Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1 (51). С. 115–126

Л. В. Левина, В. Б. Пеньков, Е. А. Новиков

СТРОГИЕ ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ

Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия

Аннотация. Рассматриваются краевые задачи для линейной термоупругой изотропно-однородной среды. Состояние среды подчинено уравнениям Дюамеля-Неймана. В случае, когда характеристики напряженно-деформированного состояния (НДС) на поверхности тела не связаны в граничных условиях (ГУ) с температурными факторами, задача декомпозируется на последовательность неоднородных задач теплопроводности и теории упругости с известной коррекцией объемных сил в уравнениях равновесия. Особое внимание обращено на способ построения частного решения задачи теплопроводности. Метод функций Грина представляет частные решения таких задач в сингулярной форме, что при произвольной геометрической конфигурации тела не позволяет выписывать строгое аналитическое решение. Предложен подход, позволяющий при регулярном описании тепловых источников многочленом конечного порядка получать частное решение строго. След такого решения на границе позволяет скорректировать ГУ задачи теплопроводности и построить численно-аналитическое решение средствами метода граничных состояний (МГС). Аналогичный подход реализован для строгого частного решения задачи линейной упругости. Построенное температурное поле вносит регулярную добавку в объемные силы второго шага – задачу теории упругости. Ее решение также эффективно строится применением МГС. Совокупность двух этих шагов позволяет выписывать строго частное решение для задач линейной термоэластостатики. .

Ключевые слова: термоупругость, декомпозиция задачи термоупругости, строгое решение, частное решение уравнения Пуассона, частное решение неоднородной краевой задачи, метод граничных состояний, МГС, опорный базис.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.011

УДК: 539.3

Левина Любовь Владимировна
`e-mail:` satalkina_lyubov@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия,
Пеньков Виктор Борисович
`e-mail:` vbpenkov@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия,

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта № 19-41-480003.

Поступила 10.05.2022

Введение

Реальные процессы деформирования упругих тел сопровождаются изменением поля температуры из-за рассеяния механической энергии и наоборот: изменение температуры порождает удлинением упругих волокон, вызывая дополнительные составляющие в тензорах деформаций и напряжений [1, 2]. В общем случае параметры упругости являются функциями температуры. Поэтому характеристики упругого состояния (перемещения $\mathbf{u}$, деформации $\hat{\varepsilon}$, напряжения $\hat{\sigma}$) и температурное поле T связаны между собой в определяющих соотношениях среды и составляют в целом нелинейную задачу определения термоупругого внутреннего состояния $\xi = \xi^T \cup \xi^E$, $\xi^T = \{T, \nabla T\}$, $\xi^E = \{\mathbf{u}, \hat{\varepsilon}, \hat{\sigma}\}$ тела V при различных вариантах граничных условиях на его поверхности ∂V.

При решении практических задач уровень температуры T удобно отсчитывать не от абсолютного нуля, а от некоторого значения T_0, полагая, что диапазон изменения температуры в окрестности T_0 невелик. В этом случае удобно пренебречь слабым изменением параметров определяющих соотношений термоупругой среды, считая их постоянными. При таком подходе возможна декомпозиция общей постановки на задачу теплопроводности о восстановлении состояния ξ^T и затем состояния ξ^E в соответствии с граничными условиями. При этом предполагается также, что ГУ в каждой из этих задач между собой "не завязаны".

Основные современные вычислительные методы (метод конечных элементов – МКЭ, метод граничных элементов – МГЭ) реализованы во многих формах в вычислительных системах, опираются на традиционный объект распространенных вычислительных средств – "число". Они эффективно используются и в настоящее время, но требуют пересчета разрешающей системы уравнений и его решения при изменении любого параметра исследуемого объекта (ресурсозатратность). Даже в линейных случаях результаты решений не гарантируют истинность, поэтому на уровне тестовых задач приходится выполнять сопоставление с решениями, полученными иными средствами.

Метод граничных состояний [3] по определению дает решение, тождественно удовлетворяющее определяющим соотношениям среды, а о погрешности решения можно судить по величине невязки ГУ с соответствующими характеристиками построенного граничного состояния. Подход Треффца [4] при формировании базиса аппроксимирующих функций в разрешающем уравнении с дальнейшей минимизацией некоторого функционала по границе тела может дать похожий эффект, но требует затем восстановления напряженно-деформированного состояния (НДС) через граничное состояние. Это предполагает дополнительные действия, связанные с вычислением поверхностного интеграла при определении перемещения в каждой точке внутри тела и т. д. (см. формулу Сомильяна), поскольку изоморфизм состояний внутри тела и базисных элементов на границе не обеспечивается. В МГС изоморфизм установлен изначально и НДС тела определяется тривиально. Также весьма существенным является факт, состоящий в том, что для постановки краевой задачи не требуется строить разрешающее уравнение относительно какой-либо разрешающей функции (вектора функций).

Новиков Евгений Александрович
e-mail: 89513027802@mail.ru, аспирант, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.

ГУ формируются непосредственно в терминах номинальных характеристик граничного состояния: перемещения, поверхностные усилия, их комбинации. В нелинейных случаях основным средством анализа напряженно-деформированного состояния трехмерных тел является метод конечных элементов. Для выписывания приближенных аналитических решений используются методы аппроксимации, коллокаций [5]. Некоторые результаты в этой области достигнуты для состояний и тел, описываемых меньшим количеством переменных (симметрия, плоские задачи, оболочки [6]. Делаются попытки модификации моделей нелинейной теории [7].

В МГС понятие внутреннего состояния среды является определяющим, ориентирующемся на современные вычислительные средства, оперирующие компьютерными алгебрами и позволяющие выписывать решения в численно-аналитической и даже аналитической форме, содержащей все параметры задачи [8]. Поэтому целью работы является построение метода, реализующего решение задач теплопроводности и термоупругости при заданном регулярном распределении теплоисточников $Q(x)$ и объемных сил $\mathbf{X}(x),\ x = \{x_i\}_3 \in R^3$ по области тела V в строгой конечной форме, тождественно удовлетворяющей уравнению теплопроводности. “Регулярность” означает описание соответствующей функции многочленом конечного порядка.

Далее, при решении задачи упругого равновесия полученное распределение температуры $T(x)$ также регулярное, корректирует неоднородную составляющую в определяющих уравнениях линейной изотропной теории упругости однородного тела. Эффективные алгоритмы построения частного решения этой задачи существуют [9,10].

Отметим также, что для учета слабого изменения параметров термоупругой среды от температуры эффективна модификация МГС до уровня МГСВ [11,3].

1. Линейная изотропная термоупругость в классической постановке. Линейное упругое состояние среды предполагает наличие малых деформаций (тензор $\hat{\varepsilon}$), связанных с вектором перемещения $\mathbf{u}$ соотношениями Коши:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T\right], \tag{1}$$

где “набла” ∇ символизирует взятие градиента.

В предположении об изотропии материала, относительно малом изменении температуры и, как следствие, о постоянстве параметров упругости Ламе $\lambda,\ \mu$, температуропроводности κ и температурного расширения α тензор напряжений $\hat{\sigma}$ выражается через тензор деформаций $\hat{\varepsilon}$ и температуру T в соответствии с законом Дюамеля – Неймана [12]

$$\hat{\sigma} = \lambda\,\theta\,\hat{\mathbf{E}} + 2\,\mu\,\hat{\varepsilon} - (3\,\lambda + 2\,\mu)\,\alpha\,T\,\hat{\mathbf{E}}, \tag{2}$$

где $\hat{\mathbf{E}}$ – единичный тензор, $\theta = I_1(\hat{\varepsilon})$ - первый инвариант тензора деформаций.

Распределение температуры отвечает уравнению теплопроводности

$$\Delta T = -\frac{1}{\kappa}\,Q(x),\ \ x\in V\subset R^3. \tag{3}$$

Распределение тепловых источников $Q(x)$ по области V предполагаем имеющим регулярный характер, т.е. оно описывается полиномом от декартовых координат $x = \{x_1, x_2, x_3\}$и продолжимо на границу ∂V тела.

Упругое равновесие деформируемой среды подчинено уравнению равновесия

$$div\,\hat{\sigma} + \mathbf{X} = 0, \tag{4}$$

где объемная сила $\mathbf{X} = \mathbf{X}(x)$ также имеет регулярный характер.

Совокупность определяющих соотношений (1)–(4) составляет линейный оператор над элементами пространства Ξ внутренних состояний термоупругой равновесной среды. Под внутренним состоянием удобно понимать избыточный набор характеристик

$\xi = \{\mathbf{u}, \hat{\varepsilon}, \hat{\sigma}, T, \nabla T\} \in \Xi$ согласованных в определяющих соотношениях. След внутреннего состояния ξ на границе ∂V тела V понимаем как граничное состояние $\gamma = \{\mathbf{u}, \mathbf{p}, T, \frac{dT}{d\mathbf{n}}\} \in \Xi$, где $\mathbf{p}$– есть поверхностное усилие, отвечающее $\hat{\sigma}$.

Изоморфизм состояний $\xi \leftrightarrow \gamma$ порождает изоморфизм соответствующих пространств состояний $\Xi \leftrightarrow \Gamma$. Эти пространства полные, всюду плотные. Введение скалярных произведений

$$(\xi^1, \xi^2)_\Xi = \int\limits_V (\hat{\sigma}^1 \cdot\cdot\, \hat{\varepsilon}^2 + \rho^2\, \nabla T^1\, \cdot \nabla T^2)\, dV, \tag{5}$$

$$(\gamma^1, \gamma^2)_\Gamma = \int\limits_V (\mathbf{p}^1 \cdot\, \mathbf{u}^2 + \rho^2\, T^1\, \frac{dT^2}{d\mathbf{n}})\, dS, \tag{6}$$

где ρ^2 – любое положительное число, характеризует оба пространства как гильбертовы. Коммутативность обеих составляющих скалярного произведения и их равенство

$$(\xi^1, \xi^2)_\Xi = (\gamma^1, \gamma^2)_\Gamma \tag{7}$$

обеспечиваются принципом возможных перемещений и свойствами гармонических функций. Аппарат теории гильбертовых пространств применяется для определения однородной составляющей решения операторного уравнения после построения частного решения неоднородного уравнения при произвольных граничных условиях и соответствующей компенсации граничных условий.

В общем случае постановки линейных краевых задач термоупругости составляющие граничного состояния γ могут быть "завязаны" в ГУ между собой. Тогда декомпозиция краевой задачи на последовательность задач о теплопроводности (3) и затем о напряженно-деформированном состоянии (1), (2), (4) становится невозможной. Решение ξ в целом складывается из двух составляющих

$$\xi = \xi^\circ + \xi^* \quad , \tag{8}$$

где ξ^* есть частное решение неоднородной краевой задачи, компенсирующее заданные воздействия $Q(x)$. След γ^* состояния ξ^* на границе учитывается далее в качестве поправки в ГУ при построении решения однородной краевой задачи относительно ξ°.

Эффективным аппаратом решения второй задачи является метод граничных состояний, при использовании которого формируется счетный ортонормированный базис пространства Ξ (следовательно и Γ)

$$\{\xi^{(i)}\} = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, ..., \xi^{(k)}, ...) \subset \Xi, \quad (\xi^{(i)}, \xi^{(j)})_\Xi = (\gamma^{(i)}, \gamma^{(j)})_\Gamma = \delta_{i\,j},$$

где $\delta_{i\,j}$ – символ Кронекера. Решение ищется в виде ряда Фурье

$$\xi^\circ = \sum_{j \in N} c_j\, \xi^{(j)},\ c_j = (\gamma^\circ,\, \gamma^{(j)})_\Gamma. \tag{9}$$

В классических вариантах задач, когда ГУ являются элементами состояния γ^0, коэффициенты Фурье вычисляются рутинно через интегралы в (6). В случае смешанных задач существуют способы построения бесконечной системы уравнений (БСУ) относительно коэффициентов Фурье, в которой содержимое матрицы коэффициентов определяется только элементами базисов $\{\xi^{(i)}\}$, $\{\gamma^{(i)}\}$ и типом ГУ, а правые части еще несут информацию о ГУ.

Представим состояние ξ в виде объединения внутреннего температурного состояния $\xi^T = \{T,\, \nabla T\}$ и напряженно-деформированного состояния $\xi^E = \{\mathbf{u}, \hat{\varepsilon}, \hat{\sigma}\}$: $\xi = \xi^E \cup \xi^T$.

Соответственно разложим и изоморфные внутренним граничные состояния

$$\gamma = \gamma^E \cup \gamma^T, \quad \gamma^E = \{\mathbf{u}, \mathbf{p}\}, \gamma^T = \{T,\, \frac{dT}{d\mathbf{n}}\}.$$

Если составляющие γ^E и γ^T в ГУ не "завязаны" , то общая краевая задача декомпозируется на последовательность задач 1° и 2°.

1°. ***Задача теплопроводности*** для уравнения Пуассона (3) при заданных температурных ГУ (вообще произвольного вида) ее решение $\xi^T = \xi^{T\circ} + \xi^{T*}$ складывается из частного решения ξ^{T*} уравнения Пуассона (безотносительно к характеру ГУ) и решения уравнения Лапласа с ГУ, скорректированных относительно изначально заданных на величину поправки от ξ^{T*}.

Построение $\xi^{T\circ}$ средствами МГС кратко указано выше. Отличие состоит в том, что под скалярными произведениями здесь надо понимать свертки

$$\left(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}\right)_{\Xi} \equiv \int\limits_V \nabla T^{(i)} \cdot \nabla T^{(j)}\, dV = \int\limits_{\partial V} T^{(i)} \frac{dT}{d\mathbf{n}}^{(j)}\, dS \equiv \left(\gamma^{(i)}, \gamma^{(j)}\right)_{\Gamma} \quad . \tag{10}$$

Сложности связаны с выписыванием частного решения ξ^{T*} в аналитической форме. Известный результат [13] выражает температуру в произвольной точке области V в сингулярной форме через функции Грина. В общем случае это позволяет вычислить значение в сетке точек и использовать его для вычислений посредством компьютерных алгебр весьма неудобно. Ниже будет показан подход, позволяющий выписывать строгое аналитическое решение в конечной форме для регулярного типа распределения теплоисточников $Q(x)$ по области V произвольной формы.

2°. ***Задача термоупругого состояния*** при заданном распределении температуры $T(x)$ по области Vтела. Уравнение Дюамеля-Неймана преобразуется в форму уравнения Ламе

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{s}} = \lambda\, \theta\, \hat{\mathbf{E}} + 2\, \mu\, \hat{\varepsilon}, \\ &\hat{\mathbf{s}} = \hat{\sigma} + (3\lambda + 2\mu)\, \alpha\, T(x) \hat{\mathbf{E}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Соответствующим образом корректируется уравнение равновесия (4)

$$\begin{aligned} &div\, \hat{\mathbf{s}} + \mathbf{F} = 0, \\ &\mathbf{F}(x) = \mathbf{X}(x) - (3\lambda + 2\mu)\, \alpha\, \nabla T(x). \end{aligned} \tag{12}$$

Набор соотношений (1), (1.10), (1.11) совпадает по форме с традиционными определяющими соотношениями линейной изотропной теории упругости. Из него вытекают уравнения Ламе, общее решение которых позволяет строить решение краевых задач средствами МГС.

Таким образом, важным этапом в решении задачи термоупругости является построение строгого решения уравнения Пуассона безотносительно к граничным условиям.

2. Строгая форма частного решения уравнения теплопроводности при полиномиальных тепловых источниках. Полином произвольного порядка K есть линейная комбинация мономов порядка $k \in \{0, 1, ...K\}$. Решение уравнения (3) безотносительно к условиям на границе равно сумме решений для однородных многочленов для каждого k:

$$\xi^{T*} = \sum_{k=0}^{K} \chi_k \, \xi^{T*k}. \tag{13}$$

В силу однородности оператора Лапласа решение, отвечающее порядку k правой части уравнения является однородным многочленом порядка $k+2$. Перебирая конечный набор многочленов этого порядка, выписываем все им соответствующие правые части уравнения Пуассона. Линейно-зависимые однородные многочлены следует отбросить, формируя базис. Этому базису соответствует “опорный базис” решения, который эффективно строить, используя сортировочный алгоритм [10].

Соотношение между опорным базисом и базисом мономов порядка k можно представить в матричной форме через невырожденную матрицу коэффициентов $[c_{i\,j}]$. Ее обращение ставит в соответствие каждому моному правой части линейную комбинацию мономов порядка $k+2$, отвечающих за соответствующее решение уравнения Пуассона. Линейная комбинация с коэффициентами, описывающими однородный многочлен через мономы порядка k формирует решение, отвечающее однородному многочлену $P_k(x_1, x_2, x_3,)$ этого порядка в правой части.

Частное решение, отвечающее правой части уравнения и форме (13) есть

$$T^* = \sum_{k=0}^{K} \kappa_k \, P_k(x_1, x_2, x_3,). \tag{14}$$

Далее выписываются состояния ξ^{T*}, γ^{T*} и готовится информация по корректировке ГУ в соответствии с постановкой краевой задачи.

В качестве ***примера*** рассмотрим правую часть вида

$$-\frac{1}{\kappa} Q(x_1, x_2,\, x_3) = 3x_1(x_2 + x_3)^3 + 2\,x_1^3,$$

составленную из мономов порядка 3: $x_1^3,\ x_1\,x_2^2, x_1\,x_3^2,\ x_1\,x_2\,x_3$.

Сортировочный алгоритм подготовил опорный базис [5-]

$$T_i^* \in \{x_2^5,\, x_2^4\,x_3,\, x_2\,x_3^4,\, x_3^5,\, x_1\,x_3^4, x_1^4 x_3,\, x_1^5, x_1\,x_2^4,\, x_1^4 x_2, x_1 x_2^3 x_3\}.$$

Понятно, что этот список однозначно определяет соответствующие внутренние состояния: $T_i^* \to \xi_i^*$. 10 элементов опорного базиса выражаются через 10 многочленов третьего порядка. Обращение матрицы, связывающей эти мономы с мономами третьего порядка выполнялось в вычислительной системе Mathematica. Линейная комбинация опорных частных решений дала для температуры выражение в строгой форме

$$T^* = \frac{1}{2}\, x_1^3\, x_2^2 + \frac{1}{2} x_1^3\, x_3^2 + x_1^3\, x_2\, x_3.$$

По цепочке $T^*,\ \nabla T^* \to \gamma^*$ формируются выражения, отвечающие ГУ любого вида на границе тела, имеющего произвольную форму. Это позволяет внести коррекцию в ГУ, решить далее задачу теплопроводности относительно T° и выписать соответствующее внутреннее состояние ξ^T.

3. Строгая форма частного решения несвязанной задачи изотропной термоэластостатики. Пусть известно температурное поле $T(x_1, x_2, x_3)$ в уравновешенном линейно-упругом однородном изотропном теле, занимающем область $V \in R^3$ с границей ∂V. Упругое внутреннее состояние ξ^E определяется в соответствии с законом Дюамеля-Неймана (2) и по форме совпадает с обобщенным законом Гука в формулировке Ламе:

$$\hat{\mathbf{s}} \equiv \hat{\sigma} + (3\lambda + 2\mu)\ \alpha\ T\,\hat{\mathbf{E}} = \lambda\,\theta\,\hat{\mathbf{E}} + 2\,\mu\,\hat{\varepsilon}. \tag{15}$$

После представления уравнений равновесия через тензор упругих составляющих напряжений $\hat{\mathbf{s}}$ из уравнения равновесия получается аналогичная по форме зависимость :

$$div\ \hat{\mathbf{s}} = -\mathbf{X} + (3\,\lambda + 2\,\mu)\,\alpha\,\nabla T \equiv \mathbf{F}(x_1, x_2, x_3). \tag{16}$$

Будем полагать правую часть соотношения (16) конечным многочленом порядка K, являющимся линейной комбинацией векторов $\mathbf{P}_k$ из однородных многочленов порядков $k \in \{0, 1, ...K\}$:

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=1}^{K} \kappa_k\,\mathbf{P}_k(x_1, x_2, x_3,).$$

Эти "приведенные" объемные силы регулярны в Vвплоть до границы ∂V.

Решение системы уравнений, связывающих тензоры деформации, упругой составляющей напряжений $\hat{s}$ и уравнения равновесия (16) можно искать средствами МГС. Под внутренним состоянием тела понимается набор $\xi^E = \{\mathbf{u}, \hat{\varepsilon}, \hat{\mathbf{s}}\}$, раскладываемый на сумму $\xi^E = \xi^{E*} + \xi^{E0}$, где символом "$*$" помечено какое-нибудь частное решение, отвечающее неоднородной краевой задаче, а "0" соответствует однородной составляющей уравнений Ламе, являющихся следствием определяющих соотношений при ГУ, скорректированных с учетом "следа" на ∂V от ξ^{E*}.

Весьма важным и заслуживающим особого внимания является отыскание состояния ξ^{E*} в конечной аналитической форме. Проблема состоит в том, что общие решения Папковича–Нейбера, а также Аржаных–Слободянского [1, 12] неоднородной системы дифференциальных уравнений Ламе выписаны в конечном виде только для потенциальных функций $\mathbf{F}$. Способ построения численно-аналитического решения найден [9]. Ниже демонстрируется подход, позволяющий выписывать строгое аналитическое решение ξ^{E*} при полиномиальном описании вектора правой части.

Кратко, идея в построении опорного базиса для выписывания строгого решения состоит в следующем. Любой моном $w = x_1^\gamma\,x_2^\delta\,x_3^\beta$, $\gamma + \delta + \beta = k + 2$ может быть помещен в любую позицию одномономного вектора перемещений $\mathbf{u} \in \{\{w, 0, 0\}, \{0, w, 0\}, \{0, 0, w\}\}$. По цепочке $\mathbf{u} \to \hat{\varepsilon} \to \hat{s}$выписывается соответствующее варианту внутреннее состояние $\xi^{E*} = \{\mathbf{u}, \hat{\varepsilon}, \hat{\mathbf{s}}\}$. Набор всех возможных вариантов составляет "кластер k". Сортировочный алгоритм [10] позволяет рационально назначить базис мономов w, однозначно отвечающий базису мономов порядка k, участвующих в $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3)$. Связь базисов осуществляется через невырожденную матрицу, обращение которой позволяет выписывать внутреннее состояние, отвечающее конкретному моному порядка k, помещенному в любую позицию вектора правых частей. Поскольку любой полиномиальный вектор $\mathbf{F}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов, в каждом из которых моном помещен в какую-либо позицию, и каждому из таких вариантов соответствует уже известное внутреннее состояние, то соответствующая линейная комбинация позволяет выписать строгое решение для $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3)$.

Это и есть частное решение, не учитывающее никаких ограничений как на граничные условия, так и на форму границы.

Далее восстанавливается соответствующее ξ^{E*} граничное состояние $\gamma^{E*} = \{\mathbf{u}, \mathbf{p}\}$, где $\mathbf{p}$ – поверхностное усилие, отвечающее тензору $\hat{\mathbf{s}}$. Это состояние позволяет внести корректировку в ГУ, соответствующую исходной постановке краевой задачи. Решение краевой задачи относительно ξ^{E0} эффективно проводится средствами МГС. А именно, в соответствии с известными общими решениями однородной системы уравнений Ламе генерируется базис ξ^j пространства внутренних состояний $\Xi = \{\xi |\ \xi = \mathbf{u}, \hat{\varepsilon}, \hat{\sigma}\}$ и выполняется его ортогонализация на основе скалярных произведений

$$\left(\xi^1, \xi^2\right)_\Xi \equiv \int\limits_V \hat{\sigma}^1 \cdot\cdot\, \hat{\varepsilon}^2\, dV = \int\limits_{\partial V} \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{u}^2\, dS \equiv \left(\gamma^1, \gamma^2\right)_\Gamma. \tag{17}$$

Решение корректной краевой задачи представляется рядом Фурье

$$\xi = \sum_{j \in N} c_j\, \xi^j.$$

В частном случае основных задач коэффициенты Фурье c_j вычисляются рутинно. В первой основной задаче, когда на границе заданы поверхностные усилия $\mathbf{p}$ это $c_j = (\mathbf{p}^0, \mathbf{u}^j)_\Gamma$. В случае второй основной задачи (на границе удержаны перемещения $\mathbf{u}^0$) это $c_j = (\mathbf{p}^j, \mathbf{u}^0)_\Gamma$. В общем случае постановка сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно c_j, в которой структура невырожденной матрицы коэффициентов и их значения определяются типом ГУ и набором базисных элементов, а вектор правых частей несет конкретную информацию о значениях параметров ГУ.

В рассматриваемом случае после определения коэффициентов Фурье выписывается состояние $\xi^{E\,0} = \{\mathbf{u}^0, \hat{\varepsilon}^0, \hat{\mathbf{s}}^0\}$, а следом – реальное значение тензора напряжений

$$\hat{\sigma} = \hat{\mathbf{s}}^0 - (3\lambda + 2\mu)\ \alpha\ T\, \hat{\mathbf{E}}.$$

Совокупность характеристик внутреннего состояния $\xi = \{\mathbf{u}, \hat{\varepsilon}, \hat{\sigma}\}$ и составляет решение задачи теории упругости при заданном распределении температуры по области V.

Рассмотрим ***пример*** на предмет построения частного решения. Пусть распределение температуры по области V, занятой телом подчинено закону

$$T = -\frac{1}{2\,\alpha\,(3\lambda + 2\mu)}(x_1^2 + x_2^2)$$

и объемные силы имеют характер

$$\mathbf{X} = \{0, 0, (x_1^2 + x_2^2)(1 + x_3)\}.$$

Эти выражения для вектора $\mathbf{F}$дают представление

$$\mathbf{F} = \{x_1, x_2, (x_1^2 + x_2^2)(1 + x_3)\}.$$

Полиномиальные приведенные объемные силы имеют максимальный порядок $K = 3$. Для описания состояния рассматривались кластеры $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ и для каждого из них строились опорные базисы порядков $\{3, 9, 18, 30\}$ соответственно при помощи сортировочного алгоритма. Вектор **F**декомпозирован на мономные слагаемые

$$\mathbf{f_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1^2\, x_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2^2\, x_3 \end{pmatrix}.$$

Для каждого мономного базисного вектора получено внутреннее состояние (использована компьютерная алгебра системы Mathematica. Из-за необозримости выражений промежуточные выкладки не приводятся). Линейная комбинация состояний, отвечающих векторам $\mathbf{f}_i$, дала внутреннее состояние

$$\mathbf{u}^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{18}\, x_1^3 + \frac{1}{90}\, x_1^5 \\ -\frac{1}{18}\, x_2^3 + \frac{1}{90}\, x_2^5 \\ -\frac{1}{12}\,(x_1^3 + x_2^3) - \frac{1}{12}\,(x_1^4 + x_2^4) x_3 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\varepsilon}^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\, x_1^2 + \frac{1}{18}\, x_1^4 & 0 & -\frac{1}{6}\, x_1^3(1 + x_3) \\ 0 & -\frac{1}{6}\, x_2^2 + \frac{1}{18}\, x_2^4 & -\frac{1}{6}\, x_2^3(1 + x_3) \\ -\frac{1}{6}\, x_1^3(1 + x_3) & -\frac{1}{6}\, x_2^3(1 + x_3) & -\frac{1}{12}\,(x_1^4 + x_2^4) \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{s}}^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\, x_1^2 - \frac{1}{6}\, x_2^2 + \frac{1}{12}\, x_1^4 - \frac{1}{36}\, x_2^4 & 0 & -\frac{1}{3}\, x_1^3(1 + x_3) \\ 0 & -\frac{1}{6}\, x_1^2 - \frac{1}{2}\, x_2^2 - \frac{1}{36}\, x_1^4 + \frac{1}{12}\, x_2^4 & -\frac{1}{3}\, x_2^3(1 + x_3) \\ -\frac{1}{3}\, x_1^3(1 + x_3) & -\frac{1}{3}\, x_2^3(1 + x_3) & -\frac{1}{6}\,(x_1^2 + x_2^2) - \frac{7}{36}(x_1^4 + x_2^4) \end{pmatrix}$$

Тензор истинных напряжений $\hat{\sigma}^*$ отличается от $\hat{\mathbf{s}}^*$ тем, что в соответствии с определением (15) из диагональных элементов следует вычесть величину $(3\lambda + 2\mu)\ \alpha\ T = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$. Результат имеет более компактный вид:

$$\hat{\sigma}^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\, x_2^2 + \frac{1}{12}\, x_1^4 - \frac{1}{36}\, x_2^4 & 0 & -\frac{1}{3}\, x_1^3(1 + x_3) \\ 0 & \frac{1}{3}\, x_1^2 - \frac{1}{36}\, x_1^4 + \frac{1}{12}\, x_2^4 & -\frac{1}{3}\, x_2^3(1 + x_3) \\ -\frac{1}{3}\, x_1^3(1 + x_3) & -\frac{1}{3}\, x_2^3(1 + x_3) & \frac{1}{3}\,(x_1^2 + x_2^2) - \frac{7}{36}(x_1^4 + x_2^4) \end{pmatrix}$$

Подстановки характеристик состояния ξ в определяющие соотношения показывает их тождественное равенство, что свидетельствует о строгости выписанного решения.

Заключение

1. В случае ГУ для задачи линейной изотропно-однородной термоупругости выполнена декомпозиция любой линейной краевой задачи для тела произвольной геометрической формы на последовательность задач теплопроводности и теории упругости со скорректированными объемными силами. Построение решения предписано средствами МГС в численно-аналитической форме.

2. При регулярном распределении теплоисточников по области, занятой телом, описываемым полиномом произвольного конечного порядка, предложен метод построения частного решения в строгой аналитической форме, опирающийся на базис опорных состояний. Метод не использует информации о конкретном содержании ГУ.

3. Метод построения частного решения продемонстрирован на конкретном варианте распределения теплоисточников по области, занятой телом, описываемым многочленом третьего порядка. Решение тождественно удовлетворяют уравнению Пуассона.

4. В случае регулярного характера объемных сил, имеющих полиномиальное представление, предложен способ явного выписывания строгого аналитического решения

задачи о восстановлении поля напряжений, основанный на построении опорного базиса пространства внутренних состояний и строгом выписывании внутреннего состояния, соответствующего любому одномономному вектору объемных сил. Линейная комбинация состояний для одномономных сил, отвечающая объемной силе (учитывающая и температурную поправку) дает строгую форму записи частного решения. Корректировка тензора напряжений вычитанием уже известной диагональной поправки от температурных напряжений восстанавливает тензор механических напряжений. Построение решения, отвечающего однородной составляющей уравнений Ламе со скорректированными ГУ трудностей не составляет, поскольку при корректной постановке краевой задачи находится эффективно средствами МГС. Приведен конкретный пример.

В будущем подход, основанный на формировании опорного базиса пространства состояний можно применить для обеспечения выписывания частного решения различных задач механики с регулярными неоднородными составляющими в строгой аналитической форме. Перспективным шагом развития изложенного подхода является также расширение класса задач на неоднородные и нелинейные постановки с привлечением метода возмущений.

Значительный интерес для исследователей представляют также задачи, в которых параметры термоупругой среды зависят от температуры. Применение МГСВ [7] сводит процесс построения поля к последовательности линейных задач термоупругости. При этом на границе могут формулироваться условия смешанного типа. Разложение по вводимому малому параметру позволяет смешанные условия учитывать на начальном приближении. Для последующих приближений возникает возможность использования ГУ основных типов, что существенно снижает объем вычислений. На каждом шаге итераций проводить процесс ортогонализации базиса нет необходимости: это достаточно выполнить единожды. Но самым важным фактором в контексте настоящей работы является то, что при формировании соотношений для каждого последующего шага МГСВ возникают искусственные объемные силы именно полиномиального характера.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Купрадзе В. Д., Гегелия Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости; М.: Наука, 1976. 664 с.

[2] Коваленко А.Д. Основы термоупругости / А.Д. Коваленко. Киев: “Наукова Думка”, 1970. 308 с.

[3] Пеньков В. Б., Саталкина Л. В. Метод граничных состояний с возмущениями: неоднородные и нелинейные задачи теории упругости и термоупругости. Germany: LAP LAMBERT. Academic Publishing GmbH & Co., 2012. 108 с.

[4] Guannan Wang, Leiting Dong , Satya N. Atluri. A Trefftz collocation method (TCM) for three-dimensional linear elasticity by using the Papkovich-Neuber solutions with cylindrical harmonics //Engineering Analysis with Boundary Elements Vol. 88. 2018, pp. 93–103.

[5] Grigoriev Yu. M., Gürlebeck K., Legatiuk D. Interpolation problem for the solutions of linear elasticity equations based on monogenic functions //Conference: Conference: proceedings of the 3rd international conference on construction and building engineering (iconbuild) 2017.

[6] Chirag Sachdeva, Srikant Sekhar Padhee Functionally graded cylinders: Asymptotically exact analytical formulations//Applied Mathematical Modelling 10/2017.

[7] Azarov D. A., Zubov L. M. Mechanical-Geometrical Modelling in Non-Linear Theory of Elasticity January 2016

[8] Новикова О.С. Построение полнопараметрических аналитических решений задач теории упругости на основе метода граничных состояний: дисс. . . . канд. физ.- мат. наук : 01.02.04 / Новикова Ольга Сергеевна; науч. рук. В.Б. Пеньков; Липецк, 2019. 77 с.

[9] Кузьменко В. И., Кузьменко Н. В., Левина Л. В., Пеньков В. Б. Способ решения задач изотропной теории упругости с объемными силами в полиномиальном представлении // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 1. С. 84-94.

[10] Пеньков В. Б., Левина Л. В., Новикова О. С. Аналитическое решение задач эластостатики односвязного тела, нагруженного неконсервативными объемными силами. Теоретическое и алгоритмическое обеспечение // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 1. С. 56-73.

[11] Саталкина Л. В. Метод граничных состояний в задачах теории упругости неоднородных тел и термоупругости: дисс. ...канд. физ.- мат. наук: 01.02.04 / Саталкина Любовь Владимировна; науч. рук. В.Б. Пеньков; Липецк, 2010. 108 с.

[12] Лурье А. И. Теория упругости М.: Наука, 1970. 940 с.

[13] Тихонов А. И., Самарский А. А. Уравнение математической физики. М.: Наука, 1972. 763 с.

L. V. Levina, V. B. Penkov, E. A. Novikov

STRICT PARTICULAR SOLUTIONS OF HEAT CONDUCTIVITY AND THERMOELASTICITY PROBLEMS

Lipetsk state technical university, Lipetsk, Russia

Abstract. Boundary value problems for a linear thermoelastic isotropically homogeneous medium are considered. The state of the medium is subject to the Duhamel-Neumann equations. In the case when the characteristics of the stress-strain state (SSS) on the surface of the body are not related to temperature factors in the boundary conditions (BC), the problem is decomposed into a sequence of inhomogeneous problems of heat conduction and elasticity theory with a known correction of body forces in the equilibrium equations. Particular attention is paid to the method of constructing a particular solution to the problem of heat conduction. The Green's function method presents particular solutions of such problems in a singular form, which, for an arbitrary geometric configuration of the body, does not allow us to write out a rigorous analytical solution. An approach is proposed that makes it possible to obtain a particular solution rigorously in the case of a regular description of heat sources by a polynomial of finite order. The trace of such a solution at the boundary makes it possible to correct the BC of the heat conduction problem and construct a numerical-analytical solution by means of the method of boundary states (MBS). A similar approach is implemented for a rigorous particular solution of the linear elasticity problem. The constructed temperature field makes a regular addition to the volume forces of the second step - the problem of the theory of elasticity. Its solution is also effectively built using the MBS. The combination of these two steps makes it possible to write out a strictly particular solution for problems of linear thermoelastics.

Keywords: thermoelasticity, decomposition of the problem of thermoelasticity, rigorous solution, particular solution of the Poisson equation, particular solution of an inhomogeneous boundary value problem, method of boundary states, MBS, support basis.

Levina Lyubov Vladimirovna, Ph.D., Associate Professor, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia,

Penkov Viktor Borisovich, Dr. Sci. Phys. and Math, Professor, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia,

Novikov Evgeny Aleksandrovich, Graduate Student, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia.

REFERENCES

[1] Kupradze V. D., Gegelia T. G., Basheleyshvili M. O., Burchuladze T. V. Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity. M.: Nauka, 1976. 664 p.

[2] Kovalenko A. D. Fundamentals of thermoelasticity. Kiyev: «Naukova Dumka», 1970. 308 p.

[3] Penkov V. B., Satalkina L. V. Perturbed boundary state method: inhomogeneous and nonlinear problems of the theory of elasticity and thermoelasticity. Germany: LAP LAMBERT. Academic Publishing GmbH & Co., 2012. 108 p.

[4] Guannan Wang, Leiting Dong , Satya N. Atluri. A Trefftz collocation method (TCM) for three-dimensional linear elasticity by using the Papkovich-Neuber solutions with cylindrical harmonics // Engineering Analysis with Boundary Elements Vol. 88. 2018, pp. 93–103.

[5] Grigoriev Yu. M., Gürlebeck K., Legatiuk D. Interpolation problem for the solutions of linear elasticity equations based on monogenic functions //Conference: Conference: proceedings of the 3rd international conference on construction and building engineering (iconbuild) 2017.

[6] Chirag Sachdeva, Srikant Sekhar Padhee Functionally graded cylinders: Asymptotically exact analytical formulations // Applied Mathematical Modelling 10/2017.

[7] Azarov D. A., Zubov L. M. Mechanical-Geometrical Modelling in Non-Linear Theory of Elasticity January 2016

[8] Novikova O. S. Construction of full-parametric analytical solutions of problems of the theory of elasticity based on the method of boundary states. Sciences: 01.02.04 / Novikova Olga Sergeevna; scientific director V.B. Penkov; Lipetsk, 2019. – 77 p.

[9] Kuzmenko V. I., Kuzmenko N. V., Levina L. V., Penkov V. B. Method for solving problems of isotropic elasticity theory with volumetric forces in polynomial representation // Applied Mathematics and Mechanics. 2019. V. 83. No 1. pp. 84-94.

[10] Penkov V. B., Levina L. V., Novikova O. S. Analytical solution of problems of elastostatics of a simply connected body loaded with non-conservative body forces. Theoretical and algorithmic support // Journal of Samara State Technical University. Series Physical and Mathematical Sciences. 2020. V. 24. No 1. pp. 56-73.

[11] Satalkina L. V. The method of boundary states in problems of the theory of elasticity of inhomogeneous bodies and thermoelasticity. Sciences: 01.02.04 / Satalkina Lyubov Vladimirovna; scientific director V.B. Penkov; Lipetsk, 2010. – 108 p.

[12] Lurie A. I. Theory of elasticity M .: Nauka, 1970. 940 p.

[13] Tikhonov A. I., Samara A. A. Equation of mathematical physics. M.: Nauka, 1972. 763 p.