Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1 (51). С. 37–41

Н. И. Петров

О ВЛИЯНИИ РАЗЛИЧНЫХ ФОРМ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЙ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ УСИЛИЙ В ТЕОРИИ НЕУПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Проведена оценка влияния различных форм уравнений равновесия и граничных условий на величину критического давления и ее поведение по отношению к эйлеровой критической нагрузке.

Ключевые слова: растяжение, перемещение, деформация, напряжение, граничные условия, линеаризация, функция Бесселя.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.004

УДК: 539.375

Устойчивость полосы при сжатии в случае плоской деформации исследовалась в ряде работе [1-5,8]. При этом уравнения для определения критического давления получались на основе различных подходов и предположений.

В работах [1, 2] впервые предполагалось, что потеря устойчивости в основном определяется изменением граничных условий. В работе [3] учитывались углы поворота в уравнениях равновесия аналогично [4] и, кроме того, сохранялись члены того же порядка малости в граничных условиях. В [4] использовались нелинейные соотношения между напряжениями и деформациями, причем уравнения равновесия приняты в форме [4]. Авторы работы [5] уравнения равновесия для компонент возмущения использовали в предложениях работ [4, 6].

Целью данной работы является оценка влияния различных форм уравнений равновесия и граничных условий на величину критического давления и ее поведение по отношению к эйлеровой критической нагрузке.

В работе использованы общепринятые обозначения: σ_x, σ_y, τ_{xy} - компоненты напряжения; ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy} - компоненты деформаций; где u, v - компоненты перемещения вдоль осей x и y. Рассматривалась потеря устойчивости плоскости xOy (рис.1) под действием давления p.

Компоненты напряжения и деформаций связаны известными соотношениями закона Гука и условием несжимаемости

Петров Николай Ильич
`e-mail:` ni.petrov46@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 18.01.2022

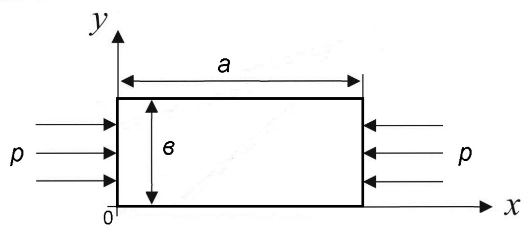

Рис. 1

$$\sigma_x - \sigma_y = 2G(\epsilon_x - \epsilon_y), \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \epsilon_x + \epsilon_y = 0. \tag{1}$$

Решение задачи искалось в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij}, \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^0 + \epsilon'_{ij}, \quad u = u^0 + u', ... \tag{2}$$

Напряженное состояние до потери устойчивости определяется выражениями

$$\sigma_x^0 = -p, \quad \sigma_y^0 = 0, \quad \tau_{xy}^0 = 0. \tag{3}$$

Формы уравнений равновесия, граничных условий и соответствующие им уравнения для определения критического параметра γ, которые использовались в данной работе, представлены в таблице.

Связь критического параметра γ с критическим давлением $p_{\text{кр}}$, при котором происходит потеря устойчивости полосы, определяется соотношением

$$\gamma = \frac{p_{\text{кр}}}{2G}, \tag{4}$$

где G – модуль сдвига.

На рис.2 представлены графики зависимости критического параметра γ_i от величины kb, рассчитанные по уравнениям приведенным в таблице 1. Аналогичная зависимость приводиться для эйлеровской критической нагрузки $\gamma_{\text{эл}}$, рассчитанной по формуле

$$\gamma_{\text{эл}} = \frac{(kb)^2}{6}, \tag{5}$$

На рис.3 приведены графики зависимости отношений $\gamma_i/\ \gamma_{\text{эл}}$ от параметра kb.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. При малых значениях kb (kb<0.3) значения критических параметров γ_2, γ_3, γ_5 и $\gamma_{\text{эл}}$ практически совпадают, а значение γ_1 совпадают с значением γ_4.

2. Для больших значений параметра kb зависимость $\gamma_2 = \gamma_2(kb)$ похожа на зависимость $\gamma_{\text{эл}} = \gamma_{\text{эл}}(kb)$, но сильно отличается от поведения остальных кривых.

3. Сравнение величин γ_1 и γ_3 показывает, что пренебрежение слагаемыми в граничных условиях приводит к повышению критического давления при kb=3 до 50

4. Сравнение кривых для γ_1 и γ_3 указывает, что учет слагаемых в уравнениях равновесия при условии сохранения их и в граничных условиях приводит к резкому повышению величины критического давления при одних и тех же значениях параметра kb.

Уравнения равновесия и граничные условия	Уравнение для определения критического параметра γ_i
$\frac{\partial\sigma'_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial y}=0,$ $\frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma'_y}{\partial y}=0;$ $\sigma'_y=0,\quad \tau'_{xy}+p\frac{\partial\upsilon'}{\partial x}=0$	$\gamma_2=\frac{sh(kb)-kb}{kb}$
$\frac{\partial\sigma'_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial y}=0,$ $\frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma'_y}{\partial y}-\frac{p}{2}\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial\upsilon'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial y}]=0;$ $\sigma'_y=0,\quad \tau'_{xy}+p\frac{\partial\upsilon'}{\partial x}=0$	$\frac{2[ch(kb)\sqrt{1-\gamma_1}ch(kb)-1]}{sh(kb)\sqrt{1-\gamma_1}sh(kb)}=$ $=\frac{1}{(1+\gamma_1\sqrt{1-\gamma_1}}+(1+\gamma_1\sqrt{1-\gamma_1})$
$\frac{\partial\sigma'_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial y}-p\frac{\partial^2u'}{\partial x^2}=0,$ $\frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma'_y}{\partial y}-p\frac{\partial^2\upsilon'}{\partial x^2}=0;$ $\sigma'_y=0,\quad \tau'_{xy}=0$	$\frac{2[ch(kb)\sqrt{1-2\gamma_5}ch(kb)-1]}{sh(kb)\sqrt{1-2\gamma_5}sh(kb)}=$ $=\frac{(1-\gamma_5)^2}{\sqrt{1-2\gamma_5}}+\frac{\sqrt{1-2\gamma_5}}{(1-\gamma_5)^2}$
$\frac{\partial\sigma'_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial y}=0,$ $\frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma'_y}{\partial y}-\frac{p}{2}\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial\upsilon'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial y}]=0;$ $\sigma'_y=0,\quad \tau'_{xy}=0$	$\frac{2[ch(kb)\sqrt{1-\gamma_3}ch(kb)-1]}{sh(kb)\sqrt{1-\gamma_3}sh(kb)}=$ $=\frac{(2+\gamma_3)\sqrt{1-\gamma_3}}{(2-\gamma_3)}+\frac{(2-\gamma_3)}{(2+\gamma_3)\sqrt{1-\gamma_3}}$
$\frac{\partial\sigma'_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial y}-p\frac{\partial^2u'}{\partial x^2}=0,$ $\frac{\partial\tau'_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma'_y}{\partial y}-p\frac{\partial^2\upsilon'}{\partial x^2}=0;$ $\sigma'_y=0,\quad \tau'_{xy}+p\frac{\partial\upsilon'}{\partial x}=0$	$\frac{2[ch(kb)\sqrt{1-2\gamma_4}ch(kb)-1]}{sh(kb)\sqrt{1-2\gamma_4}sh(kb)}=$ $=\frac{(1-\gamma_4)}{\sqrt{1-2\gamma_4}(1+\gamma_4)}+\frac{\sqrt{1-2\gamma_4}(1+\gamma_4)}{(1-\gamma_4)}$

Таблица 1.

5. Из рис.3 видно, что учет слагаемыми в граничных условиях, но пренебрежение ими в уравнениях равновесия приводит к повышению значения критической силы по сравнению с эйлеровой критической силой.

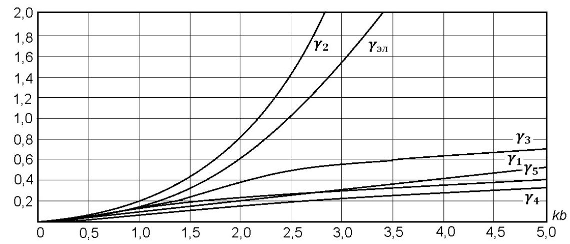

Рис. 2

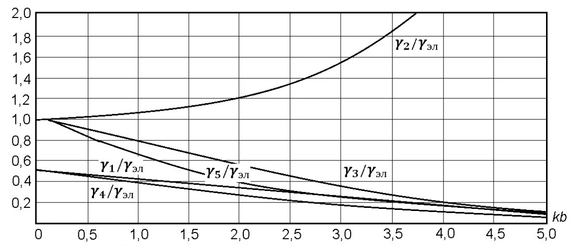

Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лейбензон Л. С. О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек. Собрание трудов. Т.1. Москва: АН СССР, 1951. 115 с.

[2] Ишлинский А. Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости. Т.4 // Украинский математический журнал. 1954. № 2. С. 140–146.

[3] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Об устойчивости полосы при сжатии // АН СССР. 1961. № 5. с. 138.

[4] Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Москва: Гостехиздат, 1948. 408 с.

[5] Гузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев: Наук. думка, 1971. 276 с.

[6] Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Москва: Физматгиз, 1961. 339 с.

N. I. Petrov

STRETCHING OF A CYLINDRICAL ROD OF VARIABLE CROSS-SECTION IN THE THEORY OF SMALL ELASTIC-PLASTIC

I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. The influence of various forms of equilibrium equations and boundary conditions on the critical pressure value and its behavior with respect to the Eulerian critical load is evaluated.

Keywords: stretching, displacement, deformation, stress, boundary conditions, linearization, Bessel function.

REFERENCES

[1] Leibenzon L. S. On the application of harmonic functions to the question of the stability of spherical and cylindrical shells, Collection of works. Moscow: Publishing house of the Academy of Sciences of the USSR, 1951. 115 c. (in Russian).
[2] Ishlinsky A. Y. Consideration of questions about the stability of the equilibrium of elastic bodies from the point of view of the mathematical theory of elasticity // Ukrainian Mathematical Journal. 1954. № 2. C. 140–146. (in Russian).
[3] Ivlev D. D., Ershov L. V. On the stability of the strip under compression // USSR Academy OF Sciences. 1961. № 5. c. 138. (in Russian).
[4] Ershov L. V., Kaluzhin A.A. On the stability of the strip under compression // USSR Academy OF Sciences. 1965. № 4. C. 152–153. (in Russian).
[5] Guz A. N. Stability of three-dimensional deformable bodies. Kiev: Scientific opinion, 1971. 276 c. (in Russian).
[6] Novozhilov V. V. Fundamentals of nonlinear elasticity theory. Moscow: Gostekhizdat, 1948. 408 c. (in Russian).
[7] Bolotin V. V. Nonconservative problems of elastic stability theory. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 339 c. (in Russian).

Petrov Nikolay Iluich, Candidate Sci. Phys. & Math., Docent, Department of general physics, Chuvash State University, Cheboksary, Russia.