

Л. В. Кирьянова

ОЦЕНКА ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация. В данной работе численными методами получены оценки для первого собственного числа краевой задачи модельного дробного дифференциального уравнения, описывающего колебания фрактального осциллятора. Представлены две эмпирические формулы для максимального собственного числа рассматриваемой модели: как функции параметра уравнения и через максимальную и минимальную сумму элементов строк матрицы специального вида. Оценена погрешность.

Ключевые слова: дробное дифференциальное уравнение, оператор дробного дифференцирования, собственные числа матрицы, собственные числа краевой задачи.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.013

УДК: 519.673

Введение. Актуальность исследуемой проблемы. Механико-математическое моделирование с использованием дробного исчисления приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений с производными дробного порядка. Наиболее полно современное состояние теории дробного исчисления можно найти в 8-томном издании [1]. В настоящее время уравнения с производными дробного порядка повсеместно применяются, например, в физике [2] - [4] и гидродинамике [5] - [6]. В механике можно отметить использование дробных дифференциальных уравнений при построении моделей процессов с аномальным режимом [7] - [8] или моделей аномальной диффузии [9]. В частности, в физике, механике, химии и инженерных науках при механико-математическом моделировании широко применяется уравнение вида:

$$D^\alpha u(t) + c \cdot D^\beta u(t) + f(t, u(t)) = 0; \quad 0 < t < T$$

где D^α и D^β дробные производные (операторы дробного дифференцирования) порядка $1 < \alpha \leq 2$ и $1 < \beta \leq 2$; c – некоторая действительная постоянная, $f(t, u)$ –

© Кирьянова Л. В., 2022

Кирьянова Людмила Владимировна

e-mail: KiryanovaLV@mgsu.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Автор выражает глубокую благодарность профессору кафедры Высшей математики НИУ МГСУ Т.С. Алерову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Поступила 01.06.2022

заданная действительная функция двух аргументов, удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям.

Рассмотрим модельное дробное дифференциальное уравнение из [10], описывающего колебания фрактального осциллятора:

$$D^{1+\gamma}u(t) + \lambda u(t) = 0, \quad 0 < \gamma < 1.$$

В рассматриваемом уравнении оператор дробного дифференцирования определен следующим образом:

$$D^{1+\gamma} = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^\gamma} d\tau.$$

Данное уравнение также является одним из основных уравнений для моделирования случайного блуждания точечной частицы, которая начинает двигаться в начале координат в момент времени $t=0$ на самоподобном фрактальном множестве.

Как правило, для практических задач наибольшее значение имеет первое собственное число.

Таким образом, изучается первое собственное число задачи

$$\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^\gamma} d\tau + \lambda u(t) = 0, \quad 0 < \gamma < 1 \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (2)$$

Известно [10], что эта задача эквивалентна уравнению:

$$\cdot \left[\int_0^t (t-\tau)^{1-\gamma} u(\tau) d\tau - \int_0^1 t^{1-\gamma} (1-\tau)^{1-\gamma} u(\tau) d\tau \right] = \frac{\Gamma(2-\gamma)u(t)}{\lambda}.$$

Согласно [11], исследование собственных значений данного уравнения сводится к изучению предельного поведения (при неограниченном возрастании порядка матрицы) собственных чисел матриц вида $\cdot \frac{1}{n} T_{n-1}(\mu)$, где:

$$T_{n-1}(\mu) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{n}\right)^\mu \left(\frac{n-1}{n}\right)^\mu - \left(\frac{0}{n}\right)^\mu & \left(\frac{1}{n}\right)^\mu \left(\frac{n-2}{n}\right)^\mu & \cdots & \left(\frac{1}{n}\right)^\mu \left(\frac{1}{n}\right)^\mu \\ \left(\frac{2}{n}\right)^\mu \left(\frac{n-1}{n}\right)^\mu - \left(\frac{1}{n}\right)^\mu & \left(\frac{2}{n}\right)^\mu \left(\frac{n-2}{n}\right)^\mu & \cdots & \left(\frac{2}{n}\right)^\mu \left(\frac{1}{n}\right)^\mu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^\mu \left(\frac{n-1}{n}\right)^\mu - \left(\frac{n-1}{n}\right)^\mu & \left(\frac{n-1}{n}\right)^\mu \left(\frac{n-2}{n}\right)^\mu - \left(\frac{n-3}{n}\right)^\mu & \cdots & \left(\frac{n-1}{n}\right)^\mu \left(\frac{1}{n}\right)^\mu \end{pmatrix}$$

где $\mu = 1$.

В силу того, что параметр исходной задачи $\gamma \in (0;1)$, то и параметр матрицы $\mu \in (0;1)$.

Основные свойства матриц вида $n^\mu T_{n-1}(\mu)$, $T_{n-1}(\mu)$ и $\frac{1}{n} T_{n-1}(\mu)$ исследованы в [11]. Отметим, что свойства матрицы $n^\mu \cdot T_{n-1}(\mu)$ в случае $\mu=1$ приведены в [12]. В работах [11] и [12] не изучались собственные числа этих матриц.

Далее рассмотрим максимальное собственное значения матриц вида $T_{n-1}(\mu)$ и $\frac{1}{n} T_{n-1}(\mu)$.

Методы исследования и результаты. Найдем с помощью пакета прикладных программ MATLAB максимальное собственное значение матриц вида $T_{n-1}(\mu)$ при различных значениях параметра $\mu \in (0;1)$ в зависимости от размерности n . Результат вычислений визуализированы и приведены на рисунке 1. Очевидна линейная связь между максимальным собственным числом и размерностью матрицы.

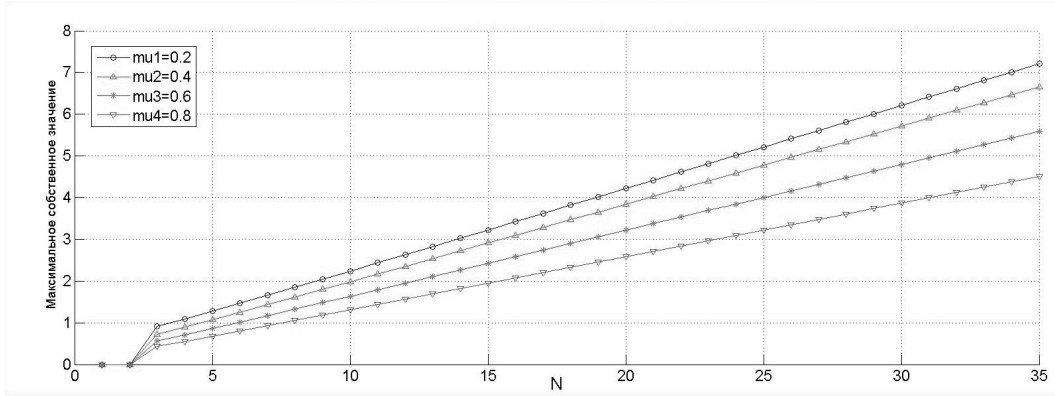


Рис. 1. Максимальное собственное значение матрицы $T_{n-1}(\mu)$ для четырех значениях параметра $\mu \in (0;1)$ в зависимости от размерности матрицы.

Далее найдем для матрицы $\frac{1}{n}T_{n-1}(\mu)$ максимальное собственное значение $\lambda_{\max}(n)$ при различных значениях параметра в зависимости от размерности, которое при возрастании n имеет предельное значение. Соответствующие результаты представлены на рисунке 2.

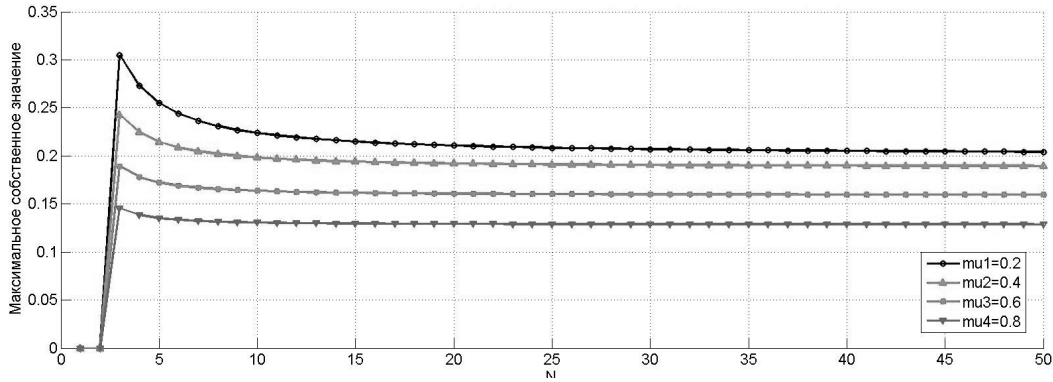


Рис. 2. Максимальное собственное значение $\lambda_{\max}(n)$ матрицы $\frac{1}{n}T_{n-1}(\mu)$ при различных значениях параметра $\mu \in (0;1)$ в зависимости от размерности.

Расчетные значения предельного максимального собственного значения $\lambda_{\max}$ матриц вида $\frac{1}{n}T_{n-1}(\mu)$ при различных значениях параметра $\mu \in (0;1)$ приведены в таблице 1.

Зависимость максимального собственного значения $\lambda_{\max}$ от значения параметра μ можно выразить аналитически с помощью приложения *cftool* пакета MATLAB (была использована простейшая модель Фурье):

$$\lambda_{\max}(\mu) \approx 0.154 + 0.033 \cos(3.717\mu) + 0.035 \sin(3.717\mu). \quad (3)$$

Коэффициент детерминации составил $R^2 = 0.997$.

μ	0.1	0.15	0.17	0.2	0.21	0.25	0.3	0.4
λ_{max}	0.1924	0.2013	0.2031	0.2043	0.2044	0.2037	0.2005	0.1895
μ	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
λ_{max}	0.1752	0.1596	0.1439	0.1362	0.1287	0.1215	0.1145	0.1078

Таблица 1. Предельное максимальное собственное значение λ_{max} матриц вида $\frac{1}{n}T_{n-1}(\mu)$ при различных значениях параметра $\mu \in (0;1)$ при $n \rightarrow \infty$ с точностью 4 знака после запятой.

Далее, для более точного анализа собственных значений матрицы $\frac{1}{n}T_{n-1}(\mu)$ с элементами $t_{ij}(\mu, n-1)$, рассмотрим максимальную и минимальную суммы элементов строк матрицы:

$$Z_{max}(\mu, n-1) = \max_{j=1, n} \sum_{i=1}^n t_{ij}(\mu, n-1),$$

$$Z_{min}(\mu, n-1) = \min_{j=1, n} \sum_{i=1}^n t_{ij}(\mu, n-1).$$

Численно, с помощью пакета прикладных программ MATLAB построим зависимость величин Z_{max} , Z_{min} и λ_{max} от размера n матрицы $\frac{1}{n}T_{n-1}(\mu)$. Результат для $\mu = 0.2$ представлен на рисунке 3.

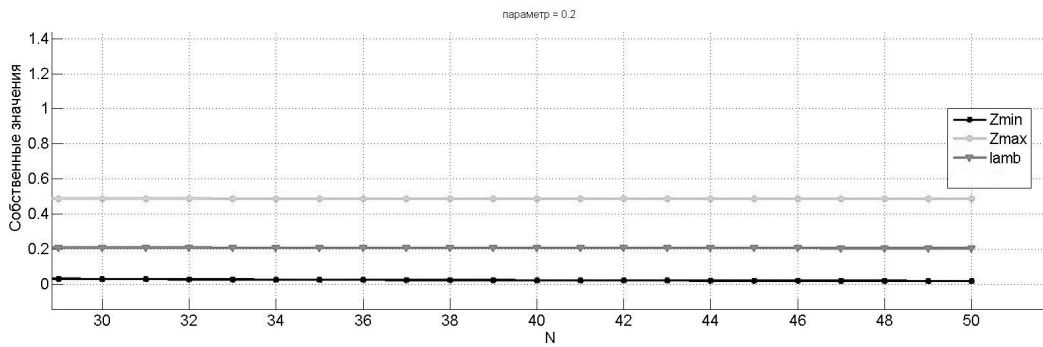


Рис. 3. Зависимость величин Z_{max} , Z_{min} и λ_{max} от размера n матрицы $\frac{1}{n}T_{n-1}(0.2)$.

Можно показать, что максимальное собственное значение матрицы $\frac{1}{n}T_{n-1}(0.2)$, не зависимо от размера матрицы n , делит отрезок между Z_{max} и Z_{min} в одном и том же соотношении, которое зависит от значения параметра μ :

$$\lambda_{max} = \frac{Z_{max} + k(\mu) \cdot Z_{min}}{1 + k(\mu)} \quad (4)$$

Проверим формулу (4) численно. На рисунке 4 визуализированы зависимости Z_{max} , Z_{min} , λ_{max} и $k(\mu)$ от значения параметра μ , полученные в результате соответствующих вычислений.

Зависимость коэффициента $k(\mu)$ от значения параметра μ можно выразить аналитически с помощью приложения *cftool* пакета MATLAB. Будем использовать дробно

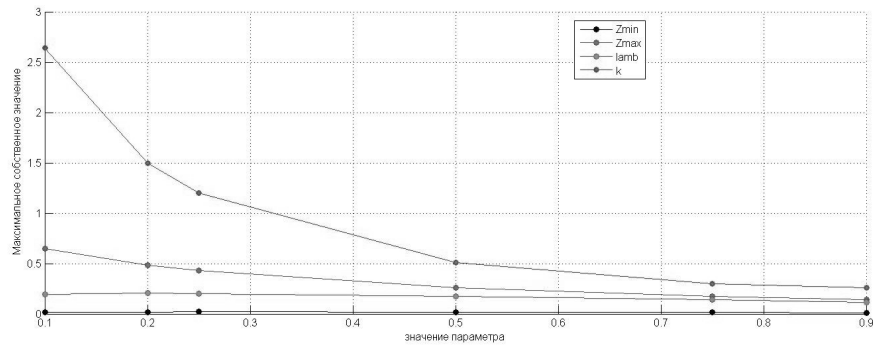


Рис. 4. Зависимость Z_{max} , Z_{min} , λ_{max} и $k(\mu)$ от значения параметра μ .

– линейную функцию. Графический результат работы приложения представлен на рисунке 5.

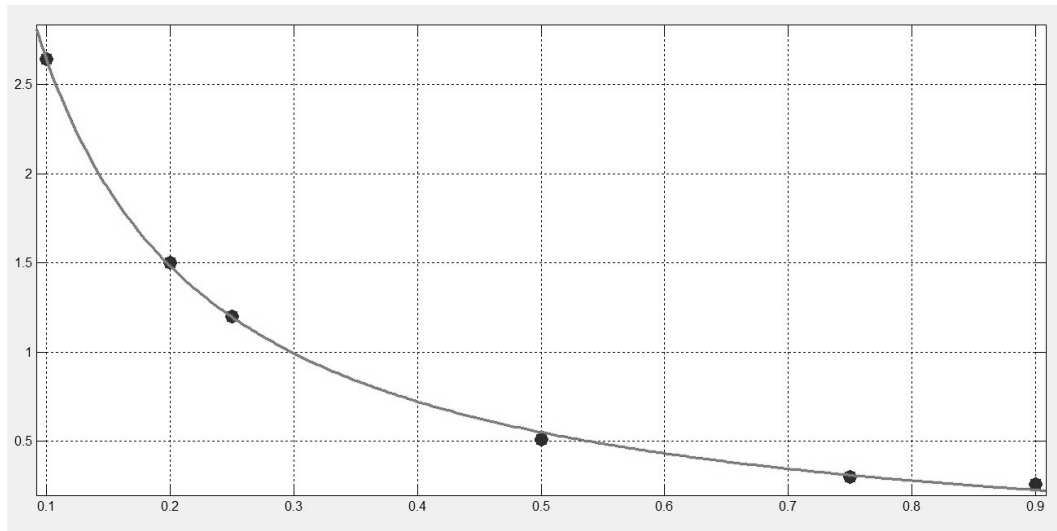


Рис. 5. Зависимость коэффициента $k(\mu)$ от значения параметра μ в виде дробно – линейной функции.

