

С. Л. Субботин, А. А. Алексеев

**КОНКРЕТИЗАЦИЯ ОБОБЩЕНИЯ ГИПОТЕЗЫ
КОМПЛАНАРНОСТИ ДЛЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
В ТРЕХМЕРНОМ ИЗОБРАЖАЮЩЕМ ПРОСТРАНСТВЕ
А. А. ИЛЬЮШИНА**

Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия

Аннотация. Рассмотрена одна из форм трехчленных определяющих соотношений теории упругоэластических процессов и представлена методика определения функционалов теории упругоэластических процессов для плоского напряженного состояния и трехмерных винтовых траекторий деформирования методом подбора аналитических функций, соответствующих экспериментальным данным. Приведены конкретизированные формулы для определения функционалов по экспериментальным данным для координат векторов напряжений и деформаций и их производным по длине дуги траектории деформирования. Результаты вычисления функционалов пластичности для трехмерной винтовой траектории деформирования представлены в наглядной графической форме.

Ключевые слова: теория упругоэластических процессов, пластичность, гипотеза компланарности, функционалы пластичности.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.008

УДК: 539.3

Введение. Теория упругоэластических процессов А.А.Ильюшина [1–3] является одной из наиболее востребованных теорий пластичности и широко применяется в расчетах процессов сложного нагружения материалов при малых деформациях [4–10]. В теории процессов используется векторное (геометрическое) представление истории изменения напряжений и деформаций в виде образа процесса нагружения или деформирования, включающего в себя траекторию, в каждой точке которой приписываются характеристики процесса: векторы напряжений $\bar{\sigma}$ и деформаций $\bar{\epsilon}$ формоизменения, их приращения $d\bar{\sigma}$ и $d\bar{\epsilon}$, а также скалярные параметры (температура, среднее напряжение, средняя деформация и др.). Связь между напряжениями и деформациями

© Субботин С. Л., Алексеев А. А., 2022

Субботин Сергей Львович

e-mail: sbtn@yandex.ru, доктор технических наук, профессор, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия,

Алексеев Андрей Алексеевич

e-mail: alexeew@bk.ru, кандидат технических наук, доцент, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Россия.

Поступила 01.04.2022

в теории процессов задается определяющими соотношениями, учитывающими скалярные и векторные свойства материалов. Скалярные свойства характеризуют связь между инвариантами девиаторов напряжений и деформаций; а векторные свойства – несоосность девиаторов напряжений, деформаций и их приращений. Важной особенностью теории является возможность прямой экспериментальной проверки ее основных положений и постулатов [4, 11-14].

В практических расчетах широко используются двучленные определяющие соотношения гипотезы компланарности А.А. Ильюшина [3], являющиеся частным случаем общих трехчленных определяющих соотношений, впервые полученных В.Г. Зубчаниновым [15]. Суть гипотезы компланарности заключается в том, что вектор напряжений $\bar{\sigma}$, вектор его приращения $d\bar{\sigma}$ и единичный вектор репера Френе $\hat{p}_1 = \frac{d\bar{\Theta}}{ds}$, касательный к траектории деформирования с длиной дуги s , лежат в одной плоскости, то есть компланарны.

Основные уравнения. В.Г. Зубчанинов в [4] обосновал формулу трехчленных определяющих соотношений теории упругопластических процессов в виде

$$\frac{d\hat{\sigma}}{ds} = N \frac{d\bar{\Theta}}{ds} + (P - N) \frac{\bar{\sigma}}{\sigma^2} \frac{d\bar{\Theta}}{ds} \bar{\sigma} - N \operatorname{tg} \beta \sin \vartheta_1 \hat{\mu} \quad (1)$$

где $\hat{\mu}$ – единичный вектор, перпендикулярный плоскости, в которой расположены единичные векторы $\hat{p}_1 = \frac{d\bar{\Theta}}{ds}$ и $\hat{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma}$, то есть плоскости компланарности (рис. 1); N , P , $\operatorname{tg} \beta$ – функционалы упругопластического процесса, определяемые формулами

$$N = \frac{\frac{d\bar{\sigma}}{ds} \hat{t}}{\frac{d\bar{\Theta}}{ds} \hat{t}} = -\frac{1}{\sin \vartheta_1} \left(\frac{dS_1}{ds} t_1 + \frac{dS_2}{ds} t_2 + \frac{dS_3}{ds} t_3 \right) \quad (2)$$

$$P = \frac{\frac{d\bar{\sigma}}{ds} \bar{\sigma}}{\frac{d\bar{\Theta}}{ds} \bar{\sigma}} = \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\cos \vartheta_1} = \frac{1}{\sigma \cos \vartheta_1} \left(\frac{dS_1}{ds} S_1 + \frac{dS_2}{ds} S_2 + \frac{dS_3}{ds} S_3 \right) \quad (3)$$

$$Q = -N \operatorname{tg} \beta \sin \vartheta_1 = \frac{d\bar{\sigma}}{ds} \hat{\mu} = \frac{dS_1}{ds} \mu_1 + \frac{dS_2}{ds} \mu_2 + \frac{dS_3}{ds} \mu_3 \quad (4)$$

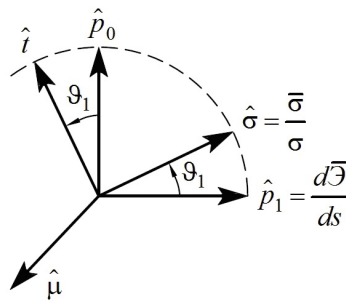


Рис. 1.

Здесь ϑ_1 – угол между векторами $\hat{\sigma}$ и \hat{p}_1 , называемый углом сближения, для которого

$$\cos \vartheta_1 = \hat{\sigma} \cdot \hat{p}_1 = \frac{1}{\sigma} \left(S_1 \frac{d\Theta_1}{ds} + S_2 \frac{d\Theta_2}{ds} + S_3 \frac{d\Theta_3}{ds} \right), \quad (5)$$

$$\hat{t} = t_1 \hat{e}_1 + t_2 \hat{e}_2 + t_3 \hat{e}_3 \quad (6)$$

– единичный вектор, расположенный в плоскости компланарности, перпендикулярный вектору $\hat{\sigma}$; аналогично можно разложить и вектор $\hat{\mu}$

$$\hat{\mu} = \mu_1 \hat{e}_1 + \mu_2 \hat{e}_2 + \mu_3 \hat{e}_3, \quad (7)$$

где $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ – единичные векторы трехмерного изображающего пространства А.А. Ильюшина.

Единичный вектор $\hat{\mu}$, показывающий выход из плоскости компланарности, определяется векторным произведением векторов \hat{p}_1 и $\hat{\sigma}$

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{\hat{p}_1 \times \hat{\sigma}}{|\hat{p}_1 \times \hat{\sigma}|} = \frac{1}{\sin \vartheta_1} \cdot \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \frac{d\Theta_1}{ds} & \frac{d\Theta_2}{ds} & \frac{d\Theta_3}{ds} \\ \frac{S_1}{\sigma} & \frac{S_2}{\sigma} & \frac{S_3}{\sigma} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left[\left(S_3 \frac{d\Theta_2}{ds} - S_2 \frac{d\Theta_3}{ds} \right) \hat{e}_1 + \left(S_1 \frac{d\Theta_3}{ds} - S_3 \frac{d\Theta_1}{ds} \right) \hat{e}_2 + \left(S_2 \frac{d\Theta_1}{ds} - S_1 \frac{d\Theta_2}{ds} \right) \hat{e}_3 \right], \end{aligned} \quad (8)$$

тогда с учетом (7) его координаты:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left(S_3 \frac{d\Theta_2}{ds} - S_2 \frac{d\Theta_3}{ds} \right), \\ \mu_2 &= \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left(S_1 \frac{d\Theta_3}{ds} - S_3 \frac{d\Theta_1}{ds} \right), \\ \mu_3 &= \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left(S_2 \frac{d\Theta_1}{ds} - S_1 \frac{d\Theta_2}{ds} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Модуль вектора $\hat{\mu}$ согласно формуле векторного произведения

$$|\hat{\mu}| = \frac{|\hat{p}_1 \times \hat{\sigma}|}{\sin \vartheta_1} = |\hat{p}_1| \cdot |\hat{\sigma}| = 1,$$

для проверки в расчетах можно использовать формулу

$$|\hat{\mu}| = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2} = 1.$$

Единичный вектор \hat{t} (см. рис. 1) может быть найден разложением на проекции по направлениям \hat{p}_1 и \hat{p}_0 , то есть

$$\hat{t} = \hat{p}_0 \cos \vartheta_1 - \hat{p}_1 \sin \vartheta_1, \quad (10)$$

