Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2 (52). С. 5–9

В. И. Прокопьев, П. Э. Стурник

О ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ ПРОГИБА БАЛКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ КОЭФФИЦИЕНТА ПОСТЕЛИ ГРУНТА В МОДЕЛИ ВИНКЛЕРА

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация. Исследуется влияние коэффициента постели в модели Винклера на погрешность численного решения методом конечных разностей на примере краевой задачи для дифференциального уравнения прогиба балки Бернулли при действии статической нагрузки.

Ключевые слова: коэффициент постели, модель Винклера, метод конечных разностей, погрешность, краевая задача, система линейных алгебраических уравнений, матрица.

DOI: 10.37972/chgpu.2022.52.2.001

УДК: [624.04:624.15]:519.6

1. Введение. При строительстве различных сооружений применяются бетонные, металлические и деревянные балки. Основу фундамента здания составляют, как правило, бетонные балки. Для обеспечения прочности, долговечности и безопасности конструкции важно знать расчетный максимальный прогиб балки на этапе проектирования.

Влияние выбора расчетной схемы (количество разбиений по длине балки) на точность решения краевой задачи для дифференциального уравнения Бернулли методом конечных разностей исследовано в работах [1–2].

2. Основная часть. В работе [1] исследуется влияние числа разбиений на погрешность численного решения на примере краевой задачи для дифференциального уравнения прогиба балки Бернулли с коэффициентом постели $k = 75000$ при действии статической нагрузки.

Прокопьев Валерий Иванович
`e-mail`: viprokopiev@mail.ru, кандидат технических наук, профессор, НИУ Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.
Стурник Павел Эдуардович
`e-mail`: sp730-1787@yandex.ru, студент, НИУ Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Поступила 01.07.2022

Влияние величины отпора грунта в зависимости от числа разбиений в конечноразностной схеме также представляет интерес.

В данной статье исследуется влияние величины отпора грунта в зависимости от числа разбиений в конечноразностной схеме для шарнирного опирания балки Бернулли на концах.

Решается краевая задача:

$$y^{(4)}(x) + \beta y(x) = F(x)\ , \quad 0 < x < L, \tag{1}$$

$$\begin{cases} y(0) = y''(0) = 0, \\ y(L) = y''(L) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где y – прогиб балки; x – координата сечения по ее длине; L длина балки; $\beta = \frac{\tilde{k}}{EJ}$, $\tilde{k} = k \cdot b_b$, $EJ = E \cdot J$, $J = b_b h_b^3/12$, h_b и b_b – высота и ширина поперечного сечения, соответственно, E – модуль упругости, J – момент инерции поперечного сечения балки, k – коэффициент, характеризующий отпор грунта в рамках модели Винклера.

Нагрузка, приложенная к балке, описывается формулой $F(x) = \frac{P}{EJ}\delta(x - \frac{L}{2})$ (Рис. 1). Здесь $P = 100$ кН – нагрузка, заданная в средней точке (см. рис. 1.); $L = 8$ м, $h_b = 1.3$ м, $b_b = 1$ м; $E = 2560 \cdot 10^4$ кН/м^2 .

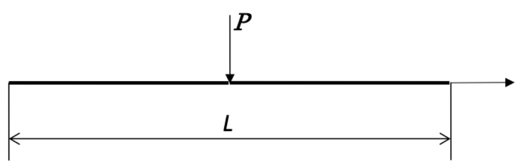

Рис. 1. Нагрузка, приложенная к балке

Конечноразностная схема имеет вид:

$$\begin{array}{ll} y_1 = f_1, & \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = 0, & \\ y_{i-2} - 4y_{i-1} + (6 + \beta_h) y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = f_i\,, & i = 3, 4, ..., n-2, \\ y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} = f_{n-1} & \\ y_n = f_n, & \end{array} \tag{3}$$

где

$$\beta_h = h^4 \beta,$$

$$f_i = \begin{cases} 0\,, & i = 1 \\ h^4 F_h(x_i)\,, & 2 \le i \le n-1 \\ 0\,, & i = n \end{cases}\ ,$$

$$F_h(x_i) = F(x_i)/h.$$

Значения коэффициента отпора грунта при расчете выбирались равными

$$k = 0, 25000, 50000, 75000.$$

Решения систем линейных алгебраических уравнений выполнялись для числа делений $N = 2, 4, 16, 100, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 10000$ по программе, составленной на языке программирования MATLAB. Расчеты выполнялись на 32 разрядном персональном компьютере.