Аналитический вид дробно – линейного приближения зависимости коэффициента $k(\mu)$ от значения параметра μ следующий:

$$k(\mu) = \frac{0.41 - 0.22\mu}{0.05 + \mu}. \quad (5)$$

Коэффициент детерминации составил $R^2 = 0.99$.
Теперь оценим точность формулы (3).

В таблице 2 приведены значения максимального собственного значения и его оценок, рассчитанных по формулам (4) – (5) в зависимости от значений параметра μ :

$$\hat{\lambda}_{max} = \frac{(0.05 + \mu)Z_{max} + (0.41 - 0.22\mu)Z_{min}}{0.46 + 0.78\mu}. \quad (6)$$

При верификации были использованы такие значения параметра μ , которые не вошли в Таблицу 2.

Последняя строка Таблицы 2 содержит относительную погрешность δ оценки максимального собственного значения в %, то есть

$$\delta = \left| \frac{\lambda_{max} - \hat{\lambda}_{max}}{\lambda_{max}} \right| \cdot 100\%.$$

μ	0.15	0.21	0.3	0.4	0.6	0.8	0.95
λ_{max}	0.201	0.204	0.201	0.190	0.160	0.129	0.108
$\hat{\lambda}_{max}$	0.205	0.207	0.200	0.186	0.156	0.129	0.112
$\delta, \%$	0.020	0.015	0.005	0.021	0.025	0.000	0.037

Таблица 2. Значения λ_{max} , его оценки $\hat{\lambda}$ и погрешности оценки δ в зависимости от значения параметра μ .

Выводы. Таким образом, использованный в работе метод сведения изучения собственных значений краевой задачи (1) – (2) к изучению предельного поведения собственных чисел матрицы специального вида, позволил численно подтвердить полученные формулы (3) и (6) для максимального собственного значения краевой задачи (1) – (2), как функции порядка дробной производной модельного дробного дифференциального уравнения. Коэффициенты детерминации при аналитическом сглаживании функции, найденной таблично, составили 0.99 и 0.997. Максимальная относительная погрешность, как следует из Таблицы 2, равна 0.037 %.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Handbook of Fractional Calculus with Applications; Tenreiro, J. A., De Gruyter, M. (Eds.) GmbH: Berlin, Germany; Boston, MA, USA, V. 1–8. 2019.
- [2] Herrmann R. Fractional Calculus: An Introduction for Physicists, 2nd ed.; World Scientific: Singapore, 2014.
- [3] Sandev T., Tomovski Z. Fractional Equations and Models: Theory and Applications; Springer: Berlin, Heidelberg, Germany, 2019.
- [4] Zaslavsky G. M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. // Phys. Rep. 2002. V. 371. pp. 461–580.
- [5] Aleroev T. S., Aleroeva H. T., Huang J. F., Nie N. M., Tang Y. F., Zhang S. Y. Features of seepage of a liquid to a chink in the cracked deformable layer // Int. J. Model. Simul. Sci. Comput. 2010. V.1. pp. 333–347.
- [6] Jiang X.; Yu X.M. Analysis of fractional anomalous diffusion caused by an instantaneous point source in disordered fractal media. Int. J. Non-Linear Mech. 2006. V. 41. pp. 156–165.
- [7] Meerschaert M. M., Metzler R. and Klafter J. Fractional Calculus, Anomalous Diffusion, and Probability, Fractional Dynamics // Eds., World Scientific, Singapore. 2012. pp. 265–284.
- [8] Datsko B. Pattern formation in fractional reaction-diffusion systems with multiple homogeneous states // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2012. V.22. pp. 1250087.

-
- [9] Mainardi F. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation, waves and stability in continuous media // Ser. adv. math. appl. sci. 1994. V.23. pp. 246. 251.
 - [10] Aleroev T. S., Aleroeva H. T. Problems of Sturm-Liouville type for differential equations with fractional derivatives, In: Kochubei, A., Luchko Y. Editors, Handbook of Fractional Calculus with Applications. V 2: Fractional Differential Equations, Berlin, Boston: De Gruyter, 2019
 - [11] Aleroev M., Aleroeva T., Kirane M., Tang Y. F. On one class of persymmetric matrices generated by boundary value problems for differential equations of fractional order // Applied Mathematics and Computation. 2015. V.268. pp. 151–163
 - [12] Gantmacher F. R., Krein M. G. Oscillatory Matrices and Kernels, and Small Oscillations of Mechanical Systems // AMS Chelsea Publishing, 2002. Revised version, 310 pp.

L. V. Kirianova

ESTIMATION OF THE FIRST EIGENVALUE OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, numerical methods are used to obtain estimates for the first eigenvalue of the boundary value problem of a model fractional differential equation describing oscillations of a fractal oscillator. Two empirical formulas are presented for the maximum eigenvalue of the model under consideration: as a function of the equation parameter and in terms of the maximum and minimum sum of row elements of a matrix of a special form. There is an error estimate.

Keywords: fractional differential equation, fractional differentiation operator, matrix eigenvalues, boundary value problem eigenvalues

REFERENCES

- [1] Handbook of Fractional Calculus with Applications; Tenreiro, J. A., De Gruyter, M. (Eds.) GmbH: Berlin, Germany; Boston, MA, USA, V. 1–8. 2019.
- [2] Herrmann R. Fractional Calculus: An Introduction for Physicists, 2nd ed.; World Scientific: Singapore, 2014.
- [3] Sandev T., Tomovski Z. Fractional Equations and Models: Theory and Applications; Springer: Berlin, Heidelberg, Germany, 2019.
- [4] Zaslavsky G. M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. // Phys. Rep. 2002. V. 371. pp. 461–580.
- [5] Aleroev T. S., Aleroeva H. T., Huang J. F., Nie N. M., Tang Y. F., Zhang S. Y. Features of seepage of a liquid to a chink in the cracked deformable layer // Int. J. Model. Simul. Sci. Comput. 2010. V.1. pp. 333–347.
- [6] Jiang X.; Yu X.M. Analysis of fractional anomalous diffusion caused by an instantaneous point source in disordered fractal media. Int. J. Non-Linear Mech. 2006. V. 41. pp. 156–165.
- [7] Meerschaert M. M., Metzler R. and Klafter J. Fractional Calculus, Anomalous Diffusion, and Probability, Fractional Dynamics // Eds., World Scientific, Singapore. 2012. pp. 265–284.
- [8] Datsko B. Pattern formation in fractional reaction-diffusion systems with multiple homogeneous states // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2012. V.22. pp. 1250087.
- [9] Mainardi F. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation, waves and stability in continuous media // Ser. adv. math. appl. sci. 1994. V.23. pp. 246. 251.
- [10] Aleroev T. S., Aleroeva H. T. Problems of Sturm-Liouville type for differential equations with fractional derivatives, In: Kochubei, A., Luchko Y. Editors, Handbook of Fractional Calculus with Applications. V 2: Fractional Differential Equations, Berlin, Boston: De Gruyter, 2019
- [11] Aleroev M., Aleroeva T., Kirane M., Tang Y. F. On one class of persymmetric matrices generated by boundary value problems for differential equations of fractional order // Applied Mathematics and Computation. 2015. V.268. pp. 151–163
- [12] Gantmacher F. R., Krein M. G. Oscillatory Matrices and Kernels, and Small Oscillations of Mechanical Systems // AMS Chelsea Publishing, 2002. Revised version, 310 pp.

Kirianova Lyudmila Vladimirovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.