где \hat{p}_0 – единичный вектор, расположенный в плоскости векторов \hat{p}_1 и $\hat{\sigma}$ (плоскости компланарности) и перпендикулярный вектору \hat{p}_1 . Аналогично можно разложить и единичный вектор $\hat{\sigma}$

$$\hat{\sigma} = \hat{p}_1 \cos \vartheta_1 + \hat{p}_0 \sin \vartheta_1. \quad (11)$$

Из формул (10), (11) следует, что

$$\hat{p}_0 = \frac{1}{\sin \vartheta_1} \hat{\sigma} - \frac{\cos \vartheta_1}{\sin \vartheta_1} \hat{p}_1, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \frac{\cos \vartheta_1}{\sin \vartheta_1} \hat{\sigma} - \frac{1}{\sin \vartheta_1} \hat{p}_1 = \\ &= \frac{1}{\sin \vartheta_1} \left[\left(\frac{S_1}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\vartheta_1}{ds} \right) \hat{e}_1 + \left(\frac{S_2}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\vartheta_2}{ds} \right) \hat{e}_2 + \left(\frac{S_3}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\vartheta_3}{ds} \right) \hat{e}_3 \right], \end{aligned} \quad (13)$$

тогда с учетом (6) координаты вектора \hat{t} :

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{\sin \vartheta_1} \left(\frac{S_1}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\vartheta_1}{ds} \right), \\ t_2 &= \frac{1}{\sin \vartheta_1} \left(\frac{S_2}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\vartheta_2}{ds} \right), \\ t_3 &= \frac{1}{\sin \vartheta_1} \left(\frac{S_3}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\vartheta_3}{ds} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом $\sigma^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ и соотношения (5) выражения (14) можно представить в виде

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{\sigma^2 \sin \vartheta_1} \left[S_2 \left(S_1 \frac{d\vartheta_2}{ds} - S_2 \frac{d\vartheta_1}{ds} \right) + S_3 \left(S_1 \frac{d\vartheta_3}{ds} - S_3 \frac{d\vartheta_1}{ds} \right) \right], \\ t_2 &= \frac{1}{\sigma^2 \sin \vartheta_1} \left[S_1 \left(S_2 \frac{d\vartheta_1}{ds} - S_1 \frac{d\vartheta_2}{ds} \right) + S_3 \left(S_2 \frac{d\vartheta_3}{ds} - S_3 \frac{d\vartheta_2}{ds} \right) \right], \\ t_3 &= \frac{1}{\sigma^2 \sin \vartheta_1} \left[S_1 \left(S_3 \frac{d\vartheta_1}{ds} - S_1 \frac{d\vartheta_3}{ds} \right) + S_2 \left(S_3 \frac{d\vartheta_2}{ds} - S_2 \frac{d\vartheta_3}{ds} \right) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Скалярное умножение \hat{t} по (13) и $\hat{p}_1 = \frac{d\bar{\vartheta}}{ds}$ дает соотношение

$$\hat{p}_1 \cdot \hat{t} = \hat{p}_1 \cdot \left(\frac{\cos \vartheta_1}{\sin \vartheta_1} \hat{\sigma} - \frac{1}{\sin \vartheta_1} \hat{p}_1 \right) = \frac{\cos^2 \vartheta_1}{\sin \vartheta_1} - \frac{1}{\sin \vartheta_1} = -\sin \vartheta_1,$$

где учтено, что $\sin^2 \vartheta_1 = 1 - \cos^2 \vartheta_1$.

Формулу для вектора \hat{t} можно также получить из векторного произведения векторов $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ в координатной форме (см. рис. 1)

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \frac{\hat{\mu} \times \hat{\sigma}}{|\hat{\mu} \times \hat{\sigma}|} = \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \left(S_3 \frac{d\vartheta_2}{ds} - S_2 \frac{d\vartheta_3}{ds} \right) & \left(S_1 \frac{d\vartheta_3}{ds} - S_3 \frac{d\vartheta_1}{ds} \right) & \left(S_2 \frac{d\vartheta_1}{ds} - S_1 \frac{d\vartheta_2}{ds} \right) \\ \frac{S_1}{\sigma} & \frac{S_2}{\sigma} & \frac{S_3}{\sigma} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left[\left(\frac{S_1}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\vartheta_1}{ds} \right) \hat{e}_1 + \left(\frac{S_2}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\vartheta_2}{ds} \right) \hat{e}_2 + \left(\frac{S_3}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\vartheta_3}{ds} \right) \hat{e}_3 \right]. \end{aligned}$$

Далее представлена проверка ортогональности векторов $\hat{\sigma}$, \hat{t} , $\hat{\mu}$. Известно, что два вектора являются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. Скалярное произведение векторов $\hat{\sigma}$ и \hat{t} :

$$\begin{aligned} & \hat{\sigma} \cdot \hat{t} = \\ &= \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left[\frac{S_1}{\sigma} \left(\frac{S_1}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right) + \frac{S_2}{\sigma} \left(\frac{S_2}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right) + \frac{S_3}{\sigma} \left(\frac{S_3}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left[\frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}{\sigma^2} \cos \vartheta_1 - \frac{S_1 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} + S_2 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} + S_3 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds}}{\sigma} \right] = \\ &= \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} [\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_1] = 0. \end{aligned}$$

Скалярное произведение векторов $\hat{\sigma}$ и $\hat{\mu}$:

$$\begin{aligned} & \hat{\sigma} \cdot \hat{\mu} = \\ &= \frac{1}{\sigma^2 \sin \vartheta_1} \left[S_1 \left(S_3 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} - S_2 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right) + S_2 \left(S_1 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} - S_3 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right) + S_3 \left(S_2 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} - S_1 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Скалярное произведение векторов \hat{t} и $\hat{\mu}$ с учетом (9) и (15):

$$\begin{aligned} & \hat{t} \cdot \hat{\mu} = t_1 \mu_1 + t_2 \mu_2 + t_3 \mu_3 = \\ &= \frac{1}{\sigma^3 \sin^2 \vartheta_1} \left[S_2 \left(S_1 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} - S_2 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right) \left(S_3 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} - S_2 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right) + \right. \\ &+ S_3 \left(S_1 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} - S_3 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right) \left(S_3 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} - S_2 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right) + S_1 \left(S_2 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} - S_1 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right) \left(S_1 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} - S_3 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right) + \\ &+ S_3 \left(S_2 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} - S_3 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right) \left(S_1 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} - S_3 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right) + S_1 \left(S_3 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} - S_1 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right) \left(S_2 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} - S_1 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right) + \\ &\left. + S_2 \left(S_3 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} - S_2 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right) \left(S_2 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} - S_1 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Проверка ортогональности выполняется.

Окончательно, с учетом полученных выражений (5), (9), (14) формулы для функционалов (2), (3), (4) записываются в виде

$$N = -\frac{1}{\sin^2 \vartheta_1} \left[\frac{dS_1}{ds} \left(\frac{S_1}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right) + \frac{dS_2}{ds} \left(\frac{S_2}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right) + \frac{dS_3}{ds} \left(\frac{S_3}{\sigma} \cos \vartheta_1 - \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right) \right],$$

$$P = \frac{S_1 \frac{dS_1}{ds} + S_2 \frac{dS_2}{ds} + S_3 \frac{dS_3}{ds}}{S_1 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} + S_2 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} + S_3 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds}},$$

$$Q = \frac{1}{\sigma \sin \vartheta_1} \left[\frac{dS_1}{ds} \left(S_3 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} - S_2 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} \right) + \frac{dS_2}{ds} \left(S_1 \frac{d\mathcal{E}_3}{ds} - S_3 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} \right) + \frac{dS_3}{ds} \left(S_2 \frac{d\mathcal{E}_1}{ds} - S_1 \frac{d\mathcal{E}_2}{ds} \right) \right].$$

Полученные формулы позволяют по экспериментальным данным для координат вектора деформаций $\mathcal{E}_1(s)$, $\mathcal{E}_2(s)$, $\mathcal{E}_3(s)$ и координат вектора напряжений $S_1(s)$, $S_2(s)$, $S_3(s)$ и их производным по длине дуги s траектории деформирования найти

функционалы N , P , Q . В скалярной форме определяющее соотношение (1) с учетом полученных выражений имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{ds} &= N \frac{d\Theta_1}{ds} + (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_1}{\sigma} + \frac{Q}{\sigma \sin \vartheta_1} \left(S_3 \frac{d\Theta_2}{ds} - S_2 \frac{d\Theta_3}{ds} \right), \\ \frac{dS_2}{ds} &= N \frac{d\Theta_2}{ds} + (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_2}{\sigma} + \frac{Q}{\sigma \sin \vartheta_1} \left(S_1 \frac{d\Theta_3}{ds} - S_3 \frac{d\Theta_1}{ds} \right), \\ \frac{dS_3}{ds} &= N \frac{d\Theta_3}{ds} + (P - N) \cos \vartheta_1 \frac{S_3}{\sigma} + \frac{Q}{\sigma \sin \vartheta_1} \left(S_2 \frac{d\Theta_1}{ds} - S_1 \frac{d\Theta_2}{ds} \right)\end{aligned}\quad (16)$$

Несомненное достоинство данной формы определяющих соотношений (1), (16), что при $Q = 0$ она включает, как показано В.Г. Зубчаниновым [4], все известные варианты гипотезы компланарности (теория пластического течения, деформационная теория пластичности, модель нелинейно-упруго материала).

Результаты. Далее, на рисунках 2-8 представлены результаты обработки экспериментальных данных [4, табл. 9.4] для пространственной винтовой траектории постоянной кривизны и кручения, которая была реализована в трехмерном девиаторном пространстве деформаций на цилиндрической стальной тонкостенной оболочке в условиях плоского напряженного состояния и комбинированного воздействия осевой силы, крутящего момента и внутреннего давления. Выход на криволинейную часть траектории осуществлялся растяжением образца до значения $\Theta_1 = 0,92\%$, затем без излома реализовано три с половиной витка винта при увеличивающемся значении Θ_2 . Шаг винта в направлении Θ_2 составил $a = 0,25\%$, а радиус следа винтовой траектории на плоскости $\Theta_1 - \Theta_3$ был равен $R = 0,5\%$. Координаты центра кривизны винтовой плоскости $\Theta_1 - \Theta_3$ были равны: $\Theta_1^0 = 0,92\%$, $\Theta_3^0 = R = 0,5\%$, то есть центр кривизны не совпадал с началом координат, такая траектория называется «смещенным» винтом.

Для вычисления производных $\frac{d\Theta_i}{ds}$, $\frac{dS_i}{ds}$ ($i = 1, 2, 3$) по экспериментальным данным в [4], например, предлагается численное дифференцирование равноотстоящих точек при предварительном сглаживании экспериментальных данных на основе метода наименьших квадратов. В данной работе предлагается найти и использовать хорошо соответствующие экспериментальным данным аналитические функции и продифференцировать их. Для координат вектора деформаций было принято

$$\Theta_1 = \Theta_1^0 + R \sin \varphi, \quad \Theta_2 = b \cdot \varphi = \frac{a}{2\pi} \cdot \varphi, \quad \Theta_3 = R - R \cos \varphi,$$

где $b = a/2\pi$, φ – полярный угол на плоскости $\Theta_1 - \Theta_3$, отсчитываемый от точки начала винта. Задаваясь углом φ можно найти длину дуги траектории деформирования

$$s = s_0 + \sqrt{R^2 + b^2} \cdot \varphi,$$

где $s_0 = \Theta_1^0 = 0,92\%$ – значение длины дуги в начальной точке винтовой траектории. Тогда

$$\frac{d\Theta_1}{ds} = R \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds}, \quad \frac{d\Theta_2}{ds} = b \frac{d\varphi}{ds}, \quad \frac{d\Theta_3}{ds} = R \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds},$$

$$\text{где } \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + b^2}}.$$

Графики зависимостей координат вектора деформаций от длины дуги траектории деформирования s представлены на рисунках 2-4. Экспериментальные точки на рисунках обозначены затупшеванными кружками.

