Вестник ЧГПУ им. И.Я.Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1 (51). С. 29–36

Г. Т. Володин, Д. С. Кочергин

КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ БАЛОЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЗРЫВА В ВОДЕ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Получено решение начально-краевой задачи о воздействии импульсной нагрузки взрывного типа на упругую балку, лежащую свободно на неподвижных недеформируемых опорах в воде. Влияние сопротивления воды движению колеблющейся балки учтено введением присоединенной массы воды. Решение поставленной задачи получено в самом общем виде с применением функции влияния Грина.

Ключевые слова: импульсная нагрузка, упругая балка, колебания, присоединенная масса воды, функция Грина.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.003

УДК: 531/534

Постановка задачи.

Рассмотрим случай прямолинейных балок постоянного по всей длине поперечного сечения. Предполагаем, что поперечные размеры балки невелики по сравнению с её длиной l. Нагрузка прикладывается к балке мгновенно и действует, монотонно убывая, в течение времени t_+, которое в пределе можно считать стремящимся к нулю.

Пренебрегаем в силу малости усилиями, возникающими в балке от её собственного веса; следовательно можно полагать, что до действия нагрузки ось балки прямолинейна, балка находится в покое, а именно: начальные смещения всех её точек z=*0* и начальные скорости всех частиц $z_t^{'} = 0$. Под действием внешней нагрузки частицы балки получают смещения и скорости u, которые распределены по длине балки, то есть являются функциями положения сечения x и времени t [1].

Введем обозначения: начало координат поместим на левом конце балки, ось x совместим с осью балки, а ось прогибов z направим вниз по направлению действия нагрузки. В этих обозначениях ордината обозначает прогиб балки в сечении, находящемся на расстоянии x от её левого конца. Для вывода уравнения движения балки

Володин Геннадий Тимофеевич
`e-mail:` g.volodin@yandex.ru, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.
Кочергин Денис Сергеевич
`e-mail:` sir.cod4@yandex.ru, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 14.04.2022

применим принцип Даламбера, при этом сопротивление движению балки в воде будем учитывать введением присоединенной массы воды в соответствующие силы инерции.

Вырежем мысленно элемент балки длинной dx и применим к нему принцип Даламбера, согласно которому в любой момент времени внешние силы dq_2, действующие на элемент, уравновешиваются внутренними силами dq_1 и силами инерции dq_3, то есть

$$dq_1 + dq_3 = dq_2 \tag{1}$$

Внешняя сила, действующая на элемент равна

$$dq_2 = p_2 b K_1 f(t) dx, \tag{2}$$

где p_2 – давление на балку в момент приложения к ней нагрузки; b – ширина балки; K_1 – коэффициент формы, учитывающий расположение балки по отношению к действующей на нее нагрузки; $f(t)$ – функция, учитывающая спад давления со временем; эта функция на основе обработки данных многочисленных экспериментов может быть задана в виде

$$f(t) = \left(1 - \frac{t}{t_+}\right)^n, \tag{3}$$

где n – параметр, значения которого расположены в интервале $n \in (1, 3)$ в зависимости от величины и вида взрывной нагрузки. [1], [2], [3], [4], [5]

Величину сил инерции с учётом присоединенной массы воды найдём в виде соотношения

$$dq_3 = (m_* + m_1) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dx, \tag{4}$$

где m_* и m_1 – соответственно погонная масса балки и погонная присоединенная масса воды. Величину внутренних сил dq_1 можно определить из уравнения

$$dq_1 = -\frac{\partial Q}{\partial x} dx = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} dx \tag{5}$$

При этом величина изгибающего момента M, действующего в рассматриваемом сечении, определяется по известной формуле для малых прогибов

$$M = -EJ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \tag{6}$$

где E – модуль упругости материала балки; J – момент инерции поперечного сечения балки относительно её поперечной оси, проходящей через начало координат [6]. Подставляя найденные значения величин (2), (4), (5) в исходное уравнение (1), получим

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + (m_* + m_1) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = b K_1 p_2(x) f(t) \tag{7}$$

С учётом соотношения (6) для момента M, уравнение (7) можно записать в виде

$$EJ \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + (m_* + m_1) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = K_1 b p_2(x) f(t)$$

или

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \beta^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \frac{K_1 b}{m_* + m_1} p_2(x) f(t) \tag{8}$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{EJ}{m_* + m_1}} \tag{9}$$

Уравнение (8) представляет собой искомое уравнение упругих колебаний балки.