Аналитическое решение при любом k имеет вид [4]

$$y(\xi) = -\frac{Q_0}{EJ\lambda^3}Y_4(\xi) + \frac{\varphi_0}{\lambda}Y_2(\xi)\Big|_{1} + \frac{P}{EJ\lambda^3}Y_4\left(\xi - \frac{\lambda L}{2}\right)\Big|_{2}$$

Q_0 – это значение поперечной силы в начале балки; $\xi = \lambda x$, $\lambda = \sqrt[4]{\frac{kb_b}{4EJ}}$; φ_0 – значение угла поворота в начале балки; $Y_1Y_2Y_3Y_4$ – функции Крылова, имеющие вид

$$Y_1(\xi) = ch\xi cos\xi,$$

$$Y_2(\xi) = \frac{1}{2}(ch\xi sin\xi + sh\xi cos\xi),$$

$$Y_3(\xi) = \frac{1}{2}sh\xi sin\xi,$$

$$Y_4(\xi) = \frac{1}{4}(ch\xi sin\xi - sh\xi cos\xi).$$

3. Анализ результатов расчета. Максимальные прогибы балки, полученные из решения краевой задачи для дифференциального уравнения (1) и краевых условий (2) методом конечных разностей, при разных значениях k с соответствующие аналитические решения (пунктирные линии) приведены на рис. 2 и в таблице 1.

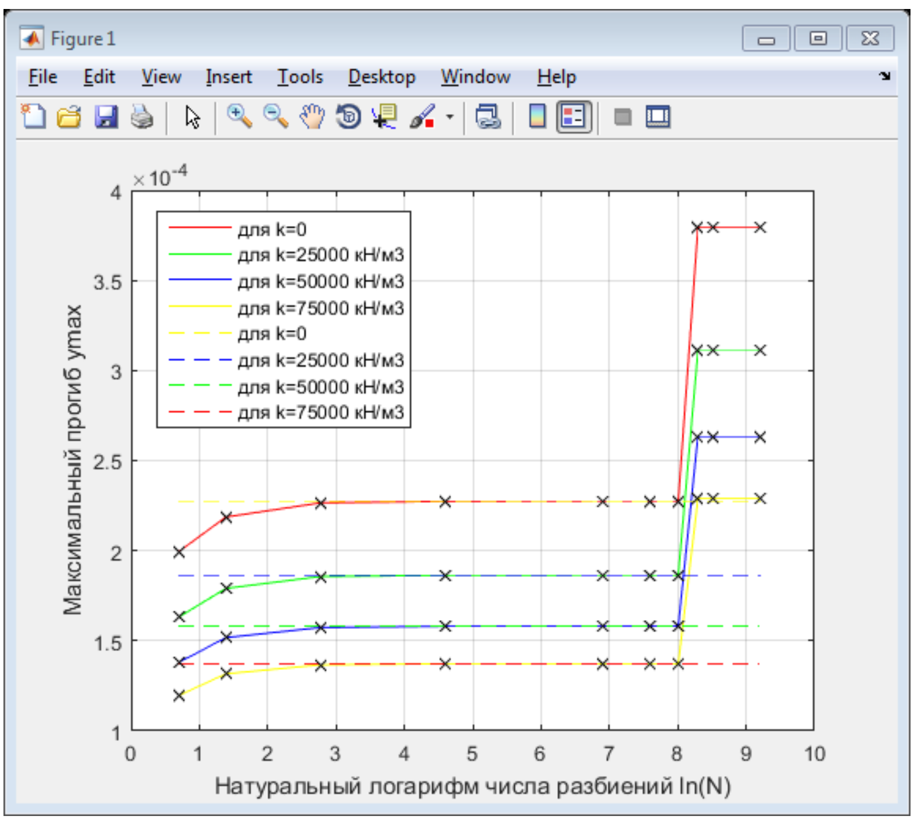

Рис. 2. Максимальные прогибы балки на основе МКР и из аналитических решений

$k =$		0	25000 кН/м^3	50000 кН/м^3	75000 кН/м^3
Аналитические решения		0,2276 мм	0,1865 мм	0,1581 мм	0,1373 мм
$N = 2$	МКР	0,1994 мм	0,1631 мм	0,1379 мм	0,1196 мм
	Оп в %	14,14	14,35	14,65	14,8
$N = 4$	МКР	0,2187 мм	0,1791 мм	0,1518 мм	0,1317 мм
	Оп в %	4,07	4,13	4,15	4,25
$N = 16$	МКР	0,2266 мм	0,1857 мм	0,1574 мм	0,1367 мм
	Оп в %	0,44	0,43	0,44	0,44
$N = 10^2$	МКР	0,2274 мм	0,1864 мм	0,1581 мм	0,1373 мм
	Оп в %	0,09	0,05	0	0
$N = 10^3$	МКР	0,2276 мм	0,1865 мм	0,1581 мм	0,1373 мм
	Оп в %	0	0	0	0
$N = 2 \cdot 10^3$	МКР	0,2276 мм	0,1865 мм	0,1581 мм	0,1374 мм
	Оп в %	0	0	0	0,07
$N = 3 \cdot 10^3$	МКР	0,2276 мм	0,1865 мм	0,1581 мм	0,1373 мм
	Оп в %	0	0	0	0
$N = 4 \cdot 10^3$	МКР	0,3793 мм	0,3108 мм	0,2635 мм	0,2289 мм
	Оп в %	39,99	39,99	40	40,02
$N = 5 \cdot 10^3$	МКР	0,3793 мм	0,3108 мм	0,2635 мм	0,2289 мм
	Оп в %	39,99	39,99	40	40,02
$N = 10^4$	МКР	0,3793 мм	0,3108 мм	0,2635 мм	0,2289 мм
	Оп в %	39,99	39,99	40	40,02

Таблица 1. Результаты сравнения максимальных прогибов, где число делений $N = n - 1$.

Обозначения в таблице: МКР – результат решения методом конечных разностей; Оп в % - отличие прогибов в %.

4. Заключение. Таким образом, можно сделать вывод, что при увеличении коэффициента постели максимальный прогиб балки уменьшается. Если число разбиений балки в методе конечных разностей слишком маленькое, то значение максимального прогиба будет меньше точного. Если число разбиений балки в методе конечных разностей слишком большое, то значение максимального прогиба будет больше точного.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Прокопьев В. И., Стурник П. Э. Оценка точности решения краевой задачи для дифференциального уравнения изгиба балки методом конечных разностей // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 4 (50). С. 53–58.

[2] Jurgen Dankert. Numerische methoden der mechanic. VEB FACHBUCHVERLAG: LEIPZIG, 1977. 318 p.

[3] Варданян Г. С., Андреев В. И., Атаров Н. ., Горшков А. А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. Учебник под ред. Г.С. Варданяна. М.: Изд-во АСВ, 1995. 568 с.

[4] Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1. Под ред. д-ра техн. наук проф. И. А. Биргера и чл.-кор. Академии Латвийской ССР Я. Г. Пановко. М.: Издательство “Машиностроение”. 1968. 832 стр.

V. I. Prokopiev, P. E. Sturnik

EON THE ACCURACY OF SOLVING THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE BERNOULLI DIFFERENTIAL EQUATION OF BEAM DEFLECTION BY THE FINITE DIFFERENCE METHOD DEPENDING ON THE COEFFICIENT OF THE SOIL BED IN THE WINKLER MODEL

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract. The influence of the bed coefficient in the Winkler model on the error of the numerical solution by the finite difference method is investigated by the example of the boundary value problem for the differential equation of the deflection of the Bernoulli beam under the action of static load.

Keywords: bed coefficient, Winkler model, finite difference method, error, boundary value problem, system of linear algebraic equations, matrix

REFERENCES

[1] Prokopiev V. I., Sturnik P. E. Evaluation of the accuracy of solving the boundary value problem for the differential equation of the beam deflection by the method of finite differences. // Vestnik of the I.Ya. Yakovlev ChSPU. Series: Mechanics of the limit state. 2021. No 4 (50). P. 53–58.

[2] Jurgen Dankert. Numerische methoden der mechanic. VEB FACHBUCHVERLAG: LEIPZIG, 1977. 318 p.

[3] Vardanyan G.S., Andreev V.I., Atarov N.M., Gorshkov A.A. Resistance of materials with the basics of the theory of elasticity and plasticity. Textbook edited by G.S. Vardanyan. M.: Publishing House of the ACU, 1995. 568 p.

[4] Strength, stability, vibrations. Handbook in three volumes. Volume 1. Ed. Dr. tech. sciences prof. I. A. Birger and Corresponding Member Academy of the Latvian SSR Ya. G. Panovko. M.: Publishing Hause “Mechanical engineering”. 1968. 832 pp.

Prokopiev Valery Ivanovich, Professor, Candidate of Technical Sciences, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

Sturnik Pavel Eduardovich, Undergraduate Student, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.