

¹Д. А. Чернышов, ^{1,2}А. В. Ковалев

ТЕРМОДЕФОРМИРОВАНИЕ СПЛОШНОГО ШАРА С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ ВИДОМ ЗАВИСИМОСТИ ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

¹Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

²Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия
имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия

Аннотация. В работе в аналитическом виде определяется напряженно-деформированное состояние сплошного шара, подвергнутого равномерному тепловому воздействию, и вводятся предположения о характере влияния на него зависимости предела текучести от температурного поля. В качестве материала шара рассматривается модель сплошной среды, предложенная А. Н. Спорыхиным (модель упрочняющегося упруговязкопластического материала). Решение задачи представляет собой обобщение уже известного подхода на случай полиномиальной зависимости предела текучести от температуры. В результате расчетов получены численные значения основных величин, и проведено сравнение материалов, предел текучести которых определяется постоянной, линейной и квадратичной функциями.

Ключевые слова: температурные напряжения, упругость, пластичность, вязкость, предел текучести, сплошной шар.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.012

УДК: 539.374, 539.389

Введение

Изучению различных реологических моделей сплошных сред посвящено большое количество работ [1–6]. Важной областью подобных исследований является рассмотрение в рамках одной задачи сразу нескольких механизмов деформирования: упругого, пластического, вязкого и др. Так, введение в модель фактора вязкости, согласно [1], наделяет ее свойствами внутренней неконсервативности, что приводит к значительному усложнению самой модели и, как следствие, возникновению дополнительных

© Чернышов Д. А., Ковалев А. В., 2022

Чернышов Данил Алексеевич

e-mail: chernyshov.danil@gmail.com, аспирант кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Ковалев Алексей Викторович

e-mail: kav-mail@mail.com, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 01.05.2022

вычислительных сложностей. В [2] был предложен подход к решению задач с учетом вязких свойств материала, предел текучести которого линейно зависит от температуры. В данной работе рассматривается более общий случай — полиномиальный вид зависимости. Его исследование позволит более детально подходить к анализу различного рода материалов (например, хромоникелевых коррозионностойких сталей аустенитного класса 12X18H12M3TЛ и 03X16H9M2 [7]), а также рассматривать кусочно-заданный предел текучести с полиномами высших порядков.

Построение математической модели

Постановка задачи, аналогичная рассматриваемой, приводилась в [2, 3]. Поверхность сплошного шара радиуса R подвержена равномерному нагреву со стороны окружающей среды, температура которой равна T_m , таким образом, что в каждый момент выполнено условие

$$\frac{T(R, t) - T_0}{T_m - T_0} = 1 - e^{-xt}, \quad (1)$$

где $T(r, t)$ — распределение температуры шара по радиусу; r — длина радиус-вектора точки; t — время; x — скорость нагрева поверхности; T_0 — начальная температура тела. Массовыми и поверхностными силами пренебрегают. Требуется определить напряженно-деформированное состояние шара.

Уравнение теплопроводности вместе с краевыми условиями в случае сферической симметрии имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} &= \vartheta \left(\frac{2}{r} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r, t)}{\partial r^2} \right), \\ T(r, 0) &= T_0, \\ \frac{T(R, t) - T_0}{T_m - T_0} &= 1 - e^{-xt}, \\ T(0, t) &\neq \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ϑ — коэффициент температуропроводности.

Согласно [2], решение (2) в безразмерных переменных имеет вид

$$\Theta(\xi, t) = \frac{T(\xi, t) - T_0}{T_m - T_0} = 1 - e^{-xt} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n \frac{\sin(\pi n \xi)}{\pi n \xi} \frac{x}{x - \vartheta \frac{\pi^2 n^2}{R^2}} \left[e^{-\frac{\pi^2 n^2}{R^2} \vartheta t} - e^{-xt} \right], \quad (3)$$

где $\xi = r/R$ — безразмерный радиус.

В условиях сферической симметрии уравнения, входящие в полную систему уравнений механики твердого тела, могут быть записаны в следующем виде:

- уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0, \quad (4)$$

где $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\theta$ — компоненты тензора напряжений;

- условие пластичности (условия Треска и Мизеса в эквивалентном виде)

$$\left| (\sigma_r - c e_r^p - \eta \dot{e}_r^p) - (\sigma_\varphi - c e_\varphi^p - \eta \dot{e}_\varphi^p) \right| = 2k(r, t), \quad (5)$$

где $e_r^p, e_\varphi^p, e_\theta^p$ — компоненты тензора пластических деформаций; $k(r, t)$ — предел текучести; c — коэффициент упрочнения; η — коэффициент вязкости;

- условие пластической несжимаемости (следствие ассоциированного закона пластического течения)

$$de_r^p + 2de_\varphi^p = 0; \quad (6)$$

- закон Дюамеля-Неймана

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda (e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_r^e - (3\lambda + 2\mu) \Delta (r, t), \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\theta = \lambda (e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_\varphi^e - (3\lambda + 2\mu) \Delta (r, t), \end{aligned} \quad (7)$$

где $e_r^e, e_\varphi^e, e_\theta^e$ — компоненты тензора упругих деформаций; λ, μ — параметры Ламе;

$$\Delta (r, t) = \alpha (T (r, t) - T_0);$$

α — коэффициент температурного расширения;

- выражения для полных деформаций и соотношения Коши

$$\begin{aligned} e_r^e + e_r^p &= e_r = u_{r,r}, \\ e_\varphi^e + e_\varphi^p &= e_\theta^e + e_\theta^p = e_\varphi = e_\theta = \frac{u_r}{r}, \end{aligned} \quad (8)$$

где e_r, e_φ, e_θ — компоненты тензора полных деформаций; u_r — радиальная компонента перемещений.

В отличие от [2], где дальнейшее рассмотрение проводилось только на основании вида решения (3), в данной работе учитывается вид зависимости предела текучести от температуры. Было выдвинуто предположение о полиномиальной форме зависимости:

$$k (r, t) = k_0 \sum_{l=0}^m \beta_l \Delta^l (r, t), \quad (9)$$

где $\beta_0 = 1, \beta_l (l = \overline{1, m})$ — коэффициенты, определяемые таким образом, чтобы $k (r, t)$ оставалась монотонно убывающей функцией температуры.

Очевидно, что

$$\Delta (r, t) = \Delta_m \Theta \left(\frac{r}{R}, t \right), \quad (10)$$

где $\Delta_m = \alpha (T_m - T_0)$. Тогда (9) с учетом (3) примет вид

$$k (r, t) = k_0 \sum_{l=0}^m \beta_l \Delta_m^l \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\Theta [n, 1] (r) e^{-h[n, 1]t} + \Theta [n, 2] (r) e^{-h[n, 2]t} \right) \right]^l. \quad (11)$$

где $h [n, 1] = \frac{\pi^2 n^2}{R^2} \vartheta, h [n, 2] = x$. Здесь и далее в квадратных скобках будут записываться индексы членов ряда.

После преобразования (11) было получено выражение

$$k (r, t) = k_0 \sum_{l=0}^m \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \beta_l \Delta_m^l \prod_{q=1}^l \Theta [n_q, j] (r) e^{-h[n_q, j]t} \right\}. \quad (12)$$

Суммирование по n_1, n_2, \dots, n_l ведется в том смысле, что при $l = 0$ выражение в фигурных скобках равно 1.

Таким образом, исходя из вида зависимостей (3) и (12) отыскание неизвестных величин будет проводиться в форме

$$F(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 F[n, j](r) e^{-h[n, j]t} + \sum_{l=2}^m \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 F[l, n_1, n_2, \dots, n_l, j](r) \prod_{q=1}^l e^{-h[n_q, j]t}, \quad (13)$$

где F — искомая величина. Суммирование по l во втором слагаемом ведется в том смысле, что при $m < 2$, т. е. в случае постоянного или линейно зависящего от температуры предела текучести, оно равно 0.

Очевидно, что каждое из уравнений (4)–(8) может быть сведено к виду, аналогичному (13). Тогда уравнения (5) и (7) для всех членов ряда примут вид (14) и (15) соответственно:

$$(\sigma_r - (c - \eta \bar{h}) e_r^p) - (\sigma_\varphi - (c - \eta \bar{h}) e_\varphi^p) = 2\kappa k(r), \quad (14)$$

где $\kappa = \text{sign}((\sigma_r - (c - \eta \bar{h}) e_r^p) - (\sigma_\varphi - (c - \eta \bar{h}) e_\varphi^p))$,

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda (e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_r^e - (3\lambda + 2\mu) \Delta(r), \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\theta = \lambda (e_r^e + 2e_\varphi^e) + 2\mu e_\varphi^e - (3\lambda + 2\mu) \Delta(r). \end{aligned} \quad (15)$$

Для каждого слагаемого в разложениях искомых величин будет справедлива система (4), (6), (8), (14), (15). Для удобства здесь и далее индексы были опущены. В (14) величина \bar{h} принимается равной не только отдельным коэффициентам $h[n, j]$ из первого слагаемого соотношения (13), но и суммам их произведений из второго слагаемого.

Дальнейшее рассмотрение проводилось для случая, когда в теле последовательно возникают и развиваются следующие состояния: идеально упругое деформирование; область пластического течения при $\kappa = 1$ (момент возникновения $t = t_p$); зона разгрузки материала (момент возникновения $t = t_u$); область повторной пластичности при $\kappa = -1$ (момент возникновения $t = t_r$). Также предполагалось существование момента вырождения первой пластической зоны ($t = t_k$), после которого зона разгрузки имеет общую упругопластическую границу с областью идеальной упругости. Кроме того, процесс деформирования является конечным и завершается при полном нагреве тела (момент завершения нагрева $t = t_m$).

Выражения для членов разложений напряжений и перемещений в каждой из зон шара имеют вид:

- упругая область:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \left\{ -\frac{4\omega}{r^3} \int_0^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + A_1 + \frac{B_1}{r^3} \right\} \\
 \sigma_\varphi &= \left\{ \frac{2\omega}{r^3} \int_0^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - 2\omega \Delta(r) + A_1 - \frac{B_1}{2r^3} \right\} \\
 u &= \left\{ \frac{\omega}{\mu r^2} \int_0^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{r A_1}{3\lambda + 2\mu} - \frac{B_1}{4\mu r^2} \right\}
 \end{aligned} \tag{16}$$

- области первого и повторного пластического течения:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \left\{ -\frac{4\omega}{r^3} \int_y^r \rho^2 \Delta(\rho, t) d\rho + A_i + \frac{B_i}{r^3} \right\} + \\
 &+ \frac{2\omega}{3\eta(\Omega - \bar{h})} \left[-4 \int_y^r \frac{\kappa k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{4\omega}{r^3} \int_y^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{B_i}{r^3} \right] \\
 \sigma_\varphi &= \left\{ \frac{2\omega}{r^3} \int_y^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - 2\omega \Delta(r) + A_i - \frac{B_i}{2r^3} \right\} + \\
 &+ \frac{2\omega}{3\eta(\Omega - \bar{h})} \left[-4 \int_y^r \frac{\kappa k(\rho)}{\rho} d\rho - 2\kappa k(r) - \frac{2\omega}{r^3} \int_y^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + 2\omega \Delta(r) + \frac{B_i}{2r^3} \right] \\
 u &= \left\{ \frac{\omega}{\mu r^2} \int_y^r \rho^2 \Delta(\rho, t) d\rho + \frac{r A_i}{3\lambda + 2\mu} - \frac{B_i}{4\mu r^2} \right\} + \\
 &+ \frac{2\omega}{3\eta(\Omega - \bar{h})(3\lambda + 2\mu)} \left[-4r \int_y^r \frac{\kappa k(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{4\omega}{r^2} \int_y^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - \frac{B_i}{r^2} \right]
 \end{aligned} \tag{17}$$

- область разгрузки:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \left\{ -\frac{4\omega}{r^3} \int_b^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + A_3 + \frac{B_3}{r^3} \right\} + \left[2\omega \int_b^r \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right] \\
 \sigma_\varphi &= \left\{ \frac{2\omega}{r^3} \int_b^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho - 2\omega \Delta(r) + A_3 - \frac{B_3}{2r^3} \right\} + \left[2\omega \int_b^r \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho + 2\omega \hat{e}_r^p(r) \right] \\
 u &= \left\{ \frac{\omega}{\mu r^2} \int_b^r \rho^2 \Delta(\rho) d\rho + \frac{r A_3}{3\lambda + 2\mu} - \frac{B_3}{4\mu r^2} \right\} + \left[\frac{2\omega}{3\lambda + 2\mu} r \int_b^r \frac{\hat{e}_r^p(\rho)}{\rho} d\rho \right]
 \end{aligned} \tag{18}$$

В (16)–(18) константы ω и Ω равны соответственно

$$\omega = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}, \quad \Omega = \frac{2\omega + 3c}{3\eta}$$

Функция $\hat{e}_r^p(r)$ в выражении (18) представляет собой уровень накопленных деформаций в точке r и определяется величиной пластических деформаций в этой точке при прохождении через нее упругопластической границы b .

Для перехода к области первого пластического течения в (17) следует приравнять $y = a$ и $i = 2$, а для перехода к области повторного пластического течения — $y = c$ и $i = 4$.

Константы A_i и B_i ($i = \overline{1, 4}$) определяются из условий свободной от нагрузки внешней поверхности шара и отсутствия перемещений в его центре, а также условий сопряжений на упругопластических границах.

Аналитический вид (16)–(18) для каждого из членов разложений напряжений и перемещений совпадает с выражениями, приведенными в [2], с точностью до величины \bar{h} , функций $\Delta(r)$ и $k(r)$, а также констант интегрирования.

Поскольку процесс нагрева является нестационарным, упругопластические границы раздела зон, возникающих в теле, находятся в движении от поверхности шара к центру вплоть до своих предельных положений:

- Положение границы $a(t)$, разделяющей упругую и пластическую зоны, может быть определено из эквивалентных условий равенства нулю на ней пластических деформаций, непрерывности окружной компоненты напряжений или выполнения условия пластичности для напряжений из упругой области.
- Положение границы $b(t)$, разделяющей пластическую область и зону разгрузки, согласно ассоциированному закону пластического течения, определяется равенством скорости пластических деформаций нулю.
- Положение границы $c(t)$, разделяющей область разгрузки и зону повторной пластичности, может быть определено из эквивалентных условий равенства на ней уже имеющейся и новой пластических деформаций, непрерывности окружной компоненты напряжений или выполнения условия пластичности для напряжений из области разгрузки.

Анализ решения

В качестве примера было проведено сравнение материалов с постоянным, линейным и квадратичным пределами текучести. Величинам, относящимся к указанным случаям, были присвоены верхние индексы *const*, *I* и *II* соответственно. Параметры β_l ($l = \overline{1, m}$) подбирались таким образом, чтобы было выполнено условие

$$0 \leq \sum_{l=0}^m \beta_l \Delta_m^l \leq 1 \quad (19)$$

Численные значения моментов возникновения областей с отличающимися реологическими свойствами приведены в таблице 1. Анализ показал, что при прочих равных физико-механических параметрах материалов выбор предела текучести оказывает существенное влияние на скорость деформирования сплошного шара. Распределение остаточных напряжений в теле после полного нагрева и последующего его охлаждения до начальной температуры, приведенных к пределу текучести, представлено на

рис. 1. Нетрудно заметить, что все три случая отличаются друг от друга не только величиной возникающих напряжений, но и глубиной проникания областей вглубь шара. Аналогичный вывод можно сделать, анализируя рис. 2, демонстрирующий изменение положения упругопластических границ $a(t)$ и $b(t)$ во времени вплоть до момента вырождения первой зоны пластичности.

Момент времени	Вид предела текучести		
	<i>const</i>	<i>I</i>	<i>II</i>
t_p	0,41298	0,35202	0,34730
t_u	2,85907	3,05806	3,18484
t_k	43,33826	11,82847	6,86689
t_r	14,59790	25,38286	31,83741

Таблица 1. Значения моментов возникновения зон (в секундах)

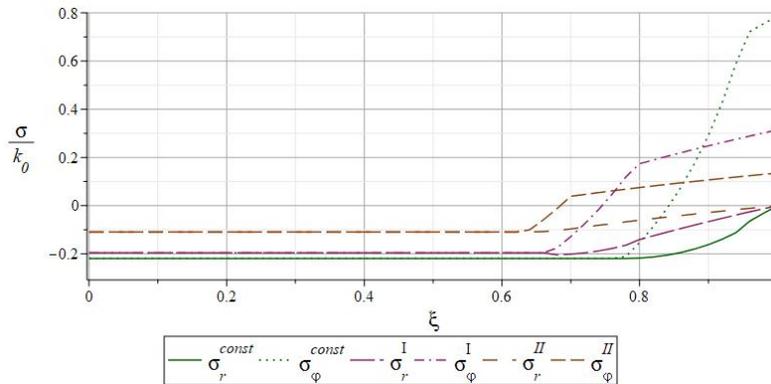


Рис. 1. Остаточные напряжения в теле после полного остывания

Выводы

В работе было получено обобщение решения, приведенного в [2], на случай полиномиальной зависимости предела текучести от температуры. Анализ численных значений основных величин позволил сделать следующие выводы:

- Введение в модель зависимости предела текучести от температуры приводит к изменению скорости деформирования и времени, необходимого на зарождение и развитие областей с отличающимися свойствами.
- Глубина проникания зон, возникающих при нагреве тела, вглубь шара может существенно изменяться (в частности, увеличиваться) с увеличением скорости изменения предела текучести.
- Следствием уменьшения предела текучести по мере роста температуры является уменьшение остаточных напряжений в теле по абсолютной величине после полного его охлаждения.

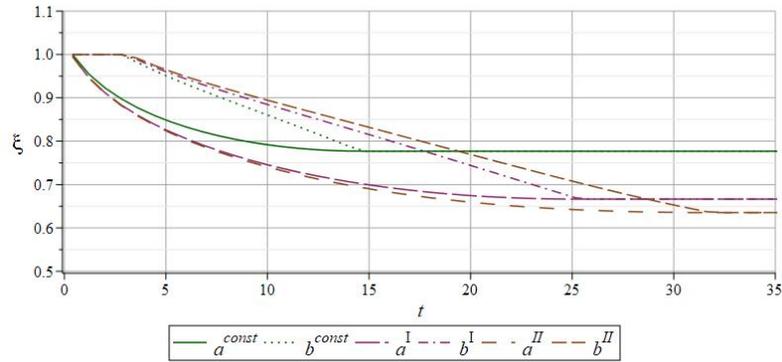


Рис. 2. Зависимость положения упругопластических границ от времени

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Издательство ВГУ, 1997. 361 с.
- [2] Чернышов Д. А., Ковалев А. В. Термодеформирование тела со сложной реологией в условиях сферической симметрии // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2022. № 4. С. 70–87.
- [3] Дац Е. П. Неустановившиеся температурные напряжения в условиях зависимости предела текучести от температуры. Ph.D. thesis: Комсомольск-на-Амуре государственный технический университет. 2017.
- [4] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Москва: Наука, 1969. 420 с.
- [5] Спорыхин А. Н., Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д. Неоднородные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей. Воронеж: Издательство ВГУ, 2004. 218 с.
- [6] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Лушпей А. В. Переходный процесс торможения прямолинейного вязкопластического течения при мгновенном снятии нагружающих усилий // Прикладная математика и механика. 2009. № 4. С. 663–669.
- [7] ПНАЭ Г-7-002-86 Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. 1987.

¹D. A. Chernyshov, ^{1,2}A. V. Kovalev

THERMAL DEFORMATION OF A SOLID BALL WITH A POLYNOMIAL TYPE OF DEPENDENCE OF THE YIELD STRENGTH ON TEMPERATURE

¹Voronezh State University, Voronezh, Russia

²Military educational scientific center air force "Air force Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin, Voronezh, Russia

Abstract. In this work, the stress-strain state of solid ball subjected to uniform thermal action is determined in an analytical form and assumptions about of the influence of the dependence of the yield strength on the temperature field on it are introduced. The continuous medium model proposed by A. N. Sporykhin (a model of a hardening elastoviscoplastic material) is considered as the ball material. The solution of the problem is a generalization of the already known approach to the case of a polynomial dependence of the yield strength on temperature. As a result of computation, numerical values of the basic quantities were obtained, and a comparison was made of materials whose yield strength is determined by constant, linear and quadratic functions.

Keywords: thermal strain, elasticity, plasticity, viscosity, yield strength, solid ball.

REFERENCES

- [1] Sporykhin A. N. Metod vozmushchenij v zadachah ustojchivosti slozhnyh sred [Perturbation Method in Problems of Stability of Complex Medium]. Voronezh: Publishing house of Voronezh State University, 1997. 361 c.
- [2] Chernyshov D. A., Kovalev A.V. Thermal Deformation of a Body with Complex Rheology Under Conditions of Spherical Symmetry // *Mechanics of Solids*. 2022. № 4. С. 70–87.
- [3] Dats E. P. Neustanovivshiesya temperaturnye napryazheniya v usloviyah zavisimosti predela tekuchesti ot temperature [Unsteady Thermal Stresses under the Dependence of the Yield Strength on Temperature]. Ph.D. thesis: Komsomolsk-on-Amur State Technical University. 2017.
- [4] Kachanov L. M. Osnovy teorii plastichnosti [Fundamentals of the Theory of Plasticity]. Moscow: Nauka Publ., 1969. 420 c.
- [5] Sporykhin A. N., Kovalev A.V., Shcheglova Y. D. Neodnomernye zadachi uprugovyzkoplastichnosti s neizvestnoj granicej [Non-one-dimensional elastic-viscoplastic problems with unknown boundary]. Voronezh: Publishing house of Voronezh State University, 2004. 218 c.
- [6] Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Lushpei A. V. The Transient Retardation of a Rectilinear Viscoplastic Flow when the Loading Stresses are Abruptly Removed // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2009. № 4. С. 478–482.
- [7] PNAE G-7-002-86 Normy rascheta na prochnost' oborudovaniya i truboprovodov atomnyh energeticheskikh ustanovok [PNAE G-7-002-86 Standards for calculating the strength of equipment and pipelines of nuclear power plants]. 1987.

Chernyshov Danil Alekseevich, Student of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Kovalev Alexey Victorovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Head of the Department of Mechanics and Computer Modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russia, Military educational scientific center air force "Air force Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Voronezh, Russia.