Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1 (51). С. 110–114

А. Н. Спорыхин

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. На основе модели упрочняющегося упругопластического тела исследовано напряженно-деформированное состояние кусочно-неоднородного сферического тела под действием нагрузок, постоянной внешней, и зависящей от времени внутренней. Получены точные аналитические решения для полей напряжений и перемещений в упругой, вязкой и пластической областях сферического тела. .

Ключевые слова: сферическое тело, упругость, вязкость, пластичность, упрочнение, динамическая нагрузка.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.010

УДК: 539.3

Известно [1-3], что сферические оболочки являются элементами различных конструкций, используемых в технологических сооружениях, которые могут быть подвержены воздействию динамических нагрузок. Потому расчет их поведения при воздействии динамических нагрузок имеет большое значение.

В настоящей работе в квазистатической постановке рассматривается деформирование сферической вязкоупругой оболочки с упругопластическим заполнителем [4] толщины h. по контуру полости радиуса a, равномерно распределена нагрузка P, а по внешнему контуру радиуса b, нагрузка p, выражения для которых имеют вид:

$$P = P_0 e^{\hat{a}}$$

где $\hat{a}''$ – известная константа.

Напряженно деформированное состояние заполнителя в упругой области в осесимметричном случае ($\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$) в сферической системе координат (r, θ, φ) определяется уравнением равновесия:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \tag{1}$$

Спорыхин Анатолий Николаевич
`e-mail`: vasya@mathd.vsu.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 17.04.2022

закон Гука, условием несжимаемости и соотношениями Коши. Решая эту систему уравнений находим:

$$w = \frac{A_1}{r^2}, \sigma_r = -4\mu_1 \frac{A_1}{r^3} + A_2, \sigma_\theta = 2\mu_1 \frac{A_1}{r^3} + A_2 \tag{2}$$

Из условия отсутствия объемного расширения в пластической области включения и соотношений Коши получаем:

$$\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = \frac{dw}{dr} + 2\frac{w}{r} = 0$$

откуда

$$\varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_r}{2}, w = \frac{B_1}{r^2} \tag{3}$$

Из ассоциированного закона пластического течения [2,3]

$$e_{ij}^p = \left(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p\right) \tag{4}$$

следует

$$S_\theta = S_\varphi, S_\theta = -\frac{S_r}{2}$$

Функция нагружения [2,3]:

$$\left(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p\right)\left(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p\right) = k^2 \tag{5}$$

принимает вид:

$$(S_r - c\varepsilon_r^p)^2 = k^{*2}, k^* = \sqrt{\frac{2}{3}}k \tag{6}$$

Из соотношений

$$\varepsilon_r^e = \varepsilon_r - \varepsilon_r^p; \varepsilon_r = \frac{dw}{dr}, \varepsilon_\theta = \frac{w}{r}, S_r = 2\mu\left(\varepsilon_r - \varepsilon_r^p\right)$$

получаем

$$S_r = 2\mu\left(\frac{2B_1}{r^3} + \varepsilon_r^p\right) \tag{7}$$

Из соотношений (6) и (7) имеем

$$\varepsilon_r^p = \frac{1}{2\mu + c}\left(k^* + \frac{4\mu B_1}{r^3}\right) \tag{8}$$

Вычисляя

$$\sigma_r - \sigma_\theta = S_r - S_\theta = -3\mu\left(\frac{2B_1}{r^3} + \varepsilon_r^p\right)$$

из уравнения (1) находим поле напряжений в пластической области включения

$$\sigma_r = -2\mu\left[3k^*\frac{1}{2\mu+c}\ln(r) + 2B_1\left(1-\frac{2\mu}{2\mu+c}\right)\frac{1}{r^3}\right] + B_2 \qquad (9)$$

$$\sigma_\theta = -3\mu k^*\frac{1}{2\mu+c}\left(1+2\ln(r)\right) + 2\mu B_1\left(1-\frac{2\mu}{2\mu+c}\right)\frac{1}{r^3} + B_2$$

Напряженно-деформированные состояния несжимаемой вязкоупругой оболочки модели тела Кельвина-Фоихта [5] в осесимметричном случае, определяется уравнением равновесия и соотношениями Коши. Решая эту систему уравнений находим:

$$\sigma_r = -\frac{4\left(\mu_2\mathrm{C}_1 + \eta_2\dot{\mathrm{C}}\right)}{r^3} + C_2, \quad \sigma_\theta = \frac{2\left(\mu_2\mathrm{C}_1 + \eta_2\dot{\mathrm{C}}\right)}{r^3} + C_2, \qquad (10)$$

$$w = \frac{\mathrm{C}_1}{r^2}, \varepsilon_r = -\frac{2\mathrm{C}_1}{r^3}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{\mathrm{C}_1}{r^3}, \quad \dot{\mathrm{C}} = \frac{dC_1}{dt}$$

для определения неизвестных интегрирования $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ и радиуса γ поверхности раздела областей упругого и пластического деформирования заполнителя имеем:

– граничные условия

$$\sigma_r^p = -P_0 e^{\hat{a}} \qquad (11)$$

$$\sigma_r^b = -p_0, \quad \text{при} \quad r = b$$

– условия сопряжения

$$w^e = w^p, \quad \sigma_r^e = \sigma_r^p, \quad \sigma_\theta^e = \sigma_\theta^p \quad \text{при} \quad r = \gamma \qquad (12)$$

– условия контакта (жесткое сцепление) оболочка – включение

$$w^b = w^e, \quad \sigma_r^b = \sigma_r^e \quad \text{при} \quad r = a + h \qquad (13)$$

– начальные условия

$$\gamma = a, \varepsilon_r^b = 0 \quad \text{при} \quad t = t_* \qquad (14)$$

Откуда находим:

$$
\begin{gathered}
C_1 = A_1 = B_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{P_0 e^{\hat{a}t}}{4\mu_2(\alpha_1 + \hat{a})} + C_1^* e^{-\alpha_1 t} \\
\alpha_1 = \frac{1}{\eta_2}\left\{\mu_2 + \left[\mu_1\left(\frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{(a+h)^3}\right) + \mu\left(1 - 2\mu E\right)\left(\frac{1}{\gamma^3} - \frac{1}{a^3}\right)\right]\right\} \\
\alpha_2 = \frac{1}{4\eta_2}\left\{p_0 + 6\mu k^* E\left(\ln(a) - \ln(\gamma)\right)\right\}, \quad E = \frac{1}{2\mu + c} \\
C_1^* = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{P_0 e^{\hat{a}t_*}}{4\mu_2(\alpha_1 + \hat{a})}\right) e^{\alpha_1 t_*}, \quad C_2 = -p_0 + \frac{C_0}{b^3} \\
A_2 = -\frac{C_0}{(a+h)^3} - \frac{4\mu_1}{(a+h)^3} A_1 + C_2 \\
B_2 = 2\mu\left[3k^* E ln\left(a\right) + 2C_1\left(1 - 2\mu E\right)\frac{1}{a^3}\right] - P_0 e^{\hat{a}t} \\
C_0 = 4\left(\mu_2 C_1 + \eta_2 \dot{C}\right)
\end{gathered}
\tag{15}
$$

и уравнение для определения радиуса упругопластической границы γ.

$$
\alpha_3^* \dot{C} + \left\{\frac{mu_2}{\nu_2}\alpha_3^* - \frac{4\mu_1}{(a+h)^3} - 4\mu(1 - 2\mu E)\frac{1}{a^3} - \right. \tag{16}
$$

$$
\left. -\frac{2}{\gamma^3}\left[\mu_1 - \mu\left(1 - 2\mu E\right)\right]\right\} C_1 + 3\mu k^* E\left(1 + 2\ln(\gamma)\right) - 6\mu k^* E ln\left(a\right) - p_0 - P_0 e^{\hat{a}t} = 0
$$

где

$$
\alpha_3^* = 4\eta_2\left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{(a+h)^3}\right)
$$

Полагая в уравнении (16) $\gamma = a$ при $t = t_*$, приходим к уравнению

$$
\alpha_2^* \alpha_3^* + \left[1 + \frac{\alpha_3^*\left(\hat{a} - \alpha_1^*\right)}{4\mu_2\left(\hat{a} + \alpha_1^*\right)}\right] P_0 e^{\hat{a}t_*} - p_0 + \frac{3\sqrt{\frac{2}{3}}\mu k^*}{2\mu + c} = 0
$$

определяющему нагрузки, при заданных геометрических и физикомеханических параметрах, при которых возникает на внутренней поверхности сферического тела пластическое состояние.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Спорыхин А. Н., Шашкин А. И. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики и горных пород. М: Физматлит, 2004. 232 с.

[2] Спорыхин А. Н. Динамическое деформирование полупространства со сферической полостью // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2019. №4 (42). С. 21-24

[3] Спорыхин А. Н. Неконсервативные задачи трехмерной теории неупругой устойчивости в геомеханике. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2015. 372 с.

[4] Ивлев Д. Д. , Быковцев Т.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.

[5] Рейнер М. Реология. М.: Наука, 1965. 223 с.

A. N. Sporihin

DYNAMIC DEFORMATION OF A PIECEWISE INHOMOGENEOUS SPHERICAL BODY

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. Based on the model of a hardening elastic-plastic body, the stress-strain state of a piecewise inhomogeneous spherical body under the action of constant external and time-dependent internal loads is investigated. Exact analytical solutions for stress and displacement fields in elastic, viscous and plastic regions of a spherical body are obtained.

Keywords: spherical body, elasticity, viscosity, plasticity, hardening, dynamic load.

REFERENCES

[1] Sporykhin A. N. , Shashkin A. I. Stability of equilibrium of spatial bodies and problems of mechanics and rocks. M: Fizmatlit, 2004, 232 p.
[2] Sporykhin A. N. Dynamic deformation of a half-space with a spherical cavity. Bulletin of the I.Ya. Yakovlev ChSPU. Series: Mechanics of the limit state. 2019. No.4 (42). pp. 21-24
[3] Sporykhin A. N. Nonconservative problems of the three-dimensional theory of inelastic stability in geomechanics. Voronezh: VSU Publishing House, 2015. 372 p.
[4] Ivlev D. D., Bykovtsev T. I. Theory of hardening plastic body. M.: Nauka, 1971. 231 p.
[5] Rainer M. Rheology. M.: Nauka, 1965. 223 p.

Anatoly N. Sporykhin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia