dots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[-1]} \left[\partial_p T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} + \right. \\
 & \quad + \Gamma_{pq}^{h_1} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] q h_2 \dots h_s} + \dots + \Gamma_{pq}^{h_s} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots q} - \Gamma_{pk_1}^q T_{(n) \dots q k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} - \dots \\
 & \quad \left. - \dots - \Gamma_{pk_r}^q T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots q}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} - w \frac{\partial_p e}{e} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} \right] = \\
 & = \partial_p T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} + \Gamma_{pq}^{h_1} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] q h_2 \dots h_s} + \dots + \Gamma_{pq}^{h_s} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots q} - \\
 & \quad - \Gamma_{pk_1}^q T_{(n) \dots q k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} - \dots - \Gamma_{pk_r}^q T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots q}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} - w \frac{\partial_p e}{e} T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

В итоге имеем

$$\begin{aligned}
 & \nabla_p T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} = (N!)^{-w} \underbrace{\epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[+1]} \dots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[+1]}}_w \times \\
 & \quad \times \nabla_p \left(T_{(n) \dots k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} \underbrace{\epsilon_{k_{r+1} \dots k_{r+N}}^{[-1]} \dots \epsilon_{k_{r+(w-1)N+1} \dots k_{r+Nw}}^{[-1]}}_w \right).
 \end{aligned} \tag{24}$$

Определенная таким образом ковариантная производная совпадает с (13) и (14). Отметим, что оба определения (14) и (24) имеют свои преимущества и недостатки. Определение (14) имеет компактную запись и справедливо для дробных весов, если дробная степень фундаментального определяющего псевдоскаляра вещественна, который может принимать отрицательные значения, но, при этом, вычисление фундаментального определяющего псевдоскаляра требует определения косоугольного произведения базисных векторов евклидова пространства. Для вычисления производной по определению (24) не требуется никаких предварительных сведений, кроме определения символов перестановок (1), что позволяет снять требование евклидовости пространства и вести речь о римановом пространстве. Однако в (24), вес дифференцируемого псевдотензора должен быть целым.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.
- [2] Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 316 с.
- [3] Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.
- [4] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
- [5] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [6] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.].
- [7] Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412.
- [8] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.
- [9] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761.
- [10] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном псевдотензорном обобщении связывающих двусторонних граничных условий Югонио-Адамара // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 104–114.
- [11] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Псевдовекторные дифференциальные операторы микрополярной упругости // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2021. № 4(50). С. 59–72.
- [12] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона-Кэли // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 130–138.
- [13] Radayev Y. N., Murashkin E. V., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.
- [14] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [15] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p. [Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 139 с.].
- [16] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].
- [17] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

ALGEBRAIC ALGORITHM FOR THE SYSTEMATIC REDUCTION OF ONE-POINT PSEUDOTENSORS TO ABSOLUTE TENSORS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper is devoted to the an algebraic algorithm for the systematic reduction of one-point pseudotensors of an arbitrary valency and weight to absolute tensors. The weight of a pseudotensor is assumed to be an integer. The algorithm is based on the transformation of a one-point pseudotensor of an arbitrary valency and weight by the permutation symbols, both covariant and contravariant types. Notions and requisite equations from Algebra and the Analysis of pseudotensors are recalled and discussed. An implementation of covariant differentiation of a one-point pseudotensor field of an arbitrary valency and weight is manifested and derived by the proposed algebraic algorithm of pseudotensor transformation. The definition of the pseudotensor field gradient is introduced and discussed.

Keywords: pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, permutation symbol, covariant derivative, gradient

REFERENCES

- [1] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.
- [2] Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 316 с.
- [3] Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.
- [4] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Gurevich G. B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
- [5] Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. Vol. 5. 334 p.
- [6] Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p. [Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. 456 с.].
- [7] Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412.
- [8] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном псевдотензорном обобщении связывающих двусторонних граничных условий Югонио-Адамара // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 104–114.
- [9] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Псевдовекторные дифференциальные операторы микрополярной упругости // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. 2021. № 4(50). С. 59–72.
- [10] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 3. P. 424–444.
- [11] Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. Vol. 24, no. 4. P. 752–761.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Yuri N. Radayev, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

- [12] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона-Кэли // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 130–138.
- [13] Radayev Y. N., Murashkin E. V., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2022. Vol. 26, no. 1. P. 36–47.
- [14] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
- [15] Veblen O. Invariants of quadratic differential forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p. [Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 139 с.].
- [16] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. Vol. 26. P. 373–377. URL: <https://www.jstor.org/stable/1989146>.
- [17] Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p. [Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research project no. 20-01-00666.