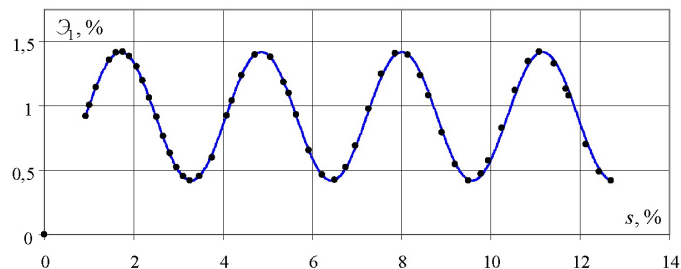


Рис. 2. Диаграмма зависимости $\Theta_1 - s$

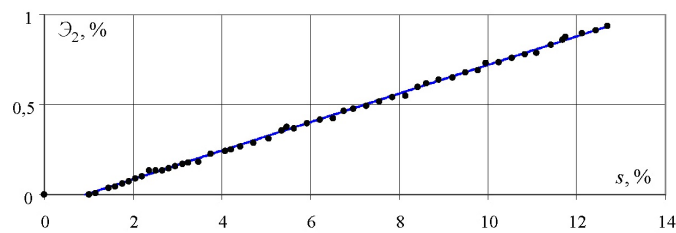


Рис. 3. Диаграмма зависимости $\Theta_2 - s$

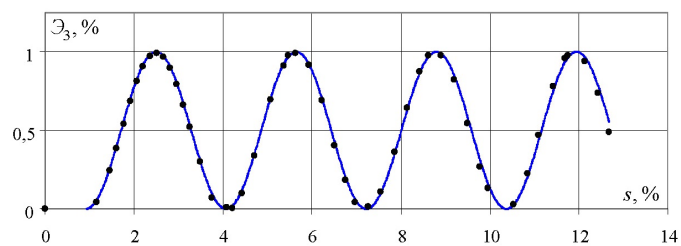


Рис. 4. Диаграмма зависимости $\Theta_3 - s$

Для координат вектора напряжений принимались следующие функции

$$S_1 = 40 + 340 \sin(\varphi + 0, 6), \quad S_3 = -10 + 360 \sin(\varphi - 0, 9),$$

$$S_2 = 40 + 700(s - s_0) + 25 \sin(\varphi - 0, 8) - 35 \sin(2\varphi + 0, 6).$$

Тогда производные

$$\frac{dS_1}{ds} = 340 \cos(\varphi + 0, 6) \frac{d\varphi}{ds}, \quad \frac{dS_3}{ds} = 360 \cos(\varphi - 0, 9) \frac{d\varphi}{ds},$$

$$\frac{dS_2}{ds} = 700 + 25 \cos(\varphi - 0, 8) \frac{d\varphi}{ds} - 70 \cos(2\varphi + 0, 6) \frac{d\varphi}{ds}.$$

Графики зависимостей координат вектора напряжений от длины дуги траектории деформирования представлены на рисунках 5-7. Полученные функции хорошо согласуются с данными эксперимента на установившемся участке винтовой траектории при $s > 1,5\%$.

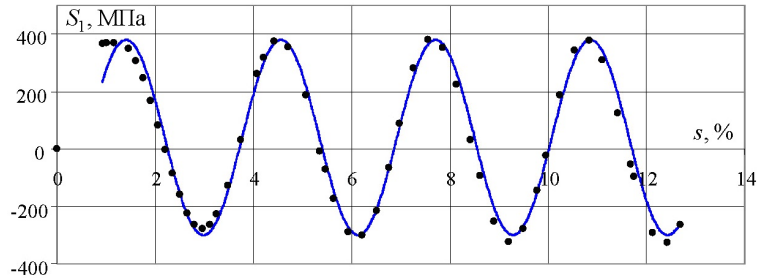


Рис. 5. Диаграмма зависимости $S_1 - s$

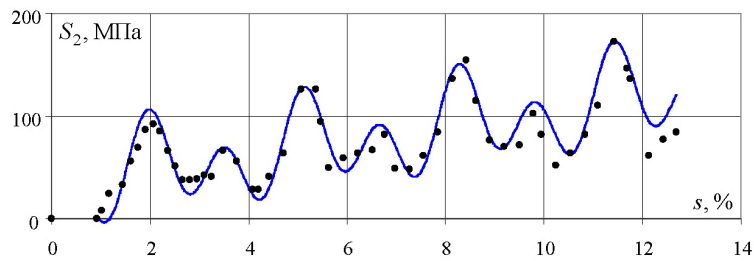


Рис. 6. Диаграмма зависимости $S_2 - s$

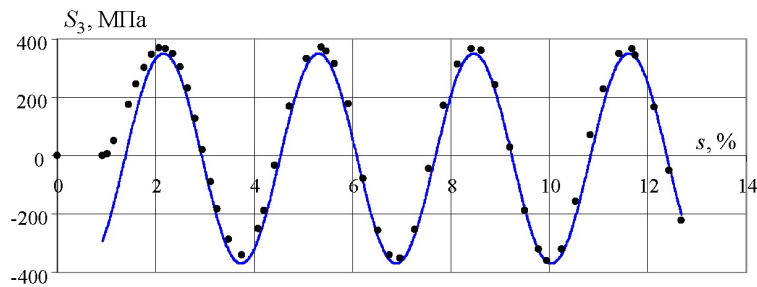


Рис. 7. Диаграмма зависимости $S_3 - s$

Графики зависимостей посчитанных по формулам (2), (3), (4) функционалов процесса N , P , Q представлены на рис. 8.

Из рис. 8 видно, что зависимости функционалов носят колебательный характер, при этом явно прослеживается их периодичность. Данные графики нужны для решения важной задачи построения универсальных аппроксимаций функционалов.

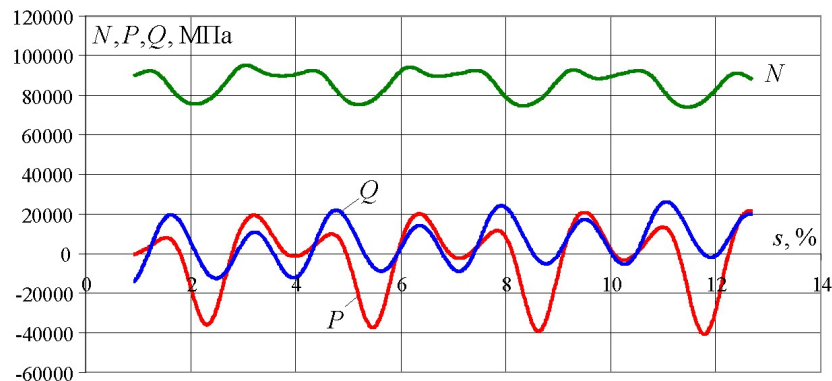


Рис. 8. Функционалы N , P , Q в зависимости от s

Таким образом, представленная в статье методика определения функционалов теории упругопластических процессов для плоского напряженного состояния и трехмерных винтовых траекторий деформирования может быть использована для обработки экспериментальных данных и построения аппроксимаций функционалов пластичности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А. А. О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред // Прикладная математика и механика. 1954. Т. 18. № 6. С. 641-666.
- [2] Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 273 с.
- [3] Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 310 с.
- [4] Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
- [5] Alekseev A., Zubchaninov V., Gultiaev V., Alekseeva E. Modeling of elastoplastic deformation of low-carbon steel along multi-link plane strain trajectories // AIP Conference Proceedings 2371, 020001 (2021) <https://doi.org/10.1063/5.0059630>
- [6] Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гультияев В.И., Алексеева Е.Г. Процессы сложного нагружения конструкционной стали по пятизвенной кусочно-ломаной траектории деформирования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 61. С. 32–44. doi: 10.17223/19988621/61/4
- [7] Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gultiaev V.I., Alekseeva E.G. Modeling of elastoplastic deformation of structural steel by a trajectory containing three circles touching internally // Materials Physics and Mechanics. 2019. vol. 42. № 5. С. 528-534.
- [8] Пелешко В.А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 2: Идентификация и верификация // Изв. РАН. МГТ. 2016. № 1. С. 110-135. DOI: 10.3103/S0025654416010106
- [9] Молодцов И.Н., Бабаева Д.О. Некоторые вопросы верификации теории упругопластических процессов при сложном нагружении // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2016. № 3. С. 98-105.
- [10] Зубчанинов В.Г., Субботин С.Л., Алексеев А.А. Учет упрочнения в расчетах процессов сложного упругопластического нагружения // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2010. № 3. С. 207-212.
- [11] Зубчанинов В.Г. Общая математическая теория пластичности и постулаты макроскопической определенности и изотропии А.А. Ильюшина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2018. – № 5 – С. 29-46. DOI: 10.3103/S0027133018050011

- [12] Ленский В. С., Машков И. Д. Проверка законов в трехмерном пространстве девиатора деформаций // Упругость и неупругость. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971. № 2. С. 58-166.
- [13] Gulyaev V.I., Alekseev A.A., Savrasov I.A., Subbotin S.L. Experimental verification of the isotropy postulate on orthogonal curved trajectories of constant curvature // Lecture Notes in Civil Engineering. 2021. Т. 151 LNCE. С. 315-321.
- [14] Гультяев В.И., Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Саврасов И.А. Проверка постулата изотропии при сложном кинематическом нагружении материала сталь 45 по траекториям деформирования в виде полукружностей // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 4 (50). С. 16-24.
- [15] Зубчанинов В.Г. Об определяющих соотношениях теории упругопластических процессов // Прикладная механика, 1989. Т. 25. № 5. С. 3–12.

S. L. Subbotin, A. A. Alekseev

**CONCRETIZATION OF GENERALIZATION OF THE COPLANARITY
HYPOTHESIS FOR ELASTIC-PLASTIC PROCESSES IN A
THREE-DIMENSIONAL SPACE BY A.A. ILYUSHIN**

Tver State Technical University, Tver

Abstract. One of the forms of the three-term constitutive relations of the theory of elastic-plastic processes is considered and a method for determining the functionals of the theory of elastic-plastic processes for plane stress state and three-dimensional helical strain trajectories by selecting analytical functions corresponding to experimental data is presented. Concretized formulas for determining functionals from experimental data for the coordinates of stress and strain vectors and their derivatives along the length of the arc of the strain trajectory are given. The results of calculating the plasticity functionals for a three-dimensional helical strain trajectory are presented in a visual graphical form.

Keywords: theory of elastic-plastic processes, plasticity, coplanarity hypothesis, plasticity functionals.

REFERENCES

- [1] И'lyushin A.A. On the Relation between Stresses and Small Strains in Continuum Mechanics // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1954. Т. 18. № 6. pp. 641-666. (in Russian)
- [2] И'lyushin A.A. Plastichnost'. Plasticity. Bases of the General Mathematical Theory. Moscow: Izdatelstvo AS USSR, 1963, 273 p. (in Russian)
- [3] И'lyushin A.A. Continuum Mechanics. Moscow: Izdatelstvo MSU, 1990, 310 p. (in Russian)
- [4] Zubchaninov V.G. Mechanics of processes in plastic environments. Moscow: Fizmatlit, 2010, 352 p. (in Russian)
- [5] Alekseev A., Zubchaninov V., Gultiaev V., Alekseeva E. Modeling of elastoplastic deformation of low-carbon steel along multi-link plane strain trajectories // AIP Conference Proceedings 2371, 020001 (2021) <https://doi.org/10.1063/5.0059630>

Subbotin Sergey Lvovich

e-mail: sbtn@yandex.ru, Doctor of Technical Sciences, Professor, Tver State Technical University, Tver

Alekseev Andrey Alekseevich

e-mail: alexeev@bk.ru, Ph. D. in Technical Sciences, Ass. Professor, Tver State Technical University, Tver

- [6] Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gultiaev V.I., Alekseeva E.G. The processes of a complex loading of structural steel in a fivelink piecewise polygonal strain path // *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2019. Vol. 61. pp. 32-44. doi: 10.17223/19988621/61/4
- [7] Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gultiaev V.I., Alekseeva E.G. Modeling of elastoplastic deformation of structural steel by a trajectory containing three circles touching internally // *Materials Physics and Mechanics*. 2019. vol. 42. № 5. С. 528-534.
- [8] Peleshko V.A. Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading part 2: Identification and verification // *Mechanics of Solids*, 2016, Vol. 51, Issue 1, pp 91–113. doi: 10.3103/S0025654416010106
- [9] Molodtsov I.N., Babaeva D.O. Some problems of verification of plastic-elastic complex loading processes // *Engineering and Automation Problems*. 2016. № 3. pp. 98-105.
- [10] Zubchaninov V.G., Subbotin S.L., Alekseev A.A. Accounting for hardening in the calculation of processes of complex elastoplastic loading // *News of the Tula state university. Technical sciences*. 2010. №. 3. pp. 207-212.
- [11] Zubchaninov V.G. The General Mathematical Theory of Plasticity and the Il'yushin Postulates of Macroscopic Definability and Isotropy // *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2018, Volume 73, Issue 5, pp 101–116. doi:10.3103/S0027133018050011
- [12] Lensky V.S., Mashkov I.D. Proverka zakonov v trekhmernom prostranstve deviatora deformatsii // *Uprugost' i neuprugost'*. Moscow: MSU, 1971. № 2, pp. 158-166.
- [13] Gulyaev V.I., Alekseev A.A., Savrasov I.A., Subbotin S.L. Experimental verification of the isotropy postulate on orthogonal curved trajectories of constant curvature // *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2021. T. 151 LNCE. C. 315-321.
- [14] Gultiaev V.I., Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Savrasov I.A. Verification of isotropy postulate under complex kinematic loading of steel 45 along the strain trajectories as semicircles // *Vestnik Chuvashskogo Gosudarstvennogo Pedagogicheskogo Universiteta im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika Predel'nogo Sostoyaniya*. 2021. № 4 (50). pp. 16-24.
- [15] Zubchaninov V.G. On the constitutive relations of the theory of elastic-plastic processes // *Prikladnaia matematika i mekhanika*, 1989. V. 25. №. 5. pp. 3–12.