Рассмотрим поведение балки под действием кратковременно действующего импульса, характерного для взрывной нагрузки. Интенсивность действующего импульса по длине балки (погонный импульс) определяется функцией

$$i_*(x) = K_1 b p_2(x) \int_0^{t_+} f(t)dt \tag{10}$$

Так как импульс действует кратковременно, то за время его действия частицы балки не успевают получить заметных смещений, а получают лишь некоторые скорости [1], [2]. Деформирование балки происходит после окончания действия нагрузки, в период ее свободных колебаний. Уравнение свободных колебаний балки получим из общего уравнения (8) приравниванием к нулю внешних сил в соответствии с условиями деформирования балки:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \beta^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0 \tag{11}$$

Рассмотрим случай свободно опертой по концам однопролётной балки длиной l. Для этого случая граничными условиями будут следующие условия на концах балки

$$z(0,t) = z(l,t) = 0, \tag{12}$$

то есть смещения на концах балки в направлении оси z отсутствуют;

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{x=l} = 0, \tag{13}$$

поскольку балка на свободно опертых концах не способна воспринимать изгибающего момента. Начальные условия в соответствии с характером действующей импульсной нагрузки запишем в виде [1], [2]

$$z(x,0) = 0,\ \left.\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right|_{t=0} = \frac{i_*(x)}{m_* + m_1} \tag{14}$$

Решение поставленной задачи.

Таким образом, поведение однопролетной свободно опертой по концам упругой балки в воде под действием импульсной взрывной нагрузки определяется решением начально-краевой задачи, описываемой уравнением (11) с граничными условиями (12), (13) и начальными условиями (14).

Перейдём к безразмерным переменным

$$\xi = \frac{x}{l},\ \tau = \frac{a_0}{l}t,\ w = \frac{z}{l}, \tag{15}$$

при этом $\xi \in [0;1]$, $\tau \in [0; \frac{a_0}{l}t_+]$, $w \in [0; w_*]$, $w_* = \frac{z_*}{l}$, z_* - максимально-возможный прогиб балки, a_0 - скорость звука в воде. В этих безразмерных переменных определяющее уравнение (11), граничные условия (12), (13) и начальные условия (14) примут вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \beta_1^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} = 0,\ \beta_1 = \frac{\beta}{a_0 l} \tag{16}$$

$$w(0,\tau) = w(1,\tau) = 0 \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right|_{\xi=0} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right|_{\xi=l} = 0 \tag{18}$$

$$w(\xi,0) = 0 \tag{19}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{\tau=0} = \frac{i_*}{a_0\,(m_* + m_1)} \tag{20}$$

Итак, требуется найти частный интеграл уравнения (16), удовлетворяющий краевым условиям (17), (18) и начальным условиям (19), (20).

Решение будем искать по методу Фурье. Согласно этому методу разделения переменных, решение записывают в виде ряда, каждое слагаемое которого есть произведение двух функций $\chi(\xi)$ и $T(\tau)$:

$$w(\xi,\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j(\xi) \cdot T_j(\tau), \tag{21}$$

при этом $\chi(\xi)$ и $T(\tau)$ - пока неизвестные функции своих аргументов, причем каждый член суммы должен удовлетворять исходному уравнению (16) и соответствующим краевым и начальным условиям.

Как известно [1], [3], [7] решение обладает наибольшей общностью, когда оно выражено через функцию влияния. Функцией влияния или функцией Грина называется решение задачи для случая сосредоточенной нагрузки. В рассматриваемом случае функция Грина определяет значение прогиба в точке ξ от сосредоточенного импульса, приложенного в точке с координатой ξ_*. Следуя работе [1], функцию Грина запишем в виде $w(\xi,\tau|\,\xi_*)$.

Функция Грина должна удовлетворять дифференциальному уравнению, краевым и начальным условиям. Краевые условия и начальное условие (19) для решения, выраженного через функцию Грина, не меняются. Второе начальное условие (20) запишем через разрывную функцию Дирака $\delta(\xi)$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial w}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} = \frac{i_*(\xi)}{a_0\,(m_* + m_1)} \cdot \delta(\xi - \xi_*) \tag{22}$$

Функцию Грина для уравнения (16) и соответствующих начальных условий (19)-(20) будем искать в виде

$$w(\xi,\tau|\,\xi_*) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j(\xi) \cdot T_j(\tau) \tag{23}$$

Подставляя предполагаемое решение (23) в уравнение (16), получим для каждого члена суммы уравнение

$$T''(\tau) \cdot \chi(\xi) + \beta_1^2 T(\tau)\chi^{(4)}(\xi) = 0 \tag{24}$$

или

$$\frac{1}{\beta_1^2} \cdot \frac{T''(\tau)}{T(\tau)} = -\frac{\chi^{(4)}(\xi)}{\chi(\xi)} = -\lambda^4, \tag{25}$$

где λ - параметр, подлежащий определению в ходе решения задачи. (Здесь, как общепринято, верхний индекс в круглых скобках означает порядок производной).

Таким образом, переменные разделились, при этом исходное уравнение (16) в частных производных заменено двумя равнозначными ему обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\left.\begin{array}{l} T''(\tau) + \lambda^4 \beta_1^2 T(\tau) = 0, \\ \chi^{(4)}(\xi) - \lambda^4 \chi(\xi) = 0. \end{array}\right\} \tag{26}$$

Решения уравнений (26) имеют вид

$$T(\tau) = A\cos\lambda^2\beta_1\tau + B\sin\lambda^2\beta_1\tau \tag{27}$$

$$\chi(\xi) = C_1\cos\lambda\xi + C_2\sin\lambda\xi + C_3 ch\lambda\xi + C_4 sh\lambda\xi \tag{28}$$

Для нахождения постоянных A, B, C_1, C_2, C_3, C_4 и λ воспользуемся соответствующими начальными и краевыми условиями, учитывая, что так как переменные разделились, то за начальные условия отвечают только функции $T(\tau)$, а за краевые условия – только функции $\chi(\xi)$.

Из первого начального условия (19) найдём константу A. Так как для любого ξ при $\tau = 0$ прогибы $w = 0$, то , следовательно, и $T(0) = 0$, поэтому из (27) сразу получаем, что постоянная $A=0$ для всех случаев. Следовательно, теперь решение (23) можно записать в виде

$$w(\xi,\tau|\,\xi_*) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin\lambda^2\beta_1\tau(C_1\cos\lambda_j\xi + C_2\sin\lambda_j\xi + C_3 ch\lambda_j\xi + C_4 sh\lambda_j\xi) \tag{29}$$

или

$$w(\xi,\tau|\,\xi_*) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j\chi_j(\xi)\sin\lambda_j^2\beta_1\tau \tag{30}$$

Продифференцируем равенство (30) по τ и воспользуемся вторым начальным условием (22), в результате получим

$$\frac{i_*(\xi_*)}{\beta_1(m_1+m_*)a_0}\delta(\xi-\xi_*) = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2 B_j\chi_j(\xi) \tag{31}$$

Для нахождения коэффициента B_j умножим обе части равенства (31) на $\chi_j(\xi)$ и проинтегрируем его по ξ от нуля до единицы. Учтём при этом ортогональность функций $\chi_j(\xi)$ и $\chi_k(\xi)$, удовлетворяющих краевым условиям, и соотношениям

$$\int_0^1 \chi_j(\xi)\cdot\chi_k(\xi)d\xi = 0, \tag{32}$$

если $j \neq k$ и

$$\int_0^1 \chi_j^2(\xi)d\xi = \frac{1}{4}\left[\chi_j^2(\xi) - 2\dddot{\chi}_j\dot{\chi}_j(\xi) + \ddot{\chi}_j^2(\xi)\right]_{\xi=1}, \tag{33}$$

где точки означают дифференцирование по полному аргументу $(\lambda_j\xi)$ в отличие от дифференцирования по ξ, которое обозначают черточками [1]. В силу соотношения (32) все члены, кроме одного, содержащего $\chi_j^2(\xi)$, получаемого при $j = k$ в рассматриваемой сумме, исчезнут. В результате получим

$$\int_0^1 \frac{i_*(\xi_*)}{\beta_1 a_0(m_1+m_*)}\delta(\xi-\xi_*)\chi_j(\xi)d\xi = \lambda_j^2 B_j\int_0^1\chi_j^2(\xi)d\xi \tag{34}$$

В силу свойства δ – функции

$$\int_0^1 \delta(\xi-\xi_*)f(\xi)d\xi = f(\xi_*),\ (0\leq\xi\leq 1) \tag{35}$$

левую часть уравнения (34) запишем в виде

$$\int_0^1 \frac{i_*(\xi_*)}{\beta_1 a_0(m_1+m_*)}\delta(\xi-\xi_*)\chi_j(\xi)d\xi = \frac{i_*(\xi_*)}{\beta_1 a_0(m_1+m_*)}\chi_j(\xi_*)$$

Используя формулу (33), получим выражение для B_j в виде

$$B_j = \frac{4i_*(\xi_*)\chi_j(\xi_*)}{\beta_1 a_0(m_1+m_*)\lambda_j^2\left[\chi_j^2(\xi) - 2\dddot{\chi}_j(\xi)\dot{\chi}_j(\xi) + \ddot{\chi}_j^2(\xi)\right]_{\xi=1}} \tag{36}$$

Следовательно, функция влияния примет вид

$$w(\xi,\tau|\,\xi_*) = \frac{4i_*(\xi_*)}{\beta_1 a_0(m_1+m_*)}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\chi_j(\xi_*)\chi_j(\xi)\sin\lambda_j^2\beta_1\tau}{\lambda_j^2\left[\chi_j^2(\xi) - 2\dddot{\chi}_j(\xi)\dot{\chi}_j(\xi) + \ddot{\chi}_j^2(\xi)\right]_{\xi=1}} \tag{37}$$

Полный прогиб балки равен интегралу от функции влияния

$$w(\xi,\tau) = \int_0^1 w(\xi,\tau|\,\xi_*)d\xi_* \tag{38}$$

или

$$w(\xi,\tau) = \frac{4}{\beta_1 a_0(m_1+m_*)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\chi_j(\xi)\sin\lambda_j^2\beta_1\tau}{\lambda_j^2\left[\chi_j^2(\xi) - 2\dddot{\chi}_j(\xi)\dot{\chi}_j(\xi) + \ddot{\chi}_j^2(\xi)\right]_{\xi=1}}\cdot\int_0^1 i_*(\xi_*)\chi_j(\xi_*)d\xi_* \tag{39}$$

Формула (39) определяет решение поставленной задачи в самом общем виде. Рассмотрим теперь один чаще всего встречающийся на практике случай, когда оба конца балки свободно оперты на неподвижные опоры. Для этого случая краевые условия определяются соотношениями (12), (13) или в безразмерных переменных (17), (18).

Так как за краевые условия в соответствии с решением (23) отвечают только фундаментальные функции χ, то должны выполняться равенства

$$\chi_j(0) = \chi_j(1) = {\chi_j}''(0) = {\chi_j}''(1) = 0 \tag{40}$$

Подставляя эти значения в выражения для χ и χ'', получим систему четырёх уравнений относительно C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_3 = 0; \\ C_1\cos\lambda_j + C_2\sin\lambda_j + C_3 ch\lambda_j + C_4 sh\lambda_j = 0; \\ \lambda_j^2(-C_1 + C_3) = 0; \\ \lambda_j^2(-C_1\cos\lambda_j - C_2\sin\lambda_j + C_3 ch\lambda_j + C_4 sh\lambda_j) = 0; \end{array}\right\} \tag{41}$$

Пусть $\lambda_j \neq 0$. Тогда из первого и третьего уравнения системы (41) следует, что $C_1 = C_3 = 0$. Два оставшихся уравнения дают систему линейных однородных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} C_2\sin\lambda_j + C_4 sh\lambda_j = 0 \\ -C_2\sin\lambda_j + C_4 sh\lambda_j = 0 \end{array}\right\} \tag{42}$$

Условие нетривиальной совместности системы (42) приводит к уравнению

$$\sin\lambda_j sh\lambda_j = 0 \tag{43}$$

Это характеристическое уравнение имеет бесконечное множество корней

$$\lambda_j = j\pi, \tag{44}$$

где j – любое целое число 1, 2, 3, ... Корень, соответствующий *j=0* и удовлетворяющий уравнению (43) приводит к тривиальному результату *z=0,* означающему равновесие прямой неколеблющейся балки. Для *j=1,2,3,...*, $sh\lambda_j \neq 0$, поэтому из системы уравнений (42) находим, что $C_4 = 0$, а $C_2 \neq 0$, при этом C_2 – произвольная константа, что является свойством системы однородных линейных уравнений [1], [7].

Положим для простоты $C_2 = 1$. Тогда фундаментальные функции примут вид

$$\chi_j(\xi) = \sin j\pi\xi \tag{45}$$

и решение (39) можно записать в виде

$$w(\xi,\tau) = \frac{2}{\pi^2\beta_1 a_0(m_1+m_*)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\sin j\pi\xi \sin j^2\pi^2\beta_1\tau\int_0^1 i_*(\xi_*)\sin j\pi\xi_* d\xi_* \tag{46}$$

Из решения (46) видно, что балка в воде со свободно опертыми концами совершает гармонические колебания с частотами

$$\bar{\omega}_j = j^2\pi^2\beta_1, \tag{47}$$

представленными в безразмерной форме, или

$$\omega_j = \frac{j^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{a_0(m_1+m_*)}}, \tag{48}$$

записанные в размерных величинах.

Заключение.

Представленный на частном примере способ определения частот и форм свободных колебаний однопролетных балок в воде и нахождения общих решений для них может быть применен и к другим случаям закрепления балочных элементов конструкций. Полученные при этом решения об их деформировании в процессе колебаний под действием взрывной нагрузки могут быть использованы для определения гарантированного разрушения и гарантированной взрывостойкости таких конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Саламахин Т. М. Разрушение взрывом элементов конструкций. Москва: ВИА, 1961. 275 с.
[2] Володин Г. Т. Действие взрыва зарядов конденсированных ВВ в газовой и жидкой среде. Часть 2. Взрывостойкость и гарантированное разрушение элементов конструкций. – Тула: «Левша». 2005. 160 с.
[3] Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1977. 735 с.
[4] Христофоров Б. Д. Параметры ударной волны и газового пузыря при подводном взрыве зарядов разной плотности из тэна и азида свинца. Механическое действие взрыва, 1994. 245-259 с.
[5] Яковлев Ю. С. Основы гидродинамики взрыва. Ленинград: ВМАКВ, 1958. 283 с.
[6] Беляев Н. М. Сопротивление материалов. Москва: Наука, 1976. 608 с.
[7] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Москва: ГИТТЛ, 1951. Т. 1. 476 с.

G. T. Volodin, D. S. Kochergin

VIBRATIONS OF THE ELEMENTS OF BEAM STRUCTURES UNDER THE ACTION OF AN EXPLOSION IN THE WATER

Tula State University, Tula, Russia.

Abstract. The solution of the initial boundary value problem of the impact of an explosive-type pulsed load on an elastic beam lying freely on fixed non-deformable supports in water is obtained. The influence of water resistance to the motion of the oscillating beam is taken into account by the introduction of an attached mass of water. The solution of the problem is obtained in the most general form using the Green's influence function.

Keywords: pulse load, elastic beam, vibrations, attached water mass, Green function.

REFERENCES

[1] Salamakhin T. M. Explosion destruction of structural elements. Moscow: VIA, 1961. 275 p. (in Russian).
[2] Volodin G. T. The effect of the explosion of charges of condensed explosives in a gas and liquid medium. Part 2. Explosion resistance and guaranteed destruction of structural elements. Tula: Lefty, 2005. 160 p. (in Russian).
[3] Budak B., Samarsky A., Tikhonov A. Equations of mathematical physics. Moscow: Science, 1977. 735 p. in Russian.
[4] Khristoforov B. Parameters of a shock wave and a gas bubble during an underwater explosion of charges of different densities of ten and lead azide. Mechanical action of the explosion, 1994. 245-259 p. (in Russian).
[5] Yakovlev Y. Fundamentals of explosion hydrodynamics. Leningrad: VMAKV, 1958. 283 p. (in Russian).
[6] Belyaev N. Resistance of materials. Moscow: Science, 1976. 608 p. (in Russian).
[7] Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. Vol. 1. Moscow: GITTL, 1951. 476 p. (in Russian).

Volodin Gennady Timofeevich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Tula State University, Tula, Russia,
Kochergin Denis Sergeevich, postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia.