Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1 (51). С. 59–64

Г. Т. Володин, Д. С. Кочергин

КОЛЕБАНИЯ И УСЛОВИЯ ГАРАНТИРОВАННОГО РАЗРУШЕНИЯ БАЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ВЗРЫВОМ В ВОДЕ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Представлено решение актуальной задачи о колебаниях балки, находящейся в воде, вызванных воздействием на неё взрыва заряда конденсированного взрывчатого вещества (ВВ). В предположении, что максимальный изгибающий момент при таких колебаниях приводит к гарантированному разрушению рассматриваемой балочной конструкции, в соответствии с выбранным критерием разрушения балки найдена нижняя граница величины разрушающего импульса.

Ключевые слова: взрыв в воде, балка, колебания, гарантированное разрушение, взрывная нагрузка.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.006

УДК: 531/534

Постановка задачи.

Рассмотрим задачу о нахождении условий гарантированного разрушения взрывной нагрузкой жестко закрепленной по концам балки, находящейся в воде.

Физическая модель явления (основные допущения).

Балка жестко закреплена в неподвижных идеальных (неразрушаемых) опорах, находится в воде на известной глубине. Известны физические и геометрические характеристики балки, а также интенсивность взрывной нагрузки. Окружающая балку среда (вода) является сжимаемой, используются экспериментальные уравнения динамических адиабат воды [1].

Предполагаем, что в недеформированном состоянии упругая ось балки прямолинейна и совпадает с линией центров тяжести поперечных сечений; эту ось принимаем за координатную ось x.

Володин Геннадий Тимофеевич
`e-mail:` g.volodin@yandex.ru, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.
Кочергин Денис Сергеевич
`e-mail:` sir.cod4@yandex.ru, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 05.04.2022

Предполагаем также, что отклонения отдельных точек оси балки происходят перпендикулярно прямолинейному, недеформированному её направлению, при этом пренебрегаем смещениями этих точек, параллельными оси x. Отклонения точек оси балки при поперечных колебаниях происходят в одной плоскости и являются малыми отклонениями, при которых выполняется режим упругого деформирования. Балка имеет постоянное поперечное сечение, не изменяющееся вдоль оси x.

При достижении в некотором сечении балки максимального значения изгибающего момента, она разрушается в том смысле, что в этом сечении образуется пластический шарнир, переходящий в пластическую зону, либо трещина, нарушающие несущую способность балки [2], [3].

Математическая модель.

Взрывная нагрузка относится к импульсным интенсивным и весьма скоротечным непериодическим нагрузкам. За время её действия элементы балки не успевают получить заметных начальных смещений от положения равновесия, а получают лишь начальные скорости. Деформирование балки происходит после окончания действия нагрузки, во время ее свободных колебаний. Сопротивление воды движению балки при колебаниях можно отнести к инерционным силам путём введения присоединенной массы воды [4], [5].

Определяющее уравнение колебаний, в процессе которых происходит деформирование балки, представляет собой однородное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка, которое имеет вид [2], [3], [5], [6].

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \tag{1}$$

где $y = y(x,t)$ - прогиб балки для сечения с координатой x в момент времени t; параметр c определяется из соотношения

$$c^2 = \frac{EJ}{\mu} \tag{2}$$

где $\mu = m_* + m_1$, m_* и m_1 - соответственно погонная масса материала балки и погонная присоединенная масса воды; E – модуль упругости материала балки, J – момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси.

Граничные условия для уравнения (1) запишем в соответствии с видом закрепления концов балки. В случае жесткого закрепления получим

$$y(0,t) = y(l,t) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial y}{\partial x}(l,t) = 0 \tag{4}$$

Условия (3) означают, что на защемленных концах балки отсутствуют смещения, а условия (4) указывают на отсутствие поворотов сечений балки на закрепленных ее концах относительно соответствующей нейтральной оси.

Начальные условия для уравнения (1) запишем в соответствии с характером действующей взрывной нагрузки

$$y(x,0) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \frac{i_*(x)}{\mu}, \tag{6}$$

где $i_*(x)$ - удельный погонный импульс.

Решение поставленной начально-краевой задачи (1) - (6) будем искать в виде

$$y(x,t) = \varphi(x) \cdot T(t), \tag{7}$$

где функцию $T(t)$ представим в виде

$$T(t) = \sin(P \cdot t + \alpha), \tag{8}$$

выделив, тем самым, главное колебание [6], где P – частота, α – фаза.

Подстановка предполагаемого решения (7) в уравнение (1) приводит к уравнению для функции $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi^{(4)}(x) - k^4 \cdot \varphi(x) = 0, \tag{9}$$

где

$$k^4 = \frac{P^2}{c^2} = \frac{P^2 \mu}{EJ} \tag{10}$$

Общий интеграл уравнения (9) найдем в виде

$$\varphi(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} + c_3 \cos kx + c_4 \sin kx \tag{11}$$

Подчинив функцию (11) краевым условиям (3)-(4) получим систему однородных уравнений относительно коэффициентов $c_1 - c_4$ в виде

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 e^{kl} + c_2 e^{-kl} + c_3 \cos kl + c_4 \sin kl = 0 \\ c_1 - c_2 + c_4 = 0 \\ c_1 e^{kl} - c_2 e^{-kl} - c_3 \sin kl + c_4 \cos kl = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Из условия нетривиальности решений однородных систем линейных алгебраических уравнений получим соотношение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ e^{kl} & e^{-kl} & \cos kl & \sin kl \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ e^{kl} & -e^{kl} & -\sin kl & \cos kl \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

После раскрытия определителя, получим уравнение частот

$$chkl \cdot \cos kl - 1 = 0 \tag{14}$$

или $ch\alpha \cdot \cos\alpha - 1 = 0$, где $\alpha = kl$.

Первые два корня уравнения (14) найдены численно $\alpha_1 = 4{,}73$, $\alpha_2 = 7{,}85$.

Соответствующие собственные частоты первых двух собственных форм имеют вид

$$\begin{cases} P_1 = \left(\frac{\alpha_1}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \\ P_2 = \left(\frac{\alpha_2}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \end{cases} \tag{15}$$

В общем случае

$$P_j = k_j^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \tag{16}$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} (M_j \cos P_j t + N_j \sin P_j t) \cdot \sin \frac{j\pi x}{l} \tag{17}$$

Из начального условия (5) найдём

$$M_j = 0, \tag{18}$$

поэтому

$$y(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} N_j \sin P_j t \cdot \sin \frac{j\pi x}{l} \tag{19}$$

Из начального условия (6) с учётом (19) получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} N_j P_j t \cdot \sin \frac{j\pi x}{l} = \frac{i_*(x)}{\mu} \tag{20}$$

Используя (20) как представление функции $\frac{i_*(x)}{\mu}$ рядом Фурье, найдём

$$N_j = \frac{2}{P_j l} \int_0^l \frac{i_*(x)}{\mu} \cdot \sin \frac{j\pi x}{l} dx \tag{21}$$

Представляет существенный интерес случай, когда импульс $i_*(x) = const$, соответствующий плоской симметрии взрывной волны. Обозначим $i_*(x) = const = i_0$, тогда согласно (21) получим

$$y(x,t) = \frac{2i_0}{\pi\mu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - \cos j\pi}{j \cdot P_j} \sin P_j t \cdot \sin \frac{j\pi x}{l} \tag{22}$$

В моменты времени t_*, когда $|\sin P_j t_*| = 1$, прогибы будут максимальными. Эти моменты определяются соотношением

$$t_* = \frac{2n-1}{2P_j}\pi \tag{23}$$

При этом

$$\max y = \frac{2i_0}{\pi\mu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - \cos j\pi}{j \cdot P_j} \cdot \sin \frac{j\pi x}{l} \tag{24}$$

Максимальный из максимальных прогибов будет в середине пролёта балки, который определяется, согласно (24), формулой

$$Y = \max(\max y) = \max y|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{2i_0}{\pi\mu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - \cos j\pi}{j \cdot P_j} \cdot \sin \frac{j\pi}{2} \tag{25}$$

Используя известную формулу для изгибающих моментов при малых прогибах

$$M = -EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{26}$$

получим соотношение для максимального изгибающего момента, который будет в момент времени t_* в середине пролёта балки, т.е. при $x = \frac{l}{2}$:

$$M_{\max} = 2\pi i_0 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left[1 - (-1)^j\right] j}{\alpha_j^2} \sin \frac{j\pi}{2} \tag{27}$$

Согласно [7], условие гарантированного разрушения имеет вид

$$M_{\max} \geq K_{0*} \cdot \mu_3 \cdot \delta_{*n} \cdot W \tag{28}$$

Из равенства (27) с учётом (28) получим

$$i_0 \geq \frac{K_{0*} \cdot \mu_3 \cdot \delta_{*n} \cdot W}{2\pi\sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[1-(-1)^j]j}{\alpha_j^2} \sin\frac{j\pi}{2}} \tag{29}$$

или в развернутом виде

$$i_0 \geq \frac{K_{0*} \cdot \mu_3 \cdot \delta_{*n} \cdot W}{4\pi\sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \left(\frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{3}{\alpha_3^2} + \frac{5}{\alpha_5^2} - \frac{7}{\alpha_7^2} + ...\right)}, \tag{30}$$

где μ_3 - коэффициент динамичности материала балки ($\mu_3 = \frac{\delta_{*3}}{\delta_*}$,$\delta_{*3}$ - динамический предел прочности, δ_* - статический предел прочности), K_{0*} - коэффициент однородности на гарантированное разрушение ($K_{0*} = \frac{\delta_{*\max}}{\delta_{*0}}$,$\delta_{*0}$ - нормированный браковочный минимум, $\delta_{*\max}$ - максимальное сопротивление материала), δ_{*n} - нормативное сопротивление материала при изгибе, W – момент сопротивления балки.

Соотношение (30) определяет нижнюю границу значений удельного импульса, воздействие которого на рассматриваемую балочную конструкцию приводит к её гарантированному разрушению.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Саламахин Т. М. Физические основы механического действия взрыва и методы определения ввзрывных нагрузок. Москва: ВИА, 1974. 275 с.

[2] Сейлер Д., Коттер Б., Саймондс П. Импульсивное нагружение упруго-пластических балок. Москва: ИЛ, 1957. 101-114 с.

[3] Гольденблат И. И., Николаенко Н. А. Расчёт конструкций на действие сейсмических и импульсивных сил. Москва: Госстройиздат, 1961. 320 с.

[4] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, часть 1. Москва: ГИФМЛ, М, 1963. 584 с.

[5] Саламахин Т. М. Разрушение взрывом элементов конструкций. Москва: ВИА, 1961. 275 с.

[6] Бабаков И. М. Теория колебаний. Москва: Наука, 1968. 560 с.

[7] Володин Г. Т. Действие взрыва зарядов конденсированных ВВ в газовой и жидкой среде. Часть 2. Взрывостойкость и гарантированное разрушение элементов конструкций. Тула: Левша, 2005. 160 с.

G. T. Volodin, D. S. Kochergin

FLUCTUATIONS AND CONDITIONS OF GUARANTEED DESTRUCTION OF BEAM STRUCTURAL ELEMENTS BY EXPLOSION IN WATER

Tula State University, Tula, Russia.

Abstract. The solution of the actual problem of vibrations of a beam in water caused by the impact of an explosion of a condensed explosive charge on it is presented. Assuming that the maximum bending moment under such fluctuations leads to guaranteed destruction of the beam structure in question, the lower bound of the magnitude of the destructive impulse is found in accordance with the selected criterion of beam destruction.

Keywords: explosion in water, beam, vibrations, guaranteed destruction, explosive load.

Volodin Gennady Timofeevich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Tula State University, Tula,

REFERENCES

[1] Salamakhin T. M. Physical foundations of the mechanical action of the explosion and methods for determining explosive loads. Moscow: VIA, 1974. 275 p. (in Russian).
[2] Seiler D., Cotter B., Symonds P. Impulse loading of elastic-plastic beams. Moscow: IL, 1957. 101-114 p. (in Russian).
[3] Goldenblatt I., Nikolaenko N. Calculation of structures for the action of seismic and impulsive forces. Moscow: Gosstroyizdat, 1961. 320 p. (in Russian).
[4] Kochin N. E., Kibel I. A., Rose N. V. Theoretical hydromechanics, part 1. Moscow: GIFML, 1963. 584 p. (in Russian).
[5] Salamakhin T. M. Explosion destruction of structural elements. Moscow: VIA, 1961. 275 p. (in Russian).
[6] Babakov I. M. Oscillation theory. Moscow: Science, 1968. 560 p. (in Russian).
[7] Volodin G. T. The effect of the explosion of charges of condensed explosives in a gas and liquid medium. Part 2. Explosion resistance and guaranteed destruction of structural elements. Tula: Lefty, 2005. 160 p. (in Russian).

Russia.
Kochergin Denis Sergeevich, postgraduate student, Tula State University, Tula, Russia.