*Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева*
*Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1 (51). С. 42–58*

*Ю. В. Немировский*[1,2], *С. В. Тихонов*[3]

# ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО СОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ

[1] *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

[2] *Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия*

[3] *Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия*

***Аннотация.*** Рассматривается задача центрального растяжения составного бетонного стержня квазистатическими нагрузками. В качестве распределенной нагрузки принимается сила тяжести, действующая на стержень. Определены предельные нагрузки и удлинения стержня в зависимости от физических параметров стержня. При деформации ниже предельной упругой предполагается, что бетон деформируется линейно, в противном случае нелинейно неупруго. Приведены примеры расчетов по полученным соотношениям для составных стержней одинаковой массы, где в каждом участке стержня могут быть реализованы различные марки бетонов.

***Ключевые слова***: составной стержень, центральное растяжение, физическая нелинейность, предельные нагрузки

*DOI*: 10.37972/chgpu.2022.51.1.005

*УДК*: 539.374

В данной работе будем рассматривать составные бетонные стержни с поперечным сечением в форме круга (рис. 1). Положим, что стержень защемлен с левого края, а к правому краю приложена нагрузка $P$ (рис. 2). Ось $Ox$ направим вдоль центральной оси стержня, ось $Oz$ направим вертикально вверх, начало координат $O$ поместим в центр грани левого конца стержня.

---



*Немировский Юрий Владимирович*
`e-mail:` nemiryury@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия, профессор Новосибирского государственного технического университета, г. Новосибирск, Россия.
*Тихонов Сергей Владимирович*
`e-mail:` strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 01.05.2022

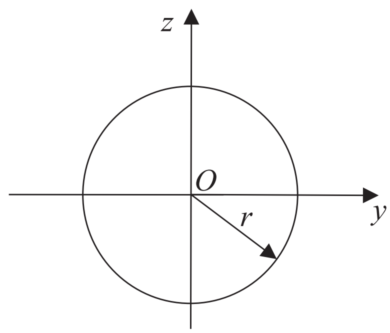


Рис. 1. Поперечное сечение стержня

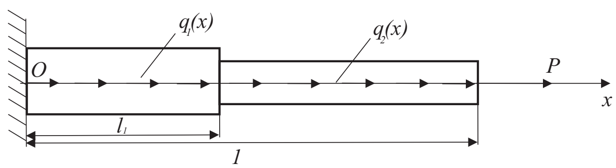


Рис. 2. Защемленный стержень

В данной работе будем учитывать физическую нелинейность деформирования бетонов, а также его разносопротивляемость растяжению и сжатию [1–16].

Примем, что на участках $[0, l_1]$ и $[l_1, 1]$ стержень состоит из бетонов разных марок и радиусы $r$ в поперечном сечении различны и равны соответственно $r_1$ и $r_2$.

Зависимость между напряжениями и деформациями на $i$-ом участке стержня для случая $0 < \varepsilon \le \varepsilon_{0i}^{+}$ примем равной

$$\sigma_i = E_i^{+}\varepsilon, \tag{1}$$

а при $\varepsilon_{0i}^{+} \le \varepsilon < \varepsilon_{*i}^{+}$ равной

$$\sigma_i = A_{1i}^{3+}\varepsilon + A_{3i}^{3+}\varepsilon^3, \tag{2}$$

где $E_i^{+}$ – модуль упругости при растяжении бетона $i$-го участка стержня, $\varepsilon_{0i}^{+}$ – предельная упругая деформация при растяжении $i$-го участка стержня, $\varepsilon_{*i}^{+}$ – предельная деформация упрочнения при растяжении $i$-го участка стержня, $A_{1i}^{3+}, A_{3i}^{3+}$ – физические параметры, определяемые из реальной диаграммы растяжения бетонов $i$-го участка стержня [14].

Указанные коэффициенты также могут быть определены из достаточно простых предположений [17], исходя из вида диаграммы растяжения-сжатия бетонов

$$\left.\frac{d\sigma}{d\varepsilon_i}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_{*i}^{+}} = 0, \quad \sigma_i(\varepsilon_{*i}^{+}) = \sigma_{*i}^{+}, \tag{3}$$

где $\sigma_{*i}^{+}$ – предел прочности бетона.

Случай равенства или превышения деформации значения $\varepsilon_*^{+} = \min\{\varepsilon_{*i}^{+}\}$ будем считать случаем потери несущей способности стержня.

Во всех последующих расчетах будем использовать обезразмеренные величины

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_{1*}^{-}}, \quad \tilde{E} = \frac{E}{\sigma_{1*}^{-}}, \quad \tilde{l}_1 = \frac{l_1}{l}, \quad \tilde{r}_i = \frac{r_i}{l}, \quad \tilde{P} = P\frac{1}{l^2\sigma_{1*}^{-}}, \quad \tilde{q}_1 = q\frac{1}{l\sigma_{1*}^{-}}, \tag{4}$$
$$\tilde{N} = N\frac{1}{l^2\sigma_{1*}^{-}}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{l},$$

где обезразмеривающие величины: $\sigma_{1*}^{-}$ – предел прочности при сжатии бетона марки $B10$, $l$ – длина стержня; $P$ – величина нагрузки, приложенной к правому краю стержня, $q$ – величина распределенной нагрузки, $N$ – величина продольного усилия, $u$ – величина перемещений вдоль оси $Ox$.

Для определения коэффициентов $A_{1i}^{3+}, A_{3i}^{3+}$ уравнения деформирования (2) по формулам (3) достаточно знать характеристики бетона $\varepsilon_0^+, \varepsilon_*^+, \sigma_*^+$. В качестве материалов участков стержня будем использовать бетоны марок B10, B30, B50 с физическими параметрами, определенными в работе [18]. Результаты расчета коэффициентов по соотношениям (3) после обезразмеривания по формулам (4) занесем в таблицу 1. Диаграммы деформирования бетонов, построенные по соотношениям (2) с коэффициентами из таблицы 1, имеют вид, изображенный на рис. 3.

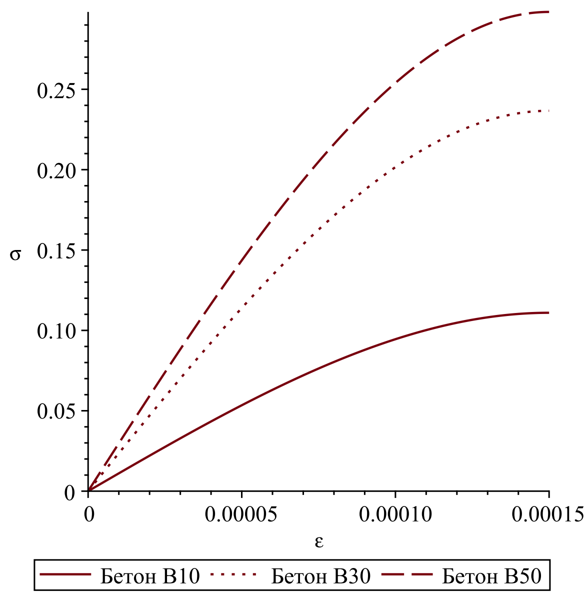


Рис. 3. Диаграммы деформирования бетонов, построенные по соотношениям (2)

Под распределенными нагрузками $q_1$, $q_2$ будем понимать действие силы тяжести на стержень. Нагрузка $q_1$ действует на участке $[0, l_1]$, нагрузка $q_2$ на участке $[l_1, 1]$, которые определяются из соотношений

$$\tilde{q}_1 = \frac{\rho_1 g}{l\sigma_{1*}^{-}}\pi r_1^2, \quad \tilde{q}_2 = \frac{\rho_2 g}{l\sigma_{1*}^{-}}\pi r_2^2, \tag{5}$$

| № | Марка бетона | $E^+$ | $\varepsilon_0^+, 10^{-2}$ | $\sigma_*^+$ | $\varepsilon_*^+, 10^{-2}$ | $A_1^{3+}$ | $A_3^{3+}, 10^{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | B10 | 1068,53 | 0,005 | 0,110963 | 0,015 | 1109,63 | -1,644 |
| 2 | B30 | 2278,67 | 0,005 | 0,236631 | 0,015 | 2366,31 | -3.506 |
| 3 | B50 | 2919,17 | 0,00375 | 0,298128 | 0,015 | 2981,28 | -4,417 |

Таблица 1. Физические параметры бетонов

где $\rho_1, \rho_2$ – плотности бетонов на участках $[0, l_1]$ и $[l_1, 1]$ соответственно, $g$ – величина ускорения свободного падения.

Положим плотности бетонов марок $B10$, $B30$, $B50$ равными соответственно $\rho_1 = 2500$ кг/м$^3$, $\rho_2 = 2800$ кг/м$^3$, $\rho_3 = 3100$ кг/м$^3$.

В дальнейшем надстрочный индекс «$\sim$» во всех формулах и обозначениях будем опускать.

Уравнение равновесия при центральном растяжении имеет вид

$$\frac{dN}{dx} = -q(x), \tag{6}$$

где $q(x)$ – распределенная нагрузка.

В рассматриваемом сечении $S$ продольное усилие $N$ может быть определено через напряжения

$$N = \iint_S \sigma dS. \tag{7}$$

Обозначим через $N_1(x)$, $N_2(x)$, $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$ – продольные усилия, деформации и перемещения на участках $[0, l_1]$ и $[l_1, 1]$ соответственно. В рассматриваемой задаче наибольшее значение величины продольного усилия будет реализовываться в местах защемления стержня или на границе двух участков, т.е. при $x = 0$ и $x = 0$.

Наибольшее значение деформации в данной задаче может быть либо в месте защемления $x = 0$, либо на границе двух участков стержня $x = l_1$.

Для продольных усилий $N_1(x)$, $N_2(x)$ справедливы соотношения

$$N_1(l_1) = N_2(l_2), \quad N_2(1) = P, \tag{8}$$

уравнение равновесия (6) имеет вид

$$\frac{dN_1}{dx} = -q_1, \quad \frac{dN_2}{dx} = -q_2. \tag{9}$$

Из соотношений (8), (9) получим выражение для продольных усилий

$$N_1(x) = P + (1 - l_1)q_2 + (l_1 - x)q_1, \quad N_2(x) = P + (1 - x)q_2. \tag{10}$$

Значения продольных усилий в точках $x = 0$ и $x = l_1$ будет равно

$$N_1(0) = P + (1 - l_1)q_2 + l_1 q_1, \quad N_2(l_1) = P + (1 - l_1)q_2. \tag{11}$$

Найдем выражение для нагрузки $P_{01}$, при которой в левом конце стержня деформация равна предельной упругой $\varepsilon_{01}^+$, тогда из (1), (7) будем иметь

$$P_{01} = \pi r_1^2 E_1^+ \varepsilon_{01}^+ - q_2(1 - l_1) - l_1 q_1. \tag{12}$$

Значение нагрузки $P_{02}$, при которой на границе двух участков стержня деформация равна предельной упругой $\varepsilon_{02}^{+}$, имеет вид

$$P_{02} = \pi r_2^2 E_2^{+} \varepsilon_{02}^{+} - q_2(1 - l_1). \tag{13}$$

Наименьшая из двух нагрузок $P_{01}$, $P_{02}$ будет соответствовать образованию в стержне участка с нелинейным неупругим деформированием материала

$$P_0 = \min\{P_{01}, P_{02}\}. \tag{14}$$

Если значение $P > P_0$, тогда в стержне будет область нелинейного неупругого деформирования. Найдем значение нагрузки $P_{11}$, при которой весь первый участок стержня $[0, l_1]$ деформируется нелинейно неупруго. Указанную нагрузку можно определить, положив $\varepsilon_1(l_1) = \varepsilon_{01}^{+}$

$$P_{11} = \pi r_1^2 E_1^{+} \varepsilon_{01}^{+} - (1 - l_1) q_2. \tag{15}$$

Найдем значение нагрузки $P_{12}$, при которой весь второй участок стержня в области нелинейного неупругого деформирования, положив $\varepsilon_2(1) = \varepsilon_{02}^{+}$.

$$P_{12} = \pi r_2^2 E_2^{+} \varepsilon_{02}^{+}. \tag{16}$$

Предельная нагрузка $P_1$, соответствующая случаю, когда весь стержень стал деформироваться нелинейно неупруго, определяется из соотношений

$$P_1 = \max\{P_{11}, P_{12}\}. \tag{17}$$

Предельную нагрузку $P_{21}$, соответствующую достижению в месте защемления деформации значения, равного предельной упрочнения $\varepsilon_*^{+}$, можно определить из (2), (11)

$$P_{21} = \pi r_1^2 \left( A_{11}^{3+} \varepsilon_*^{+} + A_{21}^{3+} (\varepsilon_*^{+})^2 + A_{31}^{3+} (\varepsilon_*^{+})^3 \right) - (1 - l_1) q_2 - l_1 q_1. \tag{18}$$

Аналогично определяется нагрузка, соответствующая достижению в месте соединения двух участков деформации значения, равного предельной упрочнения $\varepsilon_*^{+}$

$$P_{22} = \pi r_2^2 \left( A_{12}^{3+} \varepsilon_*^{+} + A_{22}^{3+} (\varepsilon_*^{+})^2 + A_{32}^{3+} (\varepsilon_*^{+})^3 \right) - (1 - l_1) q_2. \tag{19}$$

В этом случае имеем для предельной нагрузки $P_2$ при которой появляются стержне деформации $\varepsilon_*^{+}$,

$$P_2 = \min\{P_{21}, P_{22}\}. \tag{20}$$

Рассмотрим случай, когда в стержне деформация не превышает предельного упругого значения, т.е. $P \le P_0$, и весь стержень деформируется упруго (4) (на рисунке цифрами обозначены номера участков стержня).

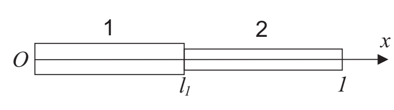


Рис. 4. Случай $P < P_0$

В этом случае из соотношений (1), (7) получим

$$N_1(x) = \pi r_1^2 E_1^{+} \varepsilon_1(x), \quad N_2(x) = \pi r_2^2 E_2^{+} \varepsilon_2(x). \tag{21}$$

Из (10), (21) получим выражения для деформаций

$$\varepsilon_1(x) = \frac{1}{\pi r_1^2 E_1^+} \left(P + (1 - l_1)q_2 + (l_1 - x)q_1\right), \tag{22}$$
$$\varepsilon_2(x) = \frac{1}{\pi r_2^2 E_2^+} \left(P + (1 - x)q_2\right).$$

В случае если параметры стержни таковы, что $P_{01} < P_{02}$, т.е. выполняется условие

$$\pi r_1^2 E_1^+ \varepsilon_{01}^+ - l_1 q_1 < \pi r_2^2 E_2^+ \varepsilon_{02}^+, \tag{23}$$

и нагрузка удовлетворяет условиям $P_{01} < P < P_{02}$, то на первом участке будут области нелинейного неупругого деформирования $[0, x_{s1}]$ и упругого деформирования $[x_{s1}, l_1]$, а на втором только упругого (рис. 5). На рисунке 5 заштрихованная область стержня соответствует участку нелинейного неупругого деформирования.

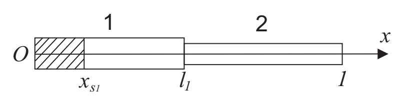


Рис. 5. Случай $P_{01} < P < P_{02}$

В случае же, если нагрузка находится в диапазоне $P_{02} < P < P_{01}$, имеем случай изображенный на рис. 6.

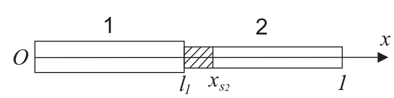


Рис. 6. Случай $P_{02} < P < P_{01}$

При выполнении условия $P_{11} < P_{02}$ имеем, в случае если нагрузка удовлетворяет условию $P_{11} < P < P_{02}$, область нелинейного неупругого деформирования, которая полностью охватывает первый участок стержня, а второй участок будет деформироваться упруго (рис. 7). Указанный случай будет иметь место при условии

$$r_1^2 E_1^+ \varepsilon_{01}^+ < r_2^2 E_2^+ \varepsilon_{02}^+. \tag{24}$$

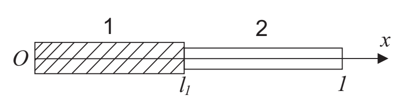


Рис. 7. Случай $P_{11} < P < P_{02}$

В случае физических параметров стержня, при которых справедливо неравенство $P_{12} < P_{01}$ и если $P$ находится в диапазоне $P_{12} < P < P_{01}$, второй участок полностью деформируется нелинейно неупруго, а первый участок будет деформироваться упруго (рис. 8).

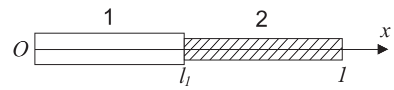


Рис. 8. Случай $P_{12} < P < P_{01}$

Если физические параметры стержня таковы, что $\max\{P_{01}, P_{02}\} < P < \min\{P_{11}, P_{12}\}$, имеем, что первый и второй участки стержня состоят из областей нелинейного неупругого деформирования и упругого, разделенных точками $x_{s1}$ и $x_{s2}$ соответственно (рис. 9).

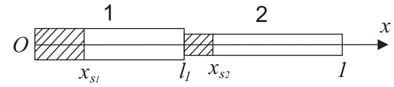


Рис. 9. Случай $\max\{P_{01}, P_{02}\} < P < \min\{P_{11}, P_{12}\}$

В случае $P_{11} < P_{12}$ и нагрузке, удовлетворяющей условиям $P_{11} < P < P_{12}, P > P_{02}$, первый участок стержня полностью находится в области нелинейного неупругого деформирования, а второй участок состоит из двух частей: области нелинейного неупругого деформирования $[l_1, x_{s2}]$ и области упругого деформирования $[x_{s2}, 1]$ (рис. 10).

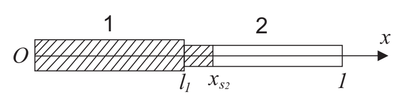


Рис. 10. Случай $P_{11} < P < P_{12}$ и $P > P_{02}$

Если справедливо неравенство $P_{12} < P_{11}$ и для нагрузки $P$ справедливо $P_{12} < P < P_{11}$, $P > P_{01}$, тогда второй участок стержня полностью находится в области нелинейного неупругого деформирования, а первый участок состоит из двух частей: области нелинейного неупругого деформирования $[0, x_{s1}]$ и области упругого деформирования $[x_{s1}, l_1]$ (рис. 11).

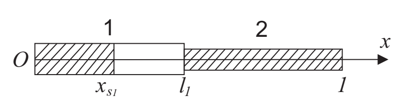


Рис. 11. Случай $P_{12} < P < P_{11}$ и $P > P_{01}$

В случае $P_1 < P < P_2$ весь стержень находится в области нелинейного деформирования (рис. 12).

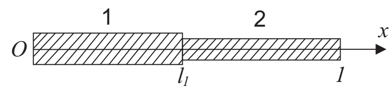


Рис. 12. Случай $P_1 < P < P_2$

Рассмотрим случай $P < P_0$ (рис. 4), тогда для удлинения $\delta$ справедливо

$$\delta = \int_0^{l_1} \varepsilon_1(x)dx + \int_{l_1}^{1} \varepsilon_2(x)dx = \frac{l_1}{2\pi r_1^2 E_1^+}\left(2P + 2(1-l_1)q_2 + l_1 q_1\right) + \\ + \frac{1-l_1}{2\pi r_2^2 E_2^+}\left(2P + q_2(1-l_1)\right). \tag{25}$$

При нагрузке $P = P_0$ из (14), (25) получим для удлинения $\delta_0$.

При $P_{01} < P < P_{02}$ имеем случай, изображенный на рис. 5, тогда для удлинения справедливо

$$\delta = \int_0^{x_s} \varepsilon_1(x)dx + \int_{x_{s1}}^{l_1} \varepsilon_1(x)dx + \int_{l_1}^{1} \varepsilon_2(x)dx, \tag{26}$$

где $\varepsilon_1(x)$ на участке $[0, x_{s1}]$ определяется как решение уравнения

$$\pi r_1^2 (A_{11}^{3+}\varepsilon_1(x) + A_{21}^{3+}(\varepsilon_1(x))^2 + A_{31}^{3+}(\varepsilon_1(x))^3) = P + (1-l_1)q_2 + (l_1 - x)q_1, \tag{27}$$

которое является кубическим относительно $\varepsilon_1(x)$ и может быть найдено по формуле Кардано [19], а деформация $\varepsilon_1(x)$ на интервале $[x_{s1}, l_1]$ и $\varepsilon_2(x)$ определяется по соотношениям для упругой области (22).

Из условия того, что $\varepsilon_1(x_{s1}) = \varepsilon_{01}^+$, из (22) получим для $x_{s1}$ выражение

$$x_{s1} = l_1 - \frac{\varepsilon_{01}^+ \pi r_1^2 E_1^+ - P - (1-l_1)q_2}{q_1}. \tag{28}$$

Из (28) видно, что при $P_0 < P < P_{01}$ для границы справедливо условие $0 < x_{s1} < l_1$.

В случае $P_{02} < P < P_{01}$ будет иметь место случай, изображенный на рис. 6, тогда удлинение стержня можно определить по соотношению

$$\delta = \int_0^{l_1} \varepsilon_1(x)dx + \int_{l_1}^{x_{s2}} \varepsilon_2(x)dx + \int_{l_1}^{1} \varepsilon_2(x)dx, \tag{29}$$

где деформация $\varepsilon_1(x)$ на участке $[0, l_1]$ и $\varepsilon_2(x)$ на участке $[l_1, 1]$ определяется по соотношениям для упругой области (22), а в области $\varepsilon_2(x)$ в области нелинейного деформирования из решения уравнения

$$\pi r_2^2 (A_{12}^{3+}\varepsilon_2(x) + A_{22}^{3+}(\varepsilon_2(x))^2 + A_{32}^{3+}(\varepsilon_2(x))^3) = P + (1-x)q_2. \tag{30}$$

Выражение для границы раздела областей $x_{s2}$ можно определить из уравнения $\varepsilon_2(x_{s2}) = \varepsilon_{02}^+$, где $\varepsilon_2(x)$ определяется, согласно уравнению (17), тогда получим для $x_{s2}$

$$x_{s2} = \frac{q_2 + P - \varepsilon_{02}^+ \pi r_2^2 E_2^+}{q_2}. \tag{31}$$

В случае $P_{11} < P < P_{02}$ (рис. 7) удлинение $\delta$ стержня определяется из соотношений

$$\delta = \int_0^{l_1} \varepsilon_1(x)dx + \int_{l_1}^1 \varepsilon_2(x)dx, \tag{32}$$

где $\varepsilon_1(x)$ – решение уравнения (27), $\varepsilon_2(x)$ определяется из (22).

В случае $P_{12} < P < P_{01}$ (рис. 8) удлинение $\delta$ стержня определяется из соотношений

$$\delta = \int_0^{l_1} \varepsilon_1(x)dx + \int_{l_1}^1 \varepsilon_2(x)dx, \tag{33}$$

где $\varepsilon_1(x)$ определяется из (22), $\varepsilon_2(x)$ – решение уравнения (30).

Если нагрузки и параметры стержня таковы, что $\max\{P_{01}, P_{02}\} < P < \min\{P_{11}, P_{12}\}$ (рис. 9), тогда имеем для удлинения $\delta$

$$\delta = \int_0^{x_{s1}} \varepsilon_1(x)dx + \int_{x_{s1}}^{l_1} \varepsilon_1(x)dx + \int_{l_1}^{x_{s2}} \varepsilon_2(x)dx + \int_{x_{s2}}^1 \varepsilon_2(x)dx, \tag{34}$$

где $\varepsilon_1(x)$ на интервале $[0, x_{s1}]$ определяется уравнением (27), $\varepsilon_2(x)$ на интервале $[l_1, x_{s2}]$ уравнением (30), $\varepsilon_1(x)$ на интервале $[x_{s1}, l_1]$ и $\varepsilon_2(x)$ на интервале $[x_{s2}, 1]$ уравнениями (22), $x_{s1}$ и $x_{s2}$ соотношениями (28) и (31) соответственно.

Если справедливо $P_{11} < P < P_{12}$ и $P > P_{02}$ (рис. 10), то удлинение стержня будет равно

$$\delta = \int_0^{l_1} \varepsilon_1(x)dx + \int_{l_1}^{x_{s2}} \varepsilon_2(x)dx + \int_{x_{s2}}^1 \varepsilon_2(x)dx, \tag{35}$$

где $\varepsilon_1(x)$ на интервале $[0, l_1]$ определяется уравнением (27), $\varepsilon_2(x)$ на интервале $[l_1, x_{s2}]$ уравнением (30), $\varepsilon_2(x)$ на интервале $[x_{s2}, 1]$ уравнением (22), $x_{s2}$ соотношением (31).

В случае нагрузок и физических параметров стержня, таковых, что справедливо $P_{12} < P < P_{11}$ и $P > P_{01}$ (рис. 11), удлинение равно

$$\delta = \int_0^{x_{s1}} \varepsilon_1(x)dx + \int_{x_{s1}}^{l_1} \varepsilon_1(x)dx + \int_{l_1}^1 \varepsilon_2(x)dx, \tag{36}$$

где $\varepsilon_1(x)$ на интервале $[0, x_{s1}]$ определяется уравнением (27), $\varepsilon_2(x)$ на интервале $[l_1, 1]$ уравнением (30), $\varepsilon_1(x)$ на интервале $[x_{s1}, l_1]$ уравнением (22), $x_{s1}$ соотношением (28).

Удлинение $\delta_1$, соответствующее нагрузке $P_1$, будет равно

$$\delta_1 = \int_0^{l_1} \varepsilon_1(x)dx + \int_{l_1}^1 \varepsilon_2(x)dx, \tag{37}$$

где $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2(x)$ определяются из уравнений (27), (30) при $P = P_1$.

В случае деформирования стержня при нагрузках $P_1 < P < P_2$ удлинение определяется выражением

$$\delta = \int_0^{l_1} \varepsilon_1(x)dx + \int_{l_1}^1 \varepsilon_2(x)dx, \tag{38}$$

где $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2(x)$ определяются из уравнений (27), (30).

Удлинение $\delta_2$ определяется по соотношениям (37), если положить в уравнениях (27), (30) значение нагрузки $P = P_2$.

В качестве примера рассмотрим однородный стержень из бетона марки $B10$ с параметрами

$$r_1 = r_2 = 5/100. \tag{39}$$

Тогда для предельных нагрузок по соотношениям (14), (17), (20) получим

$$P_0 = 0,000162, \quad P_1 = 0,000420, \quad P_2 = 0,000614. \tag{40}$$

Определим удлинения при заданных нагрузках $P_0$, $P_1$, $P_2$

$$\delta_0 = 0,000035, \quad \delta_1 = 0,000068, \quad \delta_2 = 0,000102. \tag{41}$$

Интегралы в формуле (37) считались по соотношениям

$$\delta_1 = \sum_{i=60}^{100} \varepsilon_2(x_i)h + \sum_{i=0}^{60} \varepsilon_1(x_i)h, \tag{42}$$

где $h = \frac{1}{100}$, $x_i = ih$, $\varepsilon_1(x_i)$, $\varepsilon_2(x_i)$ решения уравнений (27), (30) при соответствующих значений $x_i$.

В общем случае уравнения (27), (30) имеют три решения. При выборе соответствующего решения $\varepsilon_1(x_i)$, $\varepsilon_2(x_i)$ в формуле (42) искалось ближайшее неотрицательное решение к решению, полученному на предыдущем шаге $\varepsilon_1(x_{i+1})$, $\varepsilon_2(x_{i+1})$. При нахождении удлинения $\delta_1$ при нагрузке $P_1$ деформация в правом конце стержня должна равняться предельной, соответственно подсчет суммы велся, начиная с $x_{100} = 1$, и в качестве предыдущего значения для корректного выбора решения бралось значение деформации равной предельной. При нахождении предыдущего значения для $x_{60} = l_1$ (на границе двух участков) в первом участке стержня бралось значение деформации, равной значению на втором участке стержня (на границе соприкосновения с первым участком стержня). Все полученные расчеты выполнялись в математическом пакете Maple. Аналогичная сумма составлялась при вычислении интеграла (30).

Корректность выбора решений можно проследить на рисунке 13.

Выполним аналогичные расчеты для стержня (40) без учета силы тяжести, положив $q_1 = q_2 = 0$, тогда величина деформации будет постоянно вдоль стержня и равны $\varepsilon_0^+$, $\varepsilon_*^+$ при нагрузках $P_1$ и $P_2$ соответственно. Значения предельных нагрузок и удлинений будет иметь в этом случае вид

$$P_0 = 0,000420, \quad P_1 = 0,000420, \quad P_2 = 0,000871, \tag{43}$$

$$\delta_0 = 0,000050, \quad \delta_1 = 0,000069, \quad \delta_2 = 0,000150. \tag{44}$$

Сопоставляя результаты с учетом силы тяжести (40), (41), и без учета силы тяжести (43), (44) можно увидеть, что предельная нагрузка $P_0$ во втором случае больше в 2,6 раза, нагрузка $P_1$ совпадает, а $P_2$ больше во втором случае в 1,41 раза.

В дальнейшем стержни указанного сечения и материала будем считать эталонными и будем рассматривать стержни, с массой равной массе эталонного стержня

$$\pi r_э^2 \rho_э = \pi r_{1i}^2 l_1 \rho_{1i} + \pi r_{2i}^2 (1 - l_1) \rho_{2i}, \tag{45}$$

где $r_{1i}, r_{2i}$ – радиусы первого и второго участка составного стержня в поперечном сечении, $\rho_1, \rho_2$ – плотности первого и второго участка составного стержня, $r_э$ – радиус эталонного стержня, $\rho_э$ – плотность бетона эталонного стержня.

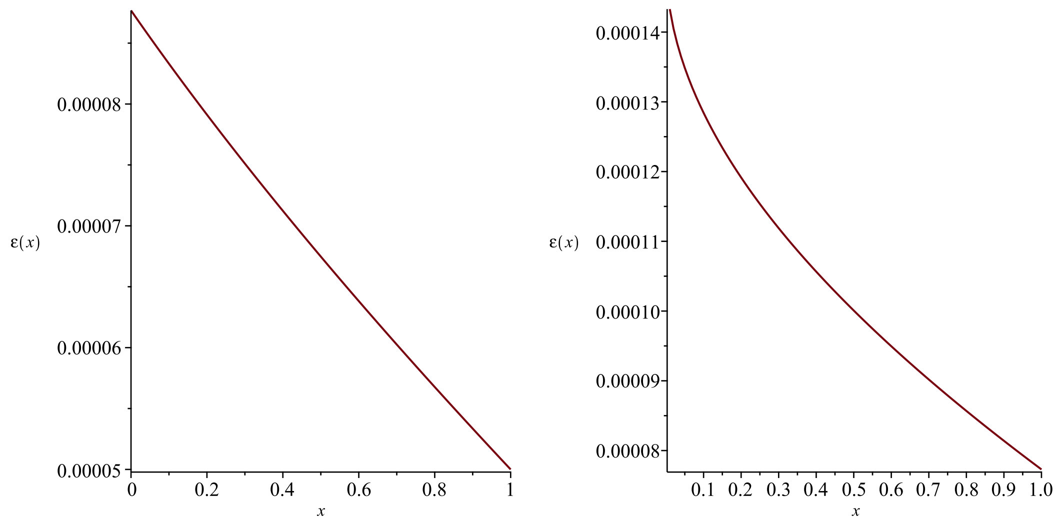


Рис. 13. Распределение деформаций вдоль длины стержня при нагрузке $P_1$ и $P_2$ соответственно

Рассмотрим слоистый стержень (46) такой же массы, как и эталонный стержень, т.е. с параметрами, удовлетворяющими соотношениям (45). Первый участок стержня предполагается, что изготовлен из бетона марки B50, а второй – B30.

$$r_1 = 42/1000, r_2 = 5/100, l_1 = 1/2. \tag{46}$$

В результате расчетов получаем для предельных нагрузок и удлинений решения:

$$P_0 = 0,000353, \quad P_1 = 0,000895, \quad P_2 = 0,001404, \tag{47}$$

$$\delta_0 = 0,00029, \quad \delta_1 = 0,00064, \quad \delta_2 = 0,000109. \tag{48}$$

Распределение деформаций в стержне при нагрузках $P_1$ и $P_2$ изображены на рис. 14.

Как видно из полученных решений на рис. 14, деформации и, следовательно, напряжения будут терпеть разрыв на границе соприкосновения слоев. Непрерывными будут, исходя из построения решения, продольные усилия и перемещения. Графики деформаций, изображенные на рис. 14, соответствуют принятым предположениями, т.е. при $P = P_1$ (рисунок слева) деформация в правом конце стержня равна предельному упругому значению, а при $P = P_2$ в левом конце стержня равна предельной деформации упрочнения.

Расчетные значения предельных усилий и соответствующих удлинений стержня, отношение разности предельных нагрузок рассматриваемого и эталонного стержня к предельной нагрузке эталонного стержня (если нагрузка считалась с учетом силы тяжести, то и для эталонного стержня нагрузка считалась тоже с учетом силы тяжести и наоборот) поместим в таблицу 3, причем знак плюс будет соответствовать тому, что предельная нагрузка больше, а минус – предельная нагрузка меньше по сравнению с эталонным стержнем.

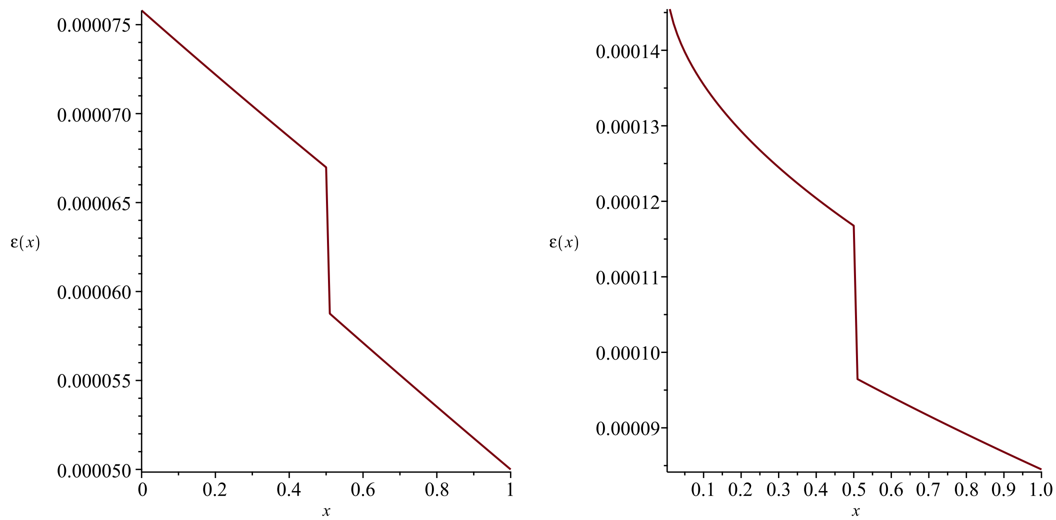


Рис. 14. Распределение деформаций вдоль длины стержня при нагрузке $P_1$ и $P_2$ соответственно

Рассмотрим стержень с параметрами

$$r_1 = 0,05086, r_2 = 4/100, l_1 = 1/2. \tag{49}$$

Распределение деформаций при нагрузках $P_1$ и $P_2$ имеют вид, изображенный на рис. 15. Как видно из полученных решений, деформации в левом участке стержня существенно выше, чем в правом, наибольшее значение будет на границе раздела двух участков. В случае нагрузки $P = P_1$ деформация равна предельному упругому значению в первом участке на границе сопряжения слоев, при нагрузке $P = P_2$ деформация равна предельной деформации упрочнения во втором слое, на границе раздела двух участков. Соответственно потеря стержнем несущей способности будет происходить на границе двух участков стержня. Указанные значения предельных нагрузок для данного случая и для различных комбинаций параметров сечения и материалов стержня, имеющих одинаковую массу (45), будем помещать в таблицу 3.

Если сравнить случаи 9 и 11 из таблицы 3, то можно увидеть, что при перестановке местами материалов слоев, в случае когда слой бетона B10 находится в зоне защемления, демонстрируется существенно низкая несущая способность. В этом случае (случай 11) потеря несущей способности происходит при нагрузке ниже, чем нагрузки, когда оба участка стали в области зоны нелинейного неупругого деформирования ($P_1 > P_2$), в случае 9 первый участок находится в зоне нелинейного-неупругого деформирования, а во втором участке слева деформация равна предельной деформации упрочнения (рис. 16). Причем, в случае 9 предельная нагрузка $P_2$ больше, чем в случае 11, в 3,7 раза. Распределение деформаций в стержне при нагрузке $P_2$ для случая 11 из таблицы 3 изображено на рис. 17. Из указанного рисунка видно, что во втором участке стержень находится в упругом состоянии, а в первом участке в месте защемления деформация равна предельной упрочнения.

Из полученных решений видно, что существенную роль при проектировании стержней играет выбор материалов стержня и то, в каком порядке эти материалы будут

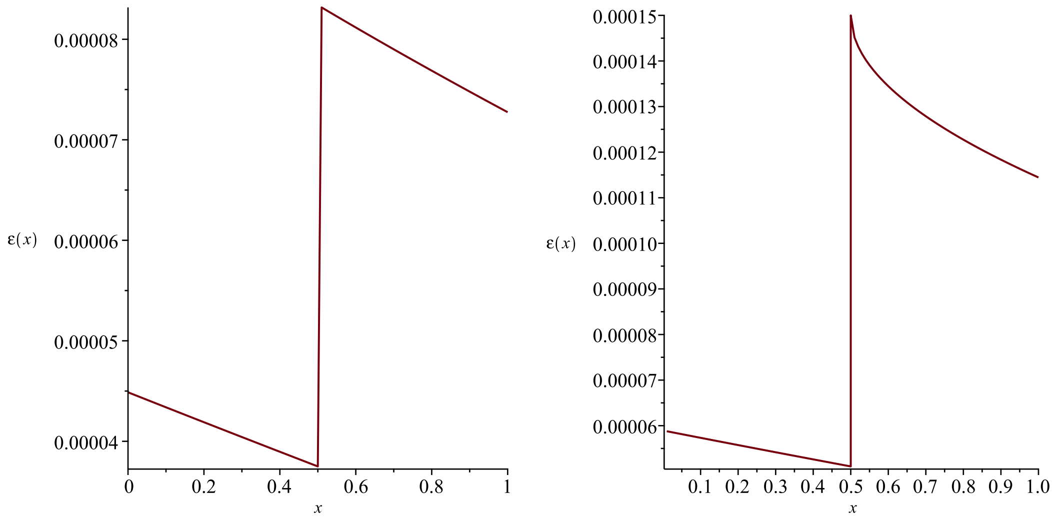


Рис. 15. Распределение деформаций вдоль длины стержня при нагрузке $P_1$ и $P_2$ соответственно

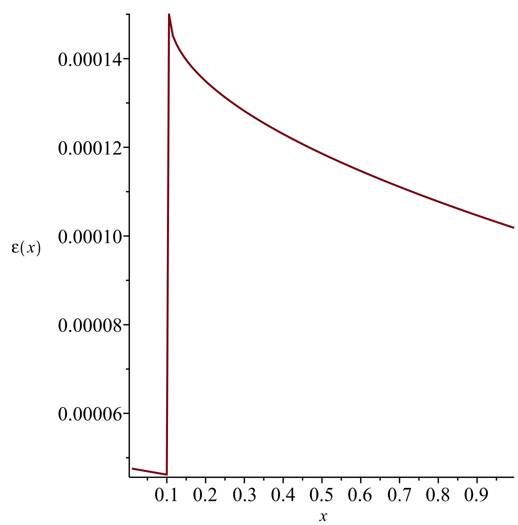


Рис. 16. Распределение деформаций вдоль длины стержня при нагрузке $P_2$ для случая 9 из таблицы 2

располагаться в стержне. Существенную роль также играет учет силы тяжести, игнорирование которой приводит к существенным погрешностям в расчетах.

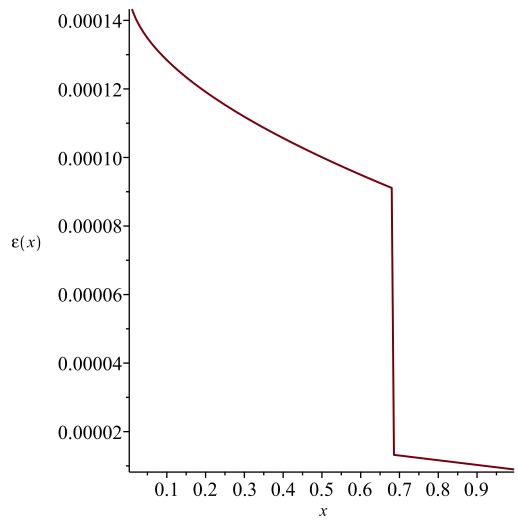


Рис. 17. Распределение деформаций вдоль длины стержня при нагрузке $P_2$ для случая 11 из таблицы 2

| № | $r_1$ | $r_2$ | $l_1$ | Сила тяжести | Слой 1 | Слой 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,042 | 0,05 | 0,5 | + | B50 | B30 |
| 2 | 0,042 | 0,05 | 0,5 | - | B50 | B30 |
| 3 | 0,05086 | 0,05 | 0,5 | + | B50 | B30 |
| 4 | 0,05086 | 0,05 | 0,5 | - | B50 | B30 |
| 5 | 0,0556 | 0,04 | 0,6 | + | B10 | B10 |
| 6 | 0,0556 | 0,04 | 0,6 | - | B10 | B10 |
| 7 | 0,06 | 0,045 | 0,1 | + | B50 | B30 |
| 8 | 0,06 | 0,045 | 0,1 | - | B50 | B30 |
| 9 | 0,04 | 0,06 | 0,68 | + | B50 | B10 |
| 10 | 0,04 | 0,06 | 0,68 | - | B50 | B10 |
| 11 | 0,04 | 0,06 | 0,68 | + | B10 | B50 |
| 12 | 0,04 | 0,06 | 0,68 | + | B10 | B50 |

Таблица 2. Параметры поперечных сечений, марки бетонов, реализованные в слоях составных эквивалентных по массе стержней, и наличие или отсутствие действия силы тяжести при расчетах

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Мищенко А. В. Прямая и обратная задачи деформирования слоистых стержней с учетом физической нелинейности // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: труды XIX Всероссийской конференции, Бийск, 28-31 августа 2005 г. Параллель, 2005. С. 184–188.

[2] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Предельное состояние бетонных и железобетонных стержней при сложном и продольно-поперечном изгибе // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 1. С. 60–73.

| № | $P_0$, $10^{-4}$ | $P_1$, $10^{-4}$ | $P_2$, $10^{-4}$ | $\delta_0, 10^{-5}$ | $\delta_1, 10^{-5}$ | $\delta_2, 10^{-4}$ | $\Delta P_0/P_{0э}$ | $\Delta P_1/P_{1э}$ | $\Delta P_2/P_{2э}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3,53 | 8,95 | 14,04 | 2,9 | 6,2 | 1,09 | 117 % | 113 % | 128 % |
| 2 | 6,10 | 8,95 | 16,61 | 3,6 | 5,3 | 1,29 | 45 % | 113 % | 90 % |
| 3 | 4,80 | 7,97 | 10,97 | 3,7 | 6,0 | 0,91 | 196 % | 89 % | 78 % |
| 4 | 5,73 | 8,90 | 11,89 | 3,7 | 6,0 | 1,01 | 36 % | 111 % | 36 % |
| 5 | 2,03 | 4,54 | 4,92 | 3,9 | 7,8 | 0,87 | 25 % | 8 % | -19 % |
| 6 | 2,68 | 5,20 | 5,58 | 3,5 | 7,7 | 0,92 | -36 % | 23 % | -35 % |
| 7 | 5,16 | 10,29 | 12,96 | 4,1 | 8,0 | 1,10 | 218 % | 144 % | 111 % |
| 8 | 7,25 | 12,38 | 15,05 | 4,7 | 8,9 | 1,38 | 72 % | 194 % | 72 % |
| 9 | 2,93 | 6,04 | 11,36 | 3,2 | 5,5 | 1,11 | 80 % | 43 % | 85 % |
| 10 | 5,50 | 12,04 | 12,55 | 4,0 | 4,4 | 1,13 | 30 % | 43 % | 44 % |
| 11 | 0,11 | 12,38 | 3,00 | 2,8 | - | 0,79 | -93 % | - % | -51 % |
| 12 | 2,68 | 12,38 | 5,58 | 3,7 | - | 1,07 | -36 % | - % | -35 % |

Таблица 3. Расчетные значение предельных нагрузок, соответствующих этим нагрузками удлинений составных эквивалентных по массе стержней и относительное изменение предельных нагрузок по сравнению с эталонным стержнем для стержней с параметрами из таблицы 2


[3] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб многослойных стержней из бетонов и сталефибробетонов // Известия Алтайского государственного университета. 2021. № 1(117). С. 40–46.

[4] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. On the stability loss of a rapidly rotating polymetallic disc // Mechanics of Solids. 2020. Vol. 55(6). p. 767–775.

[5] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Влияние формы поперечного сечения многослойного бетонного стержня на несущую способность при продольно-поперечной нагрузке // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник тезисов 9-й всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, посвященной 30-летию ИПРИМ РАН. 2019. С. 185–189.

[6] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб многослойных бетонных стержней армированных стальной арматурой под действием массовых сил // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 2(48). С. 94–103.

[7] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear rods by quasi-static loads and mass forces // Lecture Notes in Civil Engineering. 2021. Vol. 170. P. 447–457.

[8] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-Transverse Bending of Reinforced Concrete Rods on The Basis of Nonlinear Diagrams of Deformation of Phase Materials // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2448. p. 020024.

[9] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Продольно-поперечный изгиб физически-нелинейных железобетонных балок // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 3(49). С. 85–93.

[10] Мищенко А. В., Неимировский Ю. В. Нелинейное деформирование бетонных элементов при продольно-поперечном изгибе // Известия вузов. Строительство. 2013. № 4. С. 133–146.

[11] Плевков В. С., Колупаева С. Н., Кудяков К. Л. Расчетные диаграммы нелинейного деформирования базальто-фибробетона при статических и кратковременных динамических воздействиях // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2016. № 3. с. 95–110.

[12] Лукаш П. А. Основы нелинейной строительной механики. Москва: Строительство, 1974. 208 с.

[13] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Влияние формы поперечного сечения и силы тяжести на деформирование многослойных бетонных стержней при квазистатических нагрузках // Моделирование и механика конструкций. 2020. № 12. С. 11–49.
[14] Немировский Ю. В., Болтаев А. И. Диаграммы деформирования бетонов и железобетонов // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2015. № 6. с. 125–129.
[15] Немировский Ю. В. Прогнозирование нелинейного деформирования гибридных композитных материалов // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела : материалы второй международной конференции, Казань, Россия, 8-11 декабря 2009 г. Казань: Казанский гос. ун-т, 2009.
[16] Немировский Ю. В. Метод расчета стержневых композитных стержней из разномодульных материалов // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Материалы V Всероссийской научной конференции. Томск: Изд-во ТГУ, 2006. С. 288–290.
[17] Немировский Ю. В. Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С. 26–37.
[18] Иващенко Е. И. Разработка методов расчета железобетонных элементов на основе действительных диаграмм деформирования материалов с учетом фактического изменения площади их поперечных сечений // дис. ... канд. техн. наук. Воронеж, 2006. 230 с.
[19] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973. 720 с.

*Yu. V. Nemirovskii, S. V. Tikhonov*

## CENTRAL TREATMENT OF A PHYSICALLY NON-LINEAR ROD COMPOSITIONS

*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

*Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia*

*I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia*

***Abstract.*** The problem of central tension of a composite concrete rod by quasi-static loads is considered. The force of gravity acting on the rod is taken as a distributed load. The ultimate loads and elongations of the rod are determined depending on the physical parameters of the rod. At a deformation below the limiting elastic one, it is assumed that the concrete deforms linearly, otherwise it is non-linearly inelastic. Examples of calculations based on the obtained ratios for composite rods of the same mass are given, where different grades of concrete can be realized in each section of the rod.

***Keywords***: composite rod, central tension, physical non-linearity, limit loads

## REFERENCES

[1] Mishchenko A. V. Direct and inverse problems of deformation of layered bars taking into account physical nonlinearity // Numerical methods for solving problems in the theory of elasticity and

---

*Nemirovskii Yuri Vladimirovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia, Novosibirsk state technical University, Novosibirsk, Russia.
*Tikhonov Sergey Vladimirovich*, PHD, Assoc. Prof., I. Ulyanov Chuvash State

plasticity: Proceedings of the XIX All-english Conference, Biysk, August 28-31, 2005. Parallel, 2005. P. 184–188.
[2] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Ultimate state of concrete and reinforced concrete bars under complex and longitudinal-transverse bending // Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. 2020. no. 1. P. 60–73.
[3] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of multilayer concrete and steel-fiber-reinforced concrete bars // News of the Altai State University. 2021. no. 1(117). P. 40–46.
[4] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. On the stability loss of a rapidly rotating polymetallic disc // Mechanics of Solids. 2020. Vol. 55(6). p. 767–775.
[5] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Influence of the cross-sectional shape of a multilayer concrete bar on the bearing capacity under longitudinal-transverse loading // Mechanics of composite materials and structures, complex and heterogeneous media. Collection of abstracts of the 9th All-english scientific conference with international participation named after V.I. I.F. Obraztsov and Yu.G. Yanovsky dedicated to the 30th anniversary of IPRIM RAS. 2019. P. 185–189.
[6] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of multilayer concrete bars reinforced with steel reinforcement under the action of body forces // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2021. no. 2(48). P. 94–103.
[7] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear rods by quasi-static loads and mass forces // Lecture Notes in Civil Engineering. 2021. Vol. 170. P. 447–457.
[8] Nemirovskii Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-Transverse Bending of Reinforced Concrete Rods on The Basis of Nonlinear Diagrams of Deformation of Phase Materials // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2448. p. 020024.
[9] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Longitudinal-transverse bending of physically non-linear reinforced concrete beams // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2021. no. 3(49). P. 85–93.
[10] Mishchenko A. V., Neimirovskiy Y. V. Nonlinear deformation of concrete elements during longitudinal-transverse bending // News of universities. Construction. 2013. no. 4. P. 133–146.
[11] Plevkov V. S., Kolupaeva S. N., Kudyakov K. L. Design diagrams of non-linear deformation of basalt-fiber-reinforced concrete under static and short-term dynamic effects // Bulletin of the Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering. 2016. no. 3. p. 95–110.
[12] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of elastic-plastic body. M.: Science, 1978. 208 p.
[13] Nemirovsky Y. V., Tikhonov S. V. Influence of the cross-sectional shape and gravity on the deformation of multilayer concrete bars under quasi-static loads // Modeling and structural mechanics. 2020. no. 12. P. 11–49.
[14] Nemirovsky Y. V., Boltaev A. I. Diagrams of deformation of concrete and reinforced concrete // Bulletin of the Belgorod State Technological University. V.G. Shukhov. 2015. no. 6. p. 125–129.
[15] Nemirovsky Y. V. Nonlinear Deformation Prediction for Hybrid Composite Materials // Problems of non-linear mechanics of a deformable solid body: materials of the second international conference, Kazan, Russia, December 8-11, 2009. Kazan: Kazan state. university, 2009.
[16] Nemirovsky Y. V. Method of calculation of rod composite rods from different-modulus materials // Fundamental and Applied Problems of Modern Mechanics: Proceedings of the V All-english Scientific Conference. Tomsk: TSU publishing house, 2006. P. 288–290.
[17] Nemirovsky Y. V. Prelimit deformation of hybrid reinforced concrete structures // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the limit state. 2018. no. 3(37). P. 26–37.
[18] Ivashchenko E. I. Development of methods for calculating reinforced concrete elements based on actual material deformation diagrams, taking into account the actual change in their cross-sectional area // dis. ... cand. tech. Sciences. Voronezh, 2006. 230 p.
[19] Korn G., Korn T. Handbook of mathematics (for scientists and engineers). M.: Science, 1973. 720